Lista 4 - Cálculo 2

Professor: Edivaldo L. dos Santos

1. Determine as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = x.e^{3y}$ (b) $f(x,y) = y.\ln(x)$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

   (d) $f(x,y) = x^y$ (e) $f(\alpha,\beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta)$ (f) $f(s,t) = \dfrac{st^2}{s^2+t^2}$

   (g) $f(u,v) = \text{arctg}\left(\frac{u}{v}\right)$ (h) $f(x,t) = e^{\text{sen(t/x)}}$ (i) $f(x,y) = x.y.e^{x.y}$

   (j) $f(x,y) = \int_y^x \cos(t^2)dt$ (k) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$

2. Calcule pela definição as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

   (a) $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$ (b) $f(x,y) = \sqrt{3x-y}$

3. Calcule todas as derivadas parciais de 2^a ordem das funções:

   (a) $f(x,y) = \ln(3x+5y)$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

   (c) $f(x,y) = y\text{tg}(2x)$ (d) $f(x,y) = \sqrt{x+y^2}$

4. Verifique se $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ para as seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = x^5y^4 - 3x^2y^3 + 2x^2$ (b) $f(x,y) = xye^y$

   Definição: A equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ é chamada equação de Laplace. As soluções $u(x,y)$ dessa equação são chamadas funções harmônicas.

5. Verifique se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace:

   (a) $u(x,y) = x^2 + y^2$ (b) $u(x,y) = x^2 - y^2$

   (c) $u(x,y) = x^3 + 3xy^2$ (d) $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

   Definição: A equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ é chamada equação da onda. Ela descreve o movimento de uma onda, que pode ser uma onda do mar, uma onda de som ou uma onda se movendo numa corda vibrante.

6. Verifique se a função $u(x,t) = \text{sen}(kx).\text{sen}(akt)$ é solução da equação onda.

7. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, onde $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y^4}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

8. Considere a função $z = f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Verifique que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

9. Seja $f(x,y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t^2}dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

   Sugestão: Faça $F(t) = e^{-t^2}$ e $u(x,y) = x^2+y^2$ e aplique o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{u(x,y)} F(t)dt\right)$.

10. Verifique se as seguintes funções são diferenciáveis em $(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

11. Determine o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ onde a função $f(x,y) = \text{sen}\left(\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ é diferenciável.

12. Verifique pela definição que a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ é diferenciável em $(0,0)$.

13. Seja $2x+y+3z = 6$ a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(1,1,1)$.

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

(b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1,1,1)$.

14. Considere a função $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

15. Determine, se existir, a equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x,y)$ nos pontos dados.

(a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$; $P_1 = (0,0,1)$ e $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$; $P_1 = (1,1,0)$ e $P_2 = (1,2,1)$.

(c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $P_1 = \left(1,1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $P_2 = (0,1,1)$.

16. Determine a diferencial da função:

(a) $z = \ln(2x-3y)$ (b) $z = \text{sen}^2(x+y)$ (c) $z = x.e^{x+y} - y$

17. Determine o erro decorrente de tomarmos a diferencial dz como uma aproximação para o acréscimo Δz, onde:

(a) $z = x^2+y^2$, quando (x,y) varia do ponto $(1,2)$ para o ponto $(1.01, 2.01)$.

(b) $z = x^2y$, quando (x,y) varia do ponto $(2,4)$ para o ponto $(2.1, 4.2)$.

18. Sejam $z = f(x,y) = x^2+y^2$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível $f(x,y) = 1$. Seja $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Mostre que $\gamma'(t).\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Interprete geometricamente.

Sugestão: Para todo t no domínio de γ, temos que $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$. Derive em relação a t e faça $t = t_0$.

19. Calcule o gradiente das funções dadas nos pontos indicados:

    (a) $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$, $P(1,1)$ (b) $f(x,y) = xy - \text{sen}(x+y)$, $P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

20. Seja γ uma curva dada que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1,3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha que $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$. Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $(1,3)$.

21. Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2,5)$, sabendo-se que $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ e que a sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ neste ponto?

22. Seja $g(t) = f(x,y).\text{sen}(3t)$, onde $x = 2t$ e $y = 3t$. Verifique que:

$$g'(t) = 3f(x,y)\cos(3t) + \text{sen}(3t)\left[2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right].$$

23. Seja $z = uf(u-v, u+v)$. Verifique que $u\frac{\partial z}{\partial u} + u\frac{\partial z}{\partial v} = z + 2u^2\frac{\partial f}{\partial y}$.

24. Use a Regra da Cadeia-Caso I para calcular $\frac{dz}{dt}$, onde:

    (a) $f(x,y) = \text{sen}(x)\cos(y)$, onde $x = x(t) = \pi t$ e $y = y(t) = \sqrt{t}$.

    (b) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$, onde $x = x(t) = \text{sen}(3t)$ e $y = y(t) = \cos(3t)$.

25. Use a Regra da Cadeia-Caso II para calcular as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$:

    (a) $z = f(x,y) = \frac{x}{y}$, onde $x = x(u,v) = u.e^v$ e $y = y(u,v) = 1 + u.e^{-v}$.

    (b) $z = f(x,y) = e^{xy}\text{tg}(y)$, onde $x = x(u,v) = u + 2v$ e $y = y(u,v) = \frac{u}{v}$.

26. Suponha que para todo x se tenha $f(3x, x^3) = \text{arctg}(x)$.

    (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)$ admitindo que $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 2$.

    (b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1,f(3,1))$.