Álgebra Linear 1

$2^a$ Lista de Exercícios

Profº Edivaldo Lopes dos Santos 29 de agosto de 2006

---

(1) Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o conjunto $V$ com as operações indicadas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, com as operações usuais de $M(2 \times 2)$.

(b) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 0\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^2$.

(c) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, com as operações usuais de funções.

(d) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = x; z = w^2\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^4$.

(2) Dados os espaços vetoriais $V_1, V_2$, considere o conjunto $V = V_1 \times V_2$ (produto cartesiano de $V_1$ por $V_2$), cujos elementos são os pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Defina operações que tornem $V$ um espaço vetorial.

(3) Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto $W$ é um subespaço do espaço vetorial $V$.

(a) $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x, x, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(b) $V = P_n(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p(0) = p(1)\}$.

(c) $V = M(n \times n)$ e $W = \{A \in M(n \times n) : BA = 0\}$, sendo $B \in M(n \times n)$ dada.

(d) $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} c_j x_j = 0 \right\}$, sendo $c_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ dados.

(e) $V = P_n(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

(4) Diga, em cada um dos itens abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se $W$ é subespaço vetorial de $V$ e $u, v \in V$ são tais que $u \notin W$ e $v \notin W$, então $u + v \notin W$.

(b) Se $W$ é subespaço vetorial de $V$, $u \in V$ e $\alpha \neq 0$ são tais que $u \notin W$, então $\alpha u \notin W$.

(c) Sejam $W_1$ e $W_2$ subespaços de um espaço vetorial $V$. $W_1 \cup W_2$ é subespaço de $V$ se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

(5) Em cada um dos itens abaixo, encontre os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde $U$ e $W$ são subespaços do espaço vetorial $V$ indicado.

(a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$; $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$; $V = \mathbb{R}^2$.

(b) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M(2 \times 2) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$; $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M(2 \times 2) : c, d \in \mathbb{R} \right\}$; $V = M(2 \times 2)$.

(c) $U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$; $W = \{q \in P_3(\mathbb{R}) : q'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$; $V = P_3(\mathbb{R})$.

(6) Prove que o conjunto $S$ das matrizes simétricas e o conjunto $A$ das matrizes anti-simétricas $n \times n$ são subespaços vetoriais de $M(n \times n)$ e que $M(n \times n) = S \oplus A$. Obtenha uma base para $S$ e também uma base para $A$.

(7) Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções definidas em $\mathbb{R}$ e que tomam valores em $\mathbb{R}$. Fixada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que o conjunto $F$ de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(g(x)) = f(x)$ é um subespaço vetorial de $E$. Para qual função $g$ tem-se $F =$ conjunto das funções periódicas de período $a$? E se fosse $g(f(x)) = f(x)$? Ou $f(g(x)) = g(x)$?

(8) Seja $V = F_1 \oplus F_2 = G_1 \oplus G_2$. Se $F_1 \subset G_1$ e $F_2 \subset G_2$, prove que $F_1 = G_1$ e $F_2 = G_2$.

(9) Sejam $E, F$ espaços vetoriais. Uma função $f : E \to F$ chama-se *par* (respectivamente, *ímpar*) quando $f(-v) = f(v)$ (respectivamente, $f(-v) = -f(v)$) para todo $v \in E$. Prove:

(a) O conjunto $A$ das funções pares e o conjunto $B$ das funções ímpares são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(E; F)$ e vale $\mathcal{F}(E; F) = A \oplus B$.

(b) Além dos conjuntos $A$, dos polinômios pares e $B$, dos polinômios ímpares, considere também o conjunto $A'$ dos polinômios da forma $p(x) = \sum a_i x^{2i}$ que só contêm expoentes pares e o conjunto $B'$ dos polinômios da forma $q(x) = \sum a_i x^{2i+1}$, que só contêm expoentes ímpares. Prove que $A'$ e $B'$ são subespaços vetoriais de espaço $\mathcal{P}$ de todos os polinômios, que $A' \subset A$, $B' \subset B$ e $\mathcal{P} = A' \oplus B'$. Conclua que $A = A'$ e $B = B'$.

(10) Assinale $V$ ou $F$ quanto à validez das afirmação: "a união de dois subconjuntos L.I. do espaço vetorial $V$ é ainda um conjunto L.I.".

(a) Sempre.

(b) Nunca.

(c) Quando um deles é disjunto do outro.

(d) Quando um deles é parte do outro.

(e) Quando um deles é disjunto do subespaço gerado pelo outro.

(f) Quando o número de elementos de um deles mais o número de elementos do outro é igual à dimensão de $E$.

(11) Para cada um dos conjuntos $S \subset V$, onde $V$ é o espaço vetorial indicado, encontre o subespaço $[S]$ gerado por $S$.

(a) $S = \{(1, 0), (2, -1)\}$; $V = \mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$; $V = \mathbb{R}^3$.

(c) $S = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$; $V = P_3(\mathbb{R})$.

(d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$; $V = M(2 \times 2)$.

(12) Em cada um dos itens abaixo encontre um conjunto finito $S$ que gera o subespaço $W$ do espaço vetorial $V$. Determine então a dimensão de $W$.

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$.

(b) $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$; $V = P_3(\mathbb{R})$.

(c) $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(0) = p(1) = 0\}$; $V = P_3(\mathbb{R})$.

(13) Verifique, em cada um dos itens a seguir, se o subconjunto $S$ do espaço vetorial $V$ é L.I. ou L.D.

(a) $S = \{(1, 2), (-3, 1)\}$; $V = \mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{1 + t - t^2, 2 + 5t - 9t^2\}$; $V = P_2(\mathbb{R})$.

(c) $S = \{(1, 2, 2, -3), (-1, 4, -2, 0)\}$; $V = \mathbb{R}^4$.

(d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$; $V = M(3 \times 3)$.

(14) Prove que as o conjunto $L \subset M(n \times n)$ das matrizes triangulares inferiores é um subespaço vetorial, obtenha uma base para $L$ e determine sua dimensão.

(15) Prove que $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ é um conjunto L.I. no espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. (*Sugestão:* dada uma combinação linear nula, derive-a, depois divida por $e^x$ e prossiga.)

(16) Se os vetores $v_1, \ldots, v_m$ são L.I., o mesmo se dá com os vetores $v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1$. Vale a recíproca?

(17) Exiba uma base para cada um dos espaços vetoriais abaixo e então calcule sua dimensão.

(a) polinômios pares de grau $\leqslant n$.

(b) polinômios ímpares de grau $\leqslant n$.

(c) polinômios de grau $\leqslant n$ que se anulam para $x = 2$ e $x = 3$.

(d) vetores de $\mathbb{R}^n (n \geqslant 6)$ nos quais a segunda, a quarta e a sexta coordenadas são iguais.

(e) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \text{ e } x + 2y + t = 0\}$

(f) $W = \{X \in M(2 \times 2) : AX = X\}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.