Álgebra Linear I

Quinta Lista de Exercícios

Prof. Edivaldo L. dos Santos 13 de novembro de 2006

---

1. Determine as matrizes das transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

   (a) $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2),\ F(x,y,z) = (x+y, z)$ (b)$F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3),\ F(x,y) = (x+y, x, x-y)$

   (c) $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3),\ T(x) = (x, 4x, -3x)$ (d)$T \in L(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R})),\ T(p(x)) = p'(x)$

   (e) $F \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}),\ F(x,y,z,w) = 2x + y - z + 3w.$

   (f) $T \in L(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3),\ T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (a_0 + 2a_2, a_1 - 3a_0, a_2).$

2. Considere $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Deternine a matriz do operador linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por $T(X) = MX - XM$, $X \in M_2(\mathbb{R})$ em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$.

3. Sejam F e G operadores lineares do $\mathbb{R}^3$, com $F(x,y,z) = (x, 2y, y-z)$. Sabendo que a matriz de $(2F - G)$ em relação à base canônica é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz de G em relação à base canônica, e também $G(x,y,z)$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base $B = \{(1,0),(1,4)$ é $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Determine a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

5. Verifique se os operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ abaixo são isomorfismos e em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso.

(a) $T(x,y,z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$

(a) $T(x,y,z) = (x, x - y, 2x + y - z)$

6. Considere o operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0,0) = (1,1,1),\ T(0,0,1) = (1,0,1),\ T(0,1,2)(0,0,4)$$

   Verifique se T é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso.

7. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se os espaços vetoriais U e V são isomorfos, justificando a resposta:

(a) $U = M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad V = \{p \in P_4(\mathbb{R}); p'(t) = 0\}.$

(a) $U = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{p \in P_3(\mathbb{R}); p'(t) = 0\}.$

(a) $U = \mathbb{R}^2, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.

(a) $U = \mathbb{R}^3, \quad V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\}; A^t = A\}$.

8. Ache o polinômio característico, os subespaços próprios de $T : \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^n$, definido por $T(X) = AX$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, nos seguintes caso: (Analise também se T é diagonalizável.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Encontre os autovalores e os autovetores dos operadores lineares abaixo:

   (a) $T(x, y) = (x, ky)$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante fixa.

   (b) $T(x, y) = (-x, y)$.

   (c) $T(x, y, z) = (3x, 2y - 5z, y - 2z)$.

   (d) $T(x, y, z) = (z, y, x)$.

   (e) $T(x, y, z, w) = (2x + y, 2y, z + w, -2z + 4w)$.

   (f) O operador de derivação $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$.

10. (a) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determine os autovalores e autovetores de A. Determine uma base para cada um dos autoespaços. Verifique se A é diagonalizável.

    (b) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Determine os autovalores e autovetores de A. Determine uma base para cada um dos autoespaços. Verifique se A é diagonalizável.

11. Encontre uma matriz diagonal semelhante à matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

12. Mostre que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é semelhante a uma matriz diagonal se $a \neq 0$.

13. Verifique que a matriz abaixo não é diagonalizável, para qualquer $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$