4ª Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral C

Professor: Edivaldo L. dos Santos **24/09/07**

1. Determine o domínio da função $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, onde (f_n) é a seqüência de funções:

   a. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$ **b.** $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ **c.** $f_n(x) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{nx}$

   d. $f_n(x) = \dfrac{n}{1+nx^2}$ **e.** $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1+nx^2}{n}}$ **f.** $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x^2}$

2. Mostre que a seqüência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \frac{1}{n}\ \text{sen(nx + n)}$ converge uniformemente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Mostre que a seqüência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = n\ \text{sen}\left(\frac{\text{x}}{\text{n}}\right)$ converge pontualmente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, mas a convergência não é uniforme.

4. Seja $f(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}$.

   a. Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ e $\displaystyle\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx$.

   b. Verifique que a seqüência de funçoes (f_n), onde $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ não converge uniformemente para a função $f(x)$ em $[0,1]$.

5. Mostre que a seqüência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ converge pontualmente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$, porém $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{nx}{nx^2+1}$. Mostre que a seqüência (f_n) não converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$.

7. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge uniformemente em todo intervalo da forma $[-r, r]$, onde $r > 0$ é um número real fixado.

8. Mostre que a função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{x^2+n^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

9. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen(nx)}}{n^3}$. Mostre que $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

10. Verifique a convergência uniforme da série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) + \text{ sen(nx)}}{n^2}$.

11. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{ sen}\left(\frac{\text{x}}{\text{n}^2}\right)$. Justifique a igualdade:

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right], \forall x \in [0,1].$$

12. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$. Mostre que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{n^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^4}\right)\right]$ converge e tem por soma $\int_0^1 f(x)dx$.

13. Considere a função $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$.

    (a) Qual o domínio de f?

    (b) Mostre que f e contínua.

    (c) Justifique a igualdade: $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^4}$.

    (d) Mostre que para todo x no domínio de f: $\frac{d}{dx}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}$.

Respostas dos exercícios

(1a) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + x^2}$. Logo, a função f é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Assim, Dom(f) $= \mathbb{R}$.

Observe que:

(1b) $f(x) = 0, \forall x$ **(1c)** $f(x) = e^x$ **(1d)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **(1e)** $f(x) = |x|$ **(1f)** $f(x) = x$

Assim,

(1b) Dom(f) $= \mathbb{R}$ **(1c)** Dom(f) $= \mathbb{R}$ **(1d)** Dom(f) $= \mathbb{R} - \{0\}$ **(1e)** Dom(f) $= \mathbb{R}$
(1f) Dom(f) $= \mathbb{R}$

(13a) Dom(f) $= [-1, 1]$.