Álgebra linear A

3ª lista de exercícios

Prof. Edivaldo L. dos Santos

(1) Verifique se as transformações abaixo são lineares:

(a) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ F(x,y,z)=x+5y-z.$

(b) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ F(x,y,z)=x+5y-z+2.$

(c) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ F(x,y,z)=(|x|,y+2z).$

(d) $F:\mathcal{P}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{P}_n(\mathbb{R}),\ F(p)=p'+p''.$

(e) $F:\mathbb{R}^2\to\mathcal{C}([0,1]),\ F(x,y)=x\mathrm{e}^t+y\mathrm{e}^{2t}.$

(f) $F:\mathcal{C}([0,1])\to\mathcal{C}([0,1]),\ F(f(t))=f(t)\varphi(t)$, onde $\varphi(t)$ é um elemento fixo de $\mathcal{C}([0,1])$.

(g) $F:M_{n\times n}(\mathbb{R})\to M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ F(X)=AX+X$, onde $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é fixada.

(h) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ F(x,y,z)=(x,2^y,2^z).$

(h) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ F(x,y,z)=(3x,a,5z)$, onde $a\in\mathbb{R}$.

(2) Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ um funcional linear. Sabendo que $f(1,1)=3$ e $f(2,3)=1$, calcule $f(1,0)+f(0,1)$.

(3) Em cada um dos itens abaixo, verifique se existe uma transformação linear satisfazendo as condições dadas, e se existe mais de uma.

(a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, tal que $T(1,1)=(1,2),\ T(1,0)=(0,0)$ e $T(0,1)=(2,1)$.

(b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, tal que $T(1,1,1)=(0,3,1,5),\ T(1,1,0)=(0,0,0,1)$ e $T(1,0,0)=(0,0,0,0)$.

(c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, tal que $T(1,1,1)=(0,3,1,5),\ T(1,1,0)=(0,0,0,1)$ e $T(0,0,1)=(0,0,0,0)$.

(4) Sejam $F,G,H\in L(\mathbb{R}^2)$ tais que $F(x,y)=(x,2y),\ G(x,y)=(y,x+y)$ e $H(x,y)=(0,x)$. Determine $F+H,\ F\circ G,\ G\circ(H+F),\ G\circ F,\ H\circ F,\ H\circ F\circ G$ e $G\circ F\circ H$.

(5) Seja $T:U\to V$ uma transformação linear.

(a) Se os vetores $T(v_1),\dots T(v_m)\in V$ são L.I., prove que $v_1,\dots,v_m\in U$ também são L.I.

(b) Suponha que $Ker\,(T)=\{0\}$. Mostre que, se $v_1,\dots,v_m$ são vetores LI em U, então $T(v_1),\dots T(v_m)$ são LI em V.

(6) Encontre o núcleo e a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo, e determine uma base para cada um deles.

(a) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ F(x,y,z)=(x+y,2x+y,3x+y).$

(b) $F : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),\ F(p) = p' + p''$.

(c) $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ F(X) = AX$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(7) Sejam $F, G \in L(\mathbb{R}^2)$ definidos por $F(x, y, z) = (x + y, z + y, z)$ e $G(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$. Determine $F \circ G$, $Ker(F \circ G)$ e $Im(G \circ F)$.

(8) Determine as matrizes das transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

(a) $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2),\ F(x, y, z) = (x + y, z)$ (b)$F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3),\ F(x, y) = (x + y, x, x - y)$

(c) $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3),\ T(x) = (x, 4x, -3x)$ (d)$T \in L(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R})),\ T(p(x)) = p'(x)$

(e) $F \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}),\ F(x, y, z, w) = 2x + y - z + 3w$.

(f) $T \in L(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3),\ T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (a_0 + 2a_2, a_1 - 3a_0, a_2)$.

(9) Sejam F e G operadores lineares do $\mathbb{R}^3$, com $F(x, y, z) = (x, 2y, y - z)$. Sabendo que a matriz de $(2F - G)$ em relação à base canônica é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz de G em relação à base canônica, e também $G(x, y, z)$.

(10) Seja $A : E \to F$ um isomorfismo. Se $T : F \to E$ é tal que $AT = I_F$ (ou $TA = I_E$), prove que T é linear.

(11) Dadas as transformações lineares $A : E \to F$, $B : F \to G$, assinale (V) ou (F) nas seguintes afirmações:

(a) BA sobrejetiva $\Rightarrow$ B sobrejetiva.

(b) BA sobrejetiva $\Rightarrow$ A sobrejetiva.

(c) BA injetiva $\Rightarrow$ B injetiva.

(d) BA injetiva $\Rightarrow$ A injetiva.

Verifique que todas as afirmações são verdadeiras se $E = F = G$.