Álgebra linear A

5ª lista de exercícios

Prof. Edivaldo L. dos Santos

1. Verifique em cada um dos casos abaixo se $\langle u, v\rangle$ define um produto interno no espaço vetorial V dado.

   (a) $\langle u, v\rangle = 2xx' - xy' - x'y + 2yy'$, sendo $u = (x, y), v = (x', y') \in V = \mathbb{R}^2$.

   (b) $\langle u, v\rangle = \dfrac{xx'}{a^2} + \dfrac{yy'}{b^2}$, sendo $u = (x, y), v = (x', y') \in V = \mathbb{R}^2$ e $a, b \in \mathbb{R}$ fixos e não nulos.

   (c) $\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, sendo $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n \in V = P_n(\mathbb{R})$.

   (d) $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$, onde $A, B \in V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e, para $A = (a_{ij})$, $tr(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$ é o *traço* da matriz A.

2. Seja S um conjunto de geradores do espaço vetorial V, que está munido de um produto interno. Se os vetores $u, v \in V$ são tais que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$ para qualquer $w \in S$, prove que $u = v$.

3. Dado o produto interno $\langle u, v\rangle$ no espaço vetorial V, prove que

   (a) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$, para quaisquer $u, v \in V$.

   (b) $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v\rangle$, para quaisquer $u, v \in V$.

4. (a) No espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$, considere o produto interno dado no exercício 1, item (d). Calcule $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ e $d(A, B)$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno usual, determine $\langle u, v\rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$, $d(u, v)$, $\dfrac{u + v}{\|u + v\|}$ e o ângulo entre u e v, sendo $u = (1, 2, 0, 1)$ e $v = (3, 1, 4, 2)$.

5. Determine a norma de cada um dos seguintes elementos:

   (a) $u = (3, 1, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$, em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^4$.

   (b) $f(t) = t^2 + t - 1$, em relação ao produto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ sobre $P_2(\mathbb{R})$.

6. Considere o $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determine $a \in \mathbb{R}$ no vetor $u = (6, a, -1)$ de maneira que $\|u\| = \sqrt{41}$.

7. Sejam $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 1, 2)$ no $\mathbb{R}^3$. Considerando neste espaço o produto interno usual, determine os vetores $w \in \mathbb{R}^3$ tais que $\|w\| = 1$ e $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$.

8. Encontre a distância de u a v e o cosseno do ângulo entre u e v nos seguintes casos:

   (a) $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual.

   (b) $u = 1 + t - t^2$, $v = 3t^2 \in P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno considerado em (5)(b).

(c) $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, com o produto definido em (1)(d).

9. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano tais que $\|v\| = 1$, $\|u\| = 1$ e $\|u - v\| = -2$. Determine $\langle u, v\rangle$.

10. Sejam u, v vetores de um espaço euclidiano. Sendo $\|u\| = 3$ e $\|v\| = 5$, determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\langle u + \alpha v, u - \alpha v\rangle = 0$.

11. Em cada um dos casos abaixo, determine se o conjunto $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ é ortonormal, apenas ortogonal ou nenhum dos dois.

    (a) $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 2)$.

    (b) $u = (a, b, c)$, $v = (-b, a, 0)$, $w = (-ac, -bc, a^2 + b^2)$.

    (a) $u = \frac{1}{7}(2, 6, 3)$, $v = \frac{1}{7}(3, -2, 6)$, $w = \frac{1}{7}(6, -3, 2)$.

12. Seja $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno no espaço vetorial V. Dado um isomorfismo $A : U \to V$, defina $[u, v] = \langle Au, Av\rangle$, para quaisquer $u, v \in U$. Prove que $[\ ,\ ]$ é um produto interno em U.

13. Determine a base ortonormal do espaço vetorial V indicado, obtida pelo processo de Gram-Schmidt a partir da base dada em cada um dos casos seguintes.

    (a) $B = \{(2, 6, 3), (-5, 6, 24), (9, -1, -4)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

    (b) $B = \{(3, 4, 12), (7, -8, 15), (-15, 6, 44)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

    (c) $B = \{1, t, t^2\}$ base de $P_2(\mathbb{R})$. Use o produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

14. Em cada um dos casos abaixo determine os valores de m para os quais u e v são ortogonais em V.

    (a) $u = (1, m + 1, m)$, $v = (m - 1, m, m + 1)$ em $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno usual.

    (b) $u(t) = mt^2 - 1$, $v(t) = t$ em $V = P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno em (6)(b).

15. Em $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual, determine todos os vetores de norma igual a 2 que sejam ortogonais simultaneamente a $(2, 1, 2)$ e $(-1, 3, 4)$.

16. Determine uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual:

    (a) $V^\perp$, onde $V = [(1, 0, 1, 1), (1, 1, 2, 0)]$.

    (b) $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 3, 4)]$.

    (c) W e $W^\perp$, onde $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } 2x - y + z = 0\}$.

17. Determine a projeção ortogonal do vetor $v \in V$ sobre o subespaço W de V em cada um dos casos abaixo.

(a) $v = (1, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$, $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z = 0 \text{ e } z - 2w = 0\}$, com o produto interno usual.

(b) $v = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$, $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$, com o produto interno usual.

(c) $v(t) = 2t - 1 \in P_2(\mathbb{R})$, $W = [t]$, com o produto interno em (6)(b).

18. Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $u = (2, 2, 2)$, $v = (3, 3, 1)$.

(a) Determine dois vetores v_1 e v_2 tais que $v = v_1 + v_2$; v_1 é ortogonal a u e $v_2 = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Se $w = (-5, 1, -1)$, decomponha v em uma parcela de $W = [u, w]$ e uma parcela de $W^\perp$.

19. Em cada um dos casos abaixo, verifique se o operador $T \in L(\mathbb{R}^3)$ é auto-adjunto, sabendo que a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é a seguinte:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Seja V um espaço vetorial euclidiano e $W \subset V$ um subespaço. Para cada $v \in V$, considere $v = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^\perp$.

(a) Mostre que $T : V \to V$ dada por $T(v) = w_1 - w_2$ é um operador linear auto-adjunto.

(b) Se $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, e $W = [(1, 1, 0)]$, ache a matriz de T relativa à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

21. Seja T um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano V. Mostre que, se $\langle T(u), u\rangle = 0$, para todo $u \in V$, então $T = 0$.

22. Sejam V um espaço euclidiano e $T, S \in L(V)$ operadores auto-adjuntos. Prove que $T \circ S$ é auto-adjunto se, e somente se, $T \circ S = S \circ T$.

23. Seja $T \in L(V)$ um automorfismo. Mostre que se T é auto-adjunto, então T^{-1} também é auto-adjunto.

24. Sejam A um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano V e U um subespaço vetorial de V. Mostre que se $A(u) \in U$ para todo $u \in U$, então $U^\perp$ também tem esta propriedade.