1a. Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral C - Turma B - L1 - Gabarito
Professor: Edivaldo L. dos Santos

Questões	Valor	Notas
1ª	1.0	
2ª	1.0	
Total	2.0	

Nome: _____

Assinatura: _____

RA : _____ Data: 27/09/2007

Justifique todas as suas respostas.

1. Determine os valores positivos de α para os quais a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k^\alpha}$ converge.

   Solução. Aplicando o teste da razão temos: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(\alpha)^{n+1}}{(n+1)^\alpha}}{\frac{\alpha^n}{n^\alpha}} = \frac{\alpha\alpha^n}{(n+1)^\alpha}\frac{n^\alpha}{\alpha^n} = \alpha\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \alpha\left(\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^\alpha = \alpha\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^\alpha = \frac{\alpha}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}$.

   Como $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = 1^\alpha$, segue que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha} = \alpha$. Portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k^\alpha}$ converge se $0<\alpha<1$ e diverge se $\alpha>1$. Se $\alpha = 1$ temos a série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ que diverge.

2. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{nx^2+1}$. Mostre que a seqüência (f_n) não converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$.

   Solução. Inicialmente, vamos determinar a função f.

   Se $x = 0$, temos que $f(0) = \lim_{n\to\infty}\frac{n0}{n0^2+1} = 0$.

   Se $x \neq 0$, temos $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{nx^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n(x^2+1/n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{(x^2+1/n)} = x/x^2 = 1/x = 0$.
   Assim, f é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases},$$

   que não é contínua em $x = 0$. Se (f_n) convergisse uniformemente, como cada fn é contínua, deveríamos ter f contínua. Mas f não é contínua e portanto a seqüência (f_n) não converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$.