1a. Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral C - Turma A - L1
Professor: Edivaldo L. dos Santos

Nome: Gabarito.
Assinatura: _____
RA : _____ Data: 28/09/2007

Questões	Valor	Notas
1ª	1.0	
2ª	1.0	
Total	2.0	

Justifique todas as suas respostas.

1. Seja $f(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}$.

   a. Calcule $\int_0^1 f(x)dx$ e $\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx$.

   b. Verifique que a seqüência de funçoes (f_n), onde $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ não converge uniformemente para a função $f(x)$ em $[0,1]$.

Solução. Inicialmente, vamos verificar que $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De fato, se $x = 0$ temos $f(0) = \lim_{n\to+\infty} n0e^{-n0^2} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$

Se $x \neq 0$

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} n x e^{-nx^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} \overset{\text{L'H em } n}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{x^2 e^{nx^2}} = 0$$

a.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

$$\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-n} e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u\Big|_0^{-n} = -\frac{1}{2}e^{-n} + \frac{1}{2}$$

$u = -nx^2$

$du = -n2x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}du = nx\,dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 1 \Rightarrow u = -n$

b) Segue de (a) que

$$0 = \int_0^1 f(x)\,dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\underbrace{e^{-n}}_{0} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

e portanto $(f)_n$ não pode convergir uniformemente para a função nula $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Considere a função $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$.

(a) Qual o domínio de f?

(b) Mostre que f é contínua.

(c) Justifique a igualdade: $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^4}$.

a) aplicando o teste da razão temos

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x^n}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} |x| \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = \lim_{n\to+\infty} |x| \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^3 = |x| \cdot 1$$

Portanto, se $|x|<1$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$ converge e $|x|>1$ a série diverge.

Para $x=1$ temos $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1)^{n-1}}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge pois é harmônica de ordem 3.

Para $x=-1$ temos $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ converge pois é absolutamente convergente.

Portanto, $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\} = [-1, 1]$.

b) Temos que $\left|\frac{x^{n-1}}{n^3}\right| \leq \left|\frac{1}{n^3}\right|$ para $x \in [-1, 1]$.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^3$ é convergente, segue do Teste M de Weierstrass que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$ converge absolutamente em $[-1, 1]$. Como cada $f_n = \frac{x^{n-1}}{n^3}$ é contínua em $[-1, 1]$, segue que, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$ é contínua em $[-1, 1]$.

c) Como cada f_n é contínua e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$ converge absolutamente para f em $[-1, 1]$, temos

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{-1}^{1} \left(\frac{x^{n-1}}{n^3}\right) dx \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n^4} \Big|_{-1}^{1} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(1)^n}{n^4} - \frac{(-1)^n}{n^4} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^4}$$

$$* \quad \frac{(1)^n}{n^4} - \frac{(-1)^n}{n^4} = \begin{cases} \frac{2}{n^4}, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$