Álgebra linear A

Primeira lista de exercícios

Prof. Edivaldo L. dos Santos

---

(1) Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o conjunto V com as operações indicadas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, com as operações usuais de $M(2 \times 2)$.

(b) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 0\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^2$.

(c) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, com as operações usuais de funções.

(d) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = x; z = w^2\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^4$.

(2) Defina a *média* entre dois vetores u, v no espaço vetorial E pondo $u * v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Prove que $(u * v) * w = u * (v * w)$ se, e somente se, $u = w$.

(3) Dados os espaços vetoriais E_1, E_2, considere o conjunto $E = E_1 \times E_2$ (produto cartesiano de E_1 por E_2), cujos elementos são os pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, com $v_1 \in E_1$ e $v_2 \in E_2$. Defina operações que tornem E um espaço vetorial. Verifique a validade de cada um dos axiomas e mostre que sua definição se estende para o caso de n espaços vetoriais $E_1, \ldots, E_n$.

(4) Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço do espaço vetorial V.

(a) $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x, x, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(b) $V = P_n(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p(0) = p(1)\}$.

(c) $V = M(n \times n)$ e $W = \{A \in M(n \times n) : BA = 0\}$, sendo $B \in M(n \times n)$ dada.

(d) $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} c_j x_j = 0 \right\}$, sendo $c_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ dados.

(e) $V = P_n(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

(5) Dê exemplo de uma matriz 3×3 cujos vetores-linha geram um subespaço de $\mathbb{R}^3$ diferente daquele gerado pelos vetores-coluna.

(6) Diga, em cada um dos itens abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se W é subespaço vetorial de V e $u, v \in V$ são tais que $u \notin W$ e $v \notin W$, então $u + v \notin W$.

(b) Se W é subespaço vetorial de V, $u \in V$ e $\alpha \neq 0$ são tais que $u \notin W$, então $\alpha u \notin W$.

(c) Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

(7) Em cada um dos itens abaixo, encontre os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde U e W são subespaços do espaço vetorial V indicado.

(a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$; $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$; $V = \mathbb{R}^2$.

(b) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M(2 \times 2) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$; $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M(2 \times 2) : c, d \in \mathbb{R} \right\}$; $V = M(2 \times 2)$.

(c) $U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$; $W = \{q \in P_3(\mathbb{R}) : q'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$; $V = P_3(\mathbb{R})$.

(8) Prove que o conjunto S das matrizes simétricas e o conjunto A das matrizes anti-simétricas $n \times n$ são subespaços vetoriais de $M(n \times n)$ e que $M(n \times n) = S \oplus A$. Obtenha uma base para S e também uma base para A.

(9) Seja $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções definidas em $\mathbb{R}$ e que tomam valores em $\mathbb{R}$. Fixada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que o conjunto F de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(g(x)) = f(x)$ é um subespaço vetorial de E. Para qual função g tem-se $F =$ conjunto das funções periódicas de período a? E se fosse $g(f(x)) = f(x)$? Ou $f(g(x)) = g(x)$?

(10) Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *limitada* quando existe $k_f > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant k_f$ para todo $x \in X$. Prove que o conjunto das funções limitadas é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$, o qual é gerado pelas funções limitadas positivas.

(11) Seja $E = F_1 \oplus F_2 = G_1 \oplus G_2$. Se $F_1 \subset G_1$ e $F_2 \subset G_2$, prove que $F_1 = G_1$ e $F_2 = G_2$.

(12) Sejam E, F espaços vetoriais. Uma função $f : E \to F$ chama-se *par* (respectivamente, *ímpar*) quando $f(-v) = f(v)$ (respectivamente, $f(-v) = -f(v)$) para todo $v \in E$. Prove:

(a) O conjunto A das funções pares e o conjunto B das funções ímpares são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(E; F)$ e vale $\mathcal{F}(E; F) = A \oplus B$.

