1ª Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral C

Professor: Edivaldo L. dos Santos **17/08/07**

1. Liste os cinco primeiros termos da seqüência de termo geral:

   a. $a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^3}$ **b.** $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$ **c.** $a_n = \frac{3(-1)^n}{n!}$

   d. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2.4.6...(2n)}$ **e.** $a_n = \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})$ **f.** $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$

   g. $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$ **h.** $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ **i.** $a_n = \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

2. Encontre uma fórmula para o termo geral da seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, supondo que o padrão dos primeiros termos se repita:

   a. $(2, 7, 12, 17, \ldots)$ **b.** $(-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots)$ **c.** $(1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots)$

   d. $(1, \frac{1.2}{2.2}, \frac{1.2.3}{3.3.3}, \frac{1.2.3.4}{4.4.4.4}, \ldots)$ **e.** $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ **f.** $(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \ldots)$

3. Calcule, caso exista, $\lim_{n\to+\infty} a_n$, onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a seqüência de termo geral:

   a. $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$ **b.** $a_n = n\operatorname{sen}(\frac{1}{n})$ **c.** $a_n = \frac{2n-7}{3n+2}$ **d.** $a_n = 2 + \cos(n\pi)$

   e. $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ **f.** $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx$ **g.** $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2}dx$ **h.** $a_n = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n)$

   i. $a_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+9}}$ **j.** $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$ **k.** $a_n = \frac{5n}{e^{2n}}$ **l.** $a_n = 8 - \left(\frac{7}{8}\right)^n$

   m. $a_n = \sqrt[n]{n}$ **n.** $a_n = n\operatorname{tg}(\frac{1}{n})$ **o.** $a_n = \left[\frac{n+2}{n+1}\right]^n$ **p.** $a_n = n\left[1 - \cos(\frac{1}{n})\right]$

   q. $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ **r.** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **s.** $s_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ **t.** $s_n = \sum_{k=0}^{n} t^k$, $0 < |t| < 1$

   Obs. No item (**f**), α é um número real fixado.

4. Determine se a seqüência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o seu limite.

   a. $a_n = n(n-1)$ **b.** $a_n = \frac{n!}{(n+2)!}$ **c.** $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ **d.** $a_n = \frac{n}{1+\sqrt{n}}$

   e. $a_n = \frac{3+(-1)^n}{n^2}$ **f.** $a_n = (-1)^n\operatorname{sen}(1/n)$ **g.** $a_n = \frac{\ln(2+e^n)}{3n}$ **h.** $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$

   i. $a_n = (1+3n)^{1/n}$ **j.** $a_n = \frac{\ln(n^2)}{n}$ **k.** $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ **l.** $a_n = \frac{\cos^2(n)}{2^n}$

   m. $a_n = \frac{n\cos(n)}{n^2+1}$ **n.** $a_n = \frac{n!}{2^n}$ **o.** $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$ **p.** $a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2}$

5. Discuta a convergência da seqüência de termo geral $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

6. Considere a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por: $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $\forall n \geq 1$.

   a) Liste os quatro primeiros termos dessa seqüência.

   b) Mostre que essa seqüência é crescente e limitada superiormente e conclua que existe $\lim_{n\to\infty} a_n$.

   c) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

7. Verifique que a seqüência $(\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots)$ é crescente e limitada superiormente por $b = 2$ e calule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

8. Em cada caso, verifique se a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente (ou decrescente) e se é limitada superiormente (ou inferiormente). $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge? Em caso afirmativo, calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

   a) $a_n = \frac{\ln(n+2)}{n+2}$ **b)** $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ **c)** $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ **d)** $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$

9. Considere a seqüência $a_1 = 1, a_2 = 3^{\frac{1}{2}}, a_3 = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}, \cdots, a_n = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}, \cdots$. Mostre que a seqüência é crescente e limitada superiormente. Conclua que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

10. **a)** Fibonacci colocou o seguinte problema: suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par de recém-nascidos, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês? Mostre que a resposta é a_n, onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a seqüência de Fibonacci.

    b) Seja $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Mostre que $b_{n-1} = 1 + \frac{1}{b_{n-2}}$. Assumindo que (b_n) é convergente, encontre seu limite.

11. **a)** Mostre que se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma seqüência convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

    b) Uma seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida por: $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{1}{(1+a_n)}$, para $n \geq 1$. Assumindo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, encontre o seu limite.

12. Mostre que a seqüência definida recursivamente por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$ é decrescente e satisfaz $0 < a_n \leq 2$, $\forall n \geq 1$. Deduza que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e encontre seu limite.

13. Mostre que a seqüência definida recursivamente por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$ é crescente e $a_n < 3$, $\forall n \geq 1$. Deduza que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e encontre seu limite.

14. Mostre que a seqüência de termo geral $a_n = \displaystyle\int_1^n \frac{[\mathrm{sen}(x)]^2}{x^2} dx$ é convergente.

15. Calcule $\lim_{n\to\infty} s_n$, onde $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

Obs. Se for preciso, use os seguintes limites fundamentais:

1. $\lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$ **2.** $\lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{sen}(y)}{y} = 1$ **3.** $\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(y)}{y} = 0.$