**5ª Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral C**

Professor: Edivaldo L. dos Santos **24/09/07**

1. As funções $J_0$ e $J_1$ definidas pelas séries:

   **a.** $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ **b.** $J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}$

   são chamadas funções de Bessel do primeiro tipo de ordem zero e um, respectivamente. Determine o domínio de $J_0$ e $J_1$.

2. Identifique $x_0$ e $c_n$ e determine o raio e o intervalo de convergência da série dada.

   **a.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n4^n x^n$ **c.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}$ **d.** $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}(x-1)^n$

   **e.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ **f.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^n}{n+3}$ **g.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$ **h.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{[\ln(n)]^n}$

   **i.** $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x+3)^n}{n\ln(n)}$ **j.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n$ **k.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+2)^n}{n2^n}$ **l.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n+3)}x^n$

3. Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência das séries:

   **a.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}x^n$

4. Identifique $c_n$ e $x_0$ na série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ e use o teste da raiz para mostrar que o seu intervalo de convergência é $[-3, 1)$.

5. Mostre que o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(n+1)}$ é $[1, 3]$

6. Mostre que o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{1}{n}\right]^{\frac{n}{2}} x^n$ é $(-1, 1)$.

7. Mostre que o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)(x-e)^n}{ne^n}$ é $[0, 2e)$.

8. Suponha que a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge se $x = -4$ e diverge se $x = 6$. O que se pode dizer sobre a convergência ou divergência das seguintes séries:

   **a.** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ **b.** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$ **c.** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ **d.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n 9^n$

9. Mostre que se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$, então o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é $R = 1/c$.

10. Suponha que o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seja $R$. Qual é o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$?

11. Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e seja $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = c$. Mostre que:

    (a) Se $c = 0$ então o raio de convergência da série é $R = \infty$.

    (b) Se $c = \infty$ então o raio de convergência da série é $R = 0$.

    (c) Se $0 < c < \infty$ então o raio de convergência da série é $R = 1/c$.

## Respostas dos exercícios

($1a$) e ($1b$) Ambas as séries convergem $\forall x \in \mathbb{R}$, portanto o domínio de $J_0$ e $J_1$ é $\mathbb{R}$.

(2a) $I = [-1, 1)$ e $R = 1$; (2b) $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ e $R = \frac{1}{4}$; (2c) $I = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ e $R = \frac{1}{3}$.

(2d) $I = (0, 2)$ e $R = 1$; (2e) $I = (-\infty, \infty)$ e $R = \infty$; (2f) $I = [\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ e $R = \frac{1}{2}$.

(2g) $I = [-2, 0]$ e $R = 1$; (2h) $I = (-\infty, \infty)$ e $R = \infty$; (2i) $I = (-2, -1]$ e $R = \frac{1}{2}$.

(2j) $I = (-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]$ e $R = \frac{1}{2}$; (2k) $I = (-4, 0]$ e $R = 2$; (2l) $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $R = \frac{1}{2}$.

(3a) $I = (-\infty, \infty)$ e $R = \infty$; (3b) $I = (-1, 1)$ e $R = 1$.

(8a) A série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge se $x = 1$, logo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge.

(8b) A série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge se $x = 8$, logo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$ diverge.

(8c) A série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge se $x = -3$, logo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$ converge.

(8d) A série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge se $x = -9$, logo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-9)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$ diverge.

(10) O raio de covergência é $\sqrt{R}$.