Lista 5 - Cálculo 2

Professor: Edivaldo L. dos Santos

1. Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $z = z(x, y)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y e z.

2. Suponha que $v = v(u)$ seja diferenciável e dada implicitamente pela equação $u = F(u^2 + v, v^2)$, onde $F(x, y)$ é suposta diferenciável. Expresse $\frac{dv}{du}$ em termos de u, v e das derivadas parcias de F.

3. A função diferenciável $z = z(u, v)$ é dada implicitamente pela equação $f\left(\frac{u}{v}, z\right) = 0$, onde $f(x, y)$ é suposta diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$. Verifique que

$$u\frac{\partial z}{\partial u} + v\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

4. A função diferenciável $z = z(u, v)$ é dada implicitamente pela equação $f\left(\frac{u}{v}, \frac{z}{x^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda \neq 0$ um real fixo) , onde $f(x, y)$ é suposta diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$. Verifique que

$$u\frac{\partial z}{\partial u} + v\frac{\partial z}{\partial v} = \lambda z.$$

5. Em que direção e sentido a função $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ cresce mais rapidamente no ponto $(1, 1)$? Em que direção e sentido f decresce mais rapidamente?

6. Admita que $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(2, 1)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

7. Seja $f(x, y) = xy$. Determine a reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(1, 2, f(1, 2))$, que forma com o plano xy ângulo máximo.

8. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy (suponha T em ^oC e x e y em metros m).

   a) Estando-se no ponto $(3, 2)$, qual a direção e sentido de maior crescimento da temperatura? Qual a taxa de crescimento nesta direção?

   a) Estando-se no ponto $(3, 2)$, qual a direção e sentido de maior decrescimento da temperatura? Qual a taxa de decrescimento nesta direção?

9. Seja $f(x, y)$ diferenciável e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$, unitários e ortogonais. Prove que:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\ \vec{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)\ \vec{v},$$

   ou seja, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)$ são as coordenados do vetor $\nabla f(x, y)$ em relação à base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

10. Seja $g(r,\theta) = f(x,y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, onde $f(x,y)$ é suposta diferenciável em um aberto de $\mathbb{R}^2$. Sejam $\vec{u} = \cos\theta\ \vec{i} + \mathrm{sen}\,\theta\ \vec{j}$ e $\vec{v} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$. Mostre que

    a) $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y)$ e $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y)$

    b) $\nabla f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y)\ \vec{u} + \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y)\ \vec{v}$.

    c) $\| \nabla f(x,y) \|^2 = \left[\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\right]^2 + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right]^2$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

11. Calcule $\| \nabla f(1,1) \|$ sendo $f(x,y) = \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^4$.

    (*Dica.* Faça $g(r,\theta) = f(x,y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e utilize o item c) do exercício anterior).