1a. Prova de Cálculo Diferencial e Integral C - Turma B - P1 - Gabarito

Professor: Edivaldo L. dos Santos

Nome: _____

Assinatura: _____

RA : _____ Data: 27/09/2007

Questões	Valor	Notas
1ª	2.0	
2ª	2.0	
3ª	2.0	
4ª	2.0	
Total	8.0	

Justifique todas as suas respostas.

1. Mostre que a seqüência definida recursivamente por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$ é crescente e $a_n < 3$, $\forall n \geq 1$. Deduza que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e encontre seu limite.

   Solução. Como no exercício 6 da 1ª lista de exercícios, mostramos por indução que (a_n) é crescente e satisfaz $a_n < 2$, $\forall n \geq 1$ (Verifique!). Dessa forma, (a_n) é limitada superiormente por $b = 3$ e é crescente, logo (a_n) é convergente. Seja $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ (existe e é finito) e desde que se (a_n) converge $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$, temos

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 3 - \frac{1}{a_n} = 3 - \frac{1}{L} = \frac{3L-1}{L} \tag{1}$$

$$L = \frac{3L-1}{L} \Leftrightarrow L^2 - 3L + 1 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38 \text{ ou } L = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,6,$$

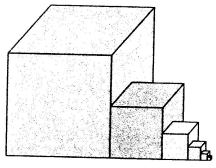
   porém como $L > 1$, pois $a_n > 1, \forall n$, segue que $L = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2. **a)** Determine os valores de x para os quais a série $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + \cdots$ converge e encontre a soma da série.

   Solução. Temos que $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}[(e^{-x})^n]$ que é uma séie geométrica com $r = e^{-x}$ que converge se $|r| = |e^{-x}| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} < 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow \ln(e^x) = x > \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x > 0$. Portanto a série converge $\forall x > 0$ e a sua soma é dada por:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}[(e^{-x})^n] = \sum_{n=0}^{\infty}[(e^{-x})^n] - 1 == \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(\frac{1}{e^{-x}} - 1)} = \frac{1}{e^x - 1}$$

   b) A figura abaixo mostra uma escadaria infinita construída de cubos. Encontre o volume total da escadaria dado que o maior dos cubos tem lado de comprimento 1 e que cada cubo sucessivo tem lado de comprimento igual à metade do lado do cubo precedente.



... **Figura**

   Soluçao. Temos que o volume V procurado é dado por

$$V = 1^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2^n}\right)^3 + \cdots = 1 + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{8}\right)^n + \cdots + = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n,$$

   que é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{8}$, logo tem soma

$$V = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7}$$

3. Em cada caso, verifique se a série converge, converge absolutamente ou diverge.

   a) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$ **b)** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sqrt{n}}{(n+1)^3-1}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ \ln(n)}{n^3+1}$

Solução. a) Temos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)2^n}{2^{n-1}n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1, \forall n \geq 1$ e portanto $a_n = n/2^n$ é decresente. Além disso, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n \ln 2} = 0$, portanto a série $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$ converge pelo teste da série alternada.

b) Temos que $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^k}{k!}} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^k} = \frac{(k+1)^k}{k^k}$.

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e > 1$ temos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ diverge pelo teste da razão.

c) Comparando com a série $\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+\sqrt{n}}{(n+1)^3 - 1}}{\frac{1}{n^{5/2}}} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{2+\sqrt{n}}{(n+1)^3 - 1} \right\} n^{5/2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2} + n^3}{(n+1)^3 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2} + n^3}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} \left\{ \frac{2/\sqrt{n} + 1}{1 + 3/n + 3/n^2} \right\} = 1 > 0$$

e desde que a série $\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ é uma série convergente (série $p = 5/2 > 1$), a série dada converge pelo teste da comparação do limite.

d) Para $n \geq 1$ temos que $\sqrt{n} \leq n$ e $n^3 < n^3 + 1 \Rightarrow \frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3} \Rightarrow \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^3+1} \leq \frac{n\ln(n)}{n^3} = \frac{\ln(n)}{n^2}$, ou seja , $\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^3+1} \leq \frac{\ln(n)}{n^2}, \forall n \geq 1$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge pelo teste da integral segue da última desigualdade que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ \ln(n)}{n^3 + 1}$ converge pelo teste da comparação.

4. **a)** Mostre que $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

Solução. Temos que:

$\ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln\left(\left[\frac{k-1}{k}\right]\left[\frac{k+1}{k}\right]\right) = \ln\left[\frac{k-1}{k}\right] + \ln\left[\frac{k+1}{k}\right] = \ln\left[\frac{k-1}{k}\right] - \ln\left[\frac{k}{k+1}\right]$

Logo, $S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left[\frac{k-1}{k}\right] - \ln\left[\frac{k}{k+1}\right]\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Portanto a série estudada é uma série telescópica e tem como soma $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right] = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Use o Teste da Integral para determinar se a série $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ é convergente ou divergente.

Solução. Vamos aplicar o teste da integral para a função $f(x) = xe^{-x}$ com $x \geq 1$. Temos que $f'(x) = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x) < 0$ para todo $x > 1$, portanto f é decrescente. Além disso, temos que f é contínua e positiva em $[1, +\infty)$, logo podemos aplicar o teste da integral.

$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t (xe^{-x})\, dx \overset{\text{Integração por partes}}{=} \lim_{t\to+\infty} [-xe^{-x} - e^{-x})|_1^t = \lim_{t\to+\infty} ((-t)/e^t - 1/t + 2/e) =$

$2/e < \infty$ é portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ é convergente.