3^{a} Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral C

Professor: Edivaldo L. dos Santos **30/08/07**

O Teste da Razão e o Teste da Raiz

1. Determine $x > 0$ para que a série seja convergente.

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ **c.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1.3.5.\ldots.(2n+1)}$ **d.** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ **e.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ **f.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$

2. Mostre que as séries convergem para todo x.

   a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ **b.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **c.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

   Obs. Mostraremos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

3. Use o teste da razão para verificar se a série converge ou diverge.

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n, \alpha > 0$ **c.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ **d.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$

   e. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$ **f.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ **g.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n!$ **h.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}$

   i. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$ **j.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$ **k.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-10)^n}$ **l.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5.8.11.\ldots.(3n+2)}$

4. Para que valores positivos de k a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$ converge? (Use o teste da razão.)

5. Para quais das seguintes séries o teste da razão é inconclusivo?

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ **c.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

6. Os termos de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ são definidos recursivamente pelas equações: $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n$.

   Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ou diverge.

7. Use o teste da raiz para verificar se a série é convergente ou divergente.

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^n}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{1+8n}\right)^n$ **c.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$

   d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ **e.** $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} + 1)^n$ **f.** $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n$

8. Encontre o erro no seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} 0 &= 0+0+0+\cdots \\ &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 1-1+1-1+1-1+\cdots \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \\ &= 1+0+0+\cdots = 1 \end{aligned}$$

9. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ é divergente. Use este fato para justificar porque a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ diverge.

10. Dê exemplos de duas séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tais que:

    b. ambas as séries divergem e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ diverge.

    c. ambas as séries divergem mas $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ converge.

    Conclusão: Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries divergente, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ pode ser convergente ou divergente.

11. Dê exemplos de duas séries de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tais que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

12. Mostre que se $a_n>0$ e $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

13. Mostre que se $a_n>0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ é convergente.

14. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de termos positivos convergente, é verdade que $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(a_n)$ converge?

15. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série absolutamente convergente, então

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

Folha de respostas - $3^{\underline{a}}$ **Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral C**

Professor: Edivaldo L. dos Santos **30/08/07**

1. a) converge se $0 < x \leq 1$ e diverge se $x > 1$; b) converge se $0 < x < 2$ e diverge se $x \geq 2$; c) converge $\forall x > 0$; d) converge se $0 < x < 1$ e diverge se $x \geq 1$; e) converge $\forall x > 0$; f) converge se $0 < x < e$ e diverge se $x > e$.

2. a) converge $\forall x$; b) converge $\forall x$; c) converge $\forall x$

3. a) converge; b) converge se $0 < \alpha < 1$ e diverge se $\alpha > 1$; c) converge ; d) O teste da razão não se aplica. Mostre que a série converge absolutamente, logo converge!; e) converge; f) converge; g) diverge; h) converge; i) converge; j) converge; k) diverge; l) converge.

4. Para $k = 1$ diverge, para $k \geq 2$ converge.

5. Os itens a) e c) são inconclusivos pelo teste da razão e b) diverge.

6. Diverge

7. a) converge; b) converge; c) converge; d) converge; e) diverge; f) converge.