6ª Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral C

Professor: Edivaldo L. dos Santos **24/09/07**

1. Encontre uma representação em série de potências da função $f(x)$ e determine o raio e intervalo de convergência da série obtida.

   a. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$ **b.** $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$ **c.** $f(x) = \dfrac{x}{4x+1}$ **d.** $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

   e. $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ **f.** $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ **g.** $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ **h.** $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

2. Encontre uma representação em série de potências da função $f(x)$ e determine o raio e intervalo de convergência da série obtida.

   a. $f(x) = \arctan(2x)$ **b.** $f(x) = x\ln(1+x)$ **c.** $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$ **d.** $\ln(3+x)$

3. Expresse a função como uma série de potências usando primeiro frações parciais. Encontre o intervalo de convergência.

   a. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$ **b.** $f(x) = \dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

4. Avalie a integral indefinida como uma série de potências.

   a. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^5}dx$ **b.** $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{x}dx$

5. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Encontre os intervalos de convergência para f, f' e f''.

6. Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, |x|<1$ **b.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n}, |x|<1$ **c.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

   Exemplo: solução do item (a)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] = -\frac{1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}, |x|<1$$

7. **(a)** Encontre a série de potências que representa a função $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$.

   (b) Use o item (a) para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

   Sugestão: Use a sére de Maclaurin: $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

8. Utilizando a série de potências conveniente, mostre que:

   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4$ **b.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = 2e-3$

9. Avalie a integral $\int_0^x e^{-t^2} dt$ como uma série infinita.

   Sugestão: Substitua x por $-x^2$ na sére de Maclaurin: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

10. Use as derivadas sucessivas para encontrar a série de Taylor de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ em torno de $x_0 = -4$ (potências de $(x + 4)$).

11. Mostre que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ representa a função $f(x) = e^x$, provando que o resto da série de Taylor tende a zero, se $n \to \infty$.

12. Use a representação em série de potências em torno de $x_0 = 0$ da função $f(x) = x^2 \,\mathrm{sen(x)}$ para determinar $f^{(40)}(0)$ e $f^{(51)}(0)$.

    Sugestão: Multiplique a série de Maclaurin $\mathrm{sen(x)} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{x}^{2\mathrm{n}+1}}{(2\mathrm{n}+1)!}$ por x^2.

13. Usando as séries de potências convenientes mostre que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

14. Encontre a serie de Maclaurin da função $f(x)$ e determine o seu raio de convergência:

    a. $f(x) = \cos(\pi x)$ **b.** $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ **c.** $f(x) = [\cos(x)]^2$ **d.** $x \arctan(x)$

15. Encontre a soma da série:

    a. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$ **b.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$ **c.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

    d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$ **e.** $3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \cdots$ **f.** $1 - \ln(2) + \frac{(\ln(2))^2}{2!} - \frac{(\ln(2))^3}{3!} + \cdots$

16. Avalie a integral $\int \frac{\mathrm{sen(x)}}{x} dx$ como uma série infinita.

    Sugestão: Multiplique a série de Maclaurin $\mathrm{sen(x)} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{x}^{2\mathrm{n}+1}}{(2\mathrm{n}+1)!}$ por $\frac{1}{x}$ e integre termo a termo.