(b) Além dos conjuntos A, dos polinômios pares e B, dos polinômios ímpares, considere também o conjunto A' dos polinômios da forma $p(x) = \sum a_i x^{2i}$ que só contêm expoentes pares e o conjunto B' dos polinômios da forma $q(x) = \sum a_i x^{2i+1}$, que só contêm expoentes ímpares. Prove que A' e B' são subespaços vetoriais de espaço $\mathcal{P}$ de todos os polinômios, que $A' \subset A$, $B' \subset B$ e $\mathcal{P} = A' \oplus B'$. Conclua que $A = A'$ e $B = B'$.

(13) Assinale V ou F quanto à validade da afirmação: "a união de dois subconjuntos L.I. do espaço vetorial E é ainda um conjunto L.I.".

(a) Sempre.

(b) Nunca.

(c) Quando um deles é disjunto do outro.

(d) Quando um deles é parte do outro.

(e) Quando um deles é disjunto do subespaço gerado pelo outro.

(f) Quando o número de elementos de um deles mais o número de elementos do outro é igual à dimensão de E.

(14) Para cada um dos conjuntos $S \subset V$, onde V é o espaço vetorial indicado, encontre o subespaço $[S]$ gerado por S.

(a) $S = \{(1,0),(2,-1)\}$; $V = \mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{(1,1,1),(2,2,0)\}$; $V = \mathbb{R}^3$.

(c) $S = \{1, t, t^2, 1+t^3\}$; $V = P_3(\mathbb{R})$.

(d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$; $V = M(2 \times 2)$.

(15) Em cada um dos itens abaixo encontre um conjunto finito S que gera o subespaço W do espaço vetorial V. Determine então a dimensão de W.

(a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$.

(b) $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$; $V = P_3(\mathbb{R})$.

(c) $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(0) = p(1) = 0\}$; $V = P_3(\mathbb{R})$.

(16) Verifique, em cada um dos itens a seguir, se o subconjunto S do espaço vetorial V é L.I. ou L.D.

(a) $S = \{(1,2),(-3,1)\}$; $V = \mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{1 + t - t^2, 2 + 5t - 9t^2\}$; $V = P_2(\mathbb{R})$.

(c) $S = \{(1,2,2,-3),(-1,4,-2,0)\}$; $V = \mathbb{R}^4$.

(d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$; $V = M(3 \times 3)$.

(17) Prove que as o conjunto $L \subset M(n \times n)$ das matrizes triangulares inferiores é um subespaço vetorial, obtenha uma base para L e determine sua dimensão.

(18) Encontre uma solução não-trivial para o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 2x + y + z - w = 0 \\ 3x - 2y + z - 2w = 0 \end{cases}$$

e, a partir daí, obtenha uma combinação linear nula dos vetores $v_1 = (1,2,3), v_2 = (2,1,-2), v_3 = (3,1,1), v_4 = (4,-1,2)$, na qual os coeficientes não são todos iguais a zero, ou seja, conclua que estes vetores são L.D..

(19) Prove que $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ é um conjunto L.I. no espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. (*Sugestão:* dada uma combinação linear nula, derive-a, depois divida por e^x e prossiga.)

(20) Se os vetores $v_1, \ldots, v_m$ são L.I., o mesmo se dá com os vetores $v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1$. Vale a recíproca?

(21) Exiba uma base para cada um dos espaços vetoriais abaixo e então calcule sua dimensão.

(a) polinômios pares de grau $\leqslant n$.

(b) polinômios ímpares de grau $\leqslant n$.

(c) polinômios de grau $\leqslant n$ que se anulam para $x = 2$ e $x = 3$.

(d) vetores de $\mathbb{R}^n (n \geqslant 6)$ nos quais a segunda, a quarta e a sexta coordenadas são iguais.

(e) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \text{ e } x + 2y + t = 0\}$

(f) $W = \{X \in M(2 \times 2) : AX = X\}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.