2ª Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral C

Professor: Edivaldo L. dos Santos **23/08/07**

1. Calcule a soma da série:

   a. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ **b.** $\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}$ **c.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ **d.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)^2}$

2. Lembrando que $\ln(1+\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x}dx$, mostre que para $0<\alpha\leq 1$, tem-se

   a. $\ln(1+\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\alpha^k}{k}$ **b.** $\left|\ln(1+\alpha)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\alpha^k}{k}\right|\leq\frac{\alpha^{k+1}}{k+1}$

A série geométrica e o teste da divergência

3. Verifique se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule a sua soma.

   a. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **c.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^{n-1}}{5^{n-1}}$

   d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$ **e.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{2n}}$ **f.** $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}8^{n+1}$

   g. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n}$ **h.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+5}$ **i.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}$

   j. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ **k.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ **l.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$

   m. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+4n+3}$ **n.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$ **o.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{2}{3^{n-1}}\right)$

   p. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5+2^{-n}}$ **q.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **r.** $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}(n)$

   Obs. Lembre-se que $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n+\cdots$ converge para $|r|<1$ e tem soma $S=\frac{a}{1-r}$. Observe ainda que $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=a+\sum_{n=1}^{\infty}ar^n$ e então a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}ar^n$ converge para $|r|<1$ e tem soma $S_1=S-a=\frac{a}{1-r}-a=\frac{ar}{1-r}$, pois embora um número finito de termos não altere a convergência ou divergência de uma série, a sua soma é alterada pela inclusão ou remoção de um número finito de termos!

4. Determine os valores de x para os quais a série converge:

   a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}(x-4)^n$ **c.** $\sum_{n=0}^{\infty}4^nx^n$

   d. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n}$ **e.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ **f.** $\sum_{n=0}^{\infty}(\operatorname{tg}n)^n$

5. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$, seja uma série convergente, onde $a_n\neq 0$. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ é uma série divergente.

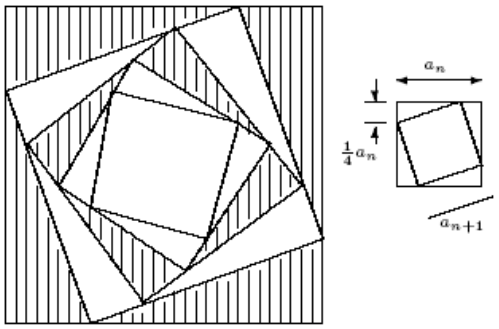
6. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$. Calcule as somas parciais s_1, s_2, s_3 e s_4. Você reconhece os denominadores? Use o padrão para estimar uma fórmula para s_n. Mostre que a série dada é convergente e calcule sua soma.

7. A Figura ao lado mostra alguns termos de uma seqüência de quadrados $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$. Sejam a_n, A_n e P_n o lado, a área e o perímetro do quadrado Q_n, respectivamente. O quadrado Q_{n+1} é construído do quadrado Q_n como mostra a figura.

   (a) Ache uma relação entre a_{n+1} e a_n.

   (b) Encontre a_n, A_n e P_n.

   (c) Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.



Séries Alternadas. Uma série alternada é uma série que tem uma das seguintes formas:
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ ou $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$, onde $a_n > 0$.

8. Teste a série para convergência ou divergência.

a. $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \cdots$	**b.** $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} - \cdots$	**c.** $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \cdots$
d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$	**e.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$	**f.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{4n+1}$
g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{4n^2+1}$	**h.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2+1}$	**i.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2n^2}{4n^2+1}$
j. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$	**k.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$	**l.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\ln n}$
m. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$	**n.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{\frac{3}{4}}}$	**o.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi/2)}{n!}$
p. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{\ln n}}$	**q.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$	**r.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{n!}$

9. Para que valores de p cada série é convergente?

   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ **b.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$ **c.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

O teste da integral

10. Suponha que $f(x)$ seja uma função contínua, positiva e decrescente, para $x \geq 1$ e $a_n = f(n)$. Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades:

$$\int_1^6 f(x)dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

11. Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ **c.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ **d.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ **e.** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ **f.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \cdots$

12. Verifique se a série é convergente ou divergente.

a. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^{1,0001}}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-0,99}$ **c.** $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \ldots$

d. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \ldots$ **e.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2\sqrt{n}}{n^3}$ **f.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ **h.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ **i.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 3n + 1}$ **k.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ **l.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 1}$

m. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{artg\ n}{1 + n^2}$ **n.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ **o.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 2}$

13. Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.

a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ **b.** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n[\ln(\ln\ n)]^p}$ **c.** $\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + n^2)^p$ **d.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

14. Use as seguintes etapas para mostrar que a seqüência de termo geral $t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ possui limite. O valor do limite é denotado por γ e é chamado constante de Euler.

a. Desenhe o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ e interprete (t_n) como uma área para mostrar que $t_n > 0$ para todo n.

b. Interprete $t_n - t_{n+1} = [\ln(n+1) - \ln n] - \frac{1}{n+1}$ como uma diferença de áreas para mostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Portanto, (t_n) é uma seqüência decrescente.

c. Use o Teste da Seqüência Monotônica para mostrar que (t_n) é convergente.

Os testes de Comparação

15. Verifique se a série converge ou diverge.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 4}$ **c.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2 + 3^n}$ **d.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ **f.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3^n}{2^n}$ **g.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n2^n}$ **h.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(n)}{n\sqrt{n}}$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ **j.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 - 1}$ **k.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$ **l.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos(n)}{3^n}$

m. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5 + 4}}$ **n.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{arctg}(n)}{n^4}$ **o.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 3^n}$ **p.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{1 + 3^n}$

q. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}}$ **r.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n + n^2}{\sqrt{1 + n^2 + n^6}}$ **s.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7 + n^2}}$ **t.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 7n}{3^n(n^2 + 5n - 1)}$

u. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n}{n^3 + n + 1}$ **v.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **x.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ **z.** $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$