Álgebra linear A

4ª lista de exercícios

Prof. Edivaldo L. dos Santos

(1) Encontre os auto-valores e auto-vetores das matrizes abaixo. Em cada caso, verifique se $\mathbb{R}^3$ admite uma base de auto-vetores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) Encontre os auto-valores e os auto-vetores dos operadores lineares abaixo:

(a) $T(x, y) = (x, ky)$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante fixa.

(b) $T(x, y) = (-x, y)$.

(c) $T(x, y, z) = (3x, 2y - 5z, y - 2z)$.

(d) $T(x, y, z) = (z, y, x)$.

(e) $T(x, y, z, w) = (2x + y, 2y, z + w, -2z + 4w)$.

(f) O operador de derivação $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$.

(3) (a) Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (2x + z, -3y + z, -3z)$. Encontre o polinômio característico de T, os auto-valores de T e os correspondentes auto-vetores. Verifique se $\mathbb{R}^3$ possui uma base de auto-vetores de T.

(b) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determine os auto-valores e auto-vetores de A. Determine uma base para cada um dos auto-espaços. Verifique se $\mathbb{R}^3$ possui uma base de auto-vetores de A.

(4) (a) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (-1, 0)$ são auto-vetores de T, correspondentes aos auto-valores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, respectivamente. Determine $T(x, y)$.

(b) Considere o operador linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $v = (1, 0, 0)$ é auto-vetor com auto-valor nulo, $F(0, 1, 0) = (0, 2, 1)$ e $F(0, -1, 1) = (0, 0, 3)$. Determine $F(x, y, z)$.

(5) Assinale (V)erdadeiro ou (F)also:

(a) Se $\lambda \neq 0$ é auto-valor do operador invertível A, então λ^{-1} é auto-valor de A^{-1}.

(b) O polinômio característico do operador $A + B$ é a soma dos polinômios característicos de A e B.

(c) Se v é um auto-vetor comum aos operadores A e B, então v é auto-vetor de $A + B$ e de BA.

(6) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ na qual o operador $A(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 4y + 6z, -y - z)$ tem uma matriz triangular. Exiba essa matriz.

(7) Encontre uma matriz diagonal semelhante à matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(8) Estude quanto à possibilidade de diagonalização as matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(9) Mostre que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é semelhante a uma matriz diagonal se $a \neq 0$.

(10) Verifique que a matriz abaixo não é diagonalizável, para qualquer $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$