# Álgebra Linear I

## Sexta Lista de Exercícios

Prof Edivaldo Lopes dos Santos 28 de novembro de 2006

---

(1) Verifique em cada um dos casos abaixo se $\langle u, v\rangle$ define um produto interno no espaço vetorial $V$ dado.

(a) $\langle u, v\rangle = 2xx' - xy' - x'y + 2yy'$, sendo $u = (x, y), v = (x', y') \in V = \mathbb{R}^2$.

(b) $\langle u, v\rangle = \dfrac{xx'}{a^2} + \dfrac{yy'}{b^2}$, sendo $u = (x, y), v = (x', y') \in V = \mathbb{R}^2$ e $a, b \in \mathbb{R}$ fixos e não nulos.

(c) $\langle f, g\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, sendo $f(t) = a_0 + a_1t + +a_2t^2$, $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 \in V = P_2(\mathbb{R})$.

(d) $\langle A, B\rangle = tr(B^tA)$, onde $A, B \in V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e, para $A = (a_{ij})$, $tr(A) = a_{11} + a_{22}$ é o *traço* da matriz $A$.

(2) Dado o produto interno $\langle u, v\rangle$ no espaço vetorial $V$, prove que

(a) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$, para quaisquer $u, v \in V$.

(b) $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v\rangle$, para quaisquer $u, v \in V$.

(3) (a) No espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$, considere o produto interno dado no exercício 1, item (d). Calcule $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ e $d(A, B)$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno usual, determine $\langle u, v\rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$, $d(u, v)$, $\dfrac{u + v}{\|u + v\|}$ e o ângulo entre $u$ e $v$, sendo $u = (1, 2, 0, 1)$ e $v = (3, 1, 4, 2)$.

(4) Determine a norma de cada um dos seguintes elementos:

(a) $u = (3, 1, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$, em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^4$.

(b) $f(t) = t^2 + t - 1$, em relação ao produto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ sobre $P_2(\mathbb{R})$.

(5) Considere o $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determine $a \in \mathbb{R}$ no vetor $u = (6, a, -1)$ de maneira que $\|u\| = \sqrt{41}$.

(6) Sejam $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 1, 2)$ no $\mathbb{R}^3$. Considerando neste espaço o produto interno usual, determine os vetores $w \in \mathbb{R}^3$ tais que $\|w\| = 1$ e $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$.

(7) Encontre a distância de $u$ a $v$ e o cosseno do ângulo entre $u$ e $v$ nos seguintes casos:

(a) $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual.

(b) $u = 1 + t - t^2$, $v = 3t^2 \in P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno considerado em (4)(b).

(c) $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, com o produto definido em (1)(d).

(8) Sejam $u$ e $v$ vetores de um espaço euclidiano tais que $\|v\| = 1$, $\|u\| = 1$ e $\|u - v\| = -2$. Determine $\langle u, v\rangle$.

(9) Sejam $u, v$ vetores de um espaço euclidiano. Sendo $\|u\| = 3$ e $\|v\| = 5$, determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\langle u + \alpha v, u - \alpha v\rangle = 0$.

(10) Em cada um dos casos abaixo, determine se o conjunto $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ é ortonormal, apenas ortogonal ou nenhum dos dois.

(a) $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 2)$.

(b) $u = \frac{1}{7}(2, 6, 3)$, $v = \frac{1}{7}(3, -2, 6)$, $w = \frac{1}{7}(6, -3, 2)$.

(11) Determine a base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ obtida pelo processo de Gram-Schmidt a partir da base $\{u, v, w\}$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $u = (2, 6, 3)$, $v = (-5, 6, 24)$, $w = (9, -1, -4)$

(b) $u = (3, 4, 12)$, $v = (7, -8, 15)$, $w = (-15, 6, 44)$

(12) (a) Determine a base ortonormal de $P_2(R)$ obtida pelo processo de Gram-Schmidt a partir da base $\{1, 1 + t, t^2\}$, onde o produto interno em $P_2(R)$ é dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

(b) Seja $V = M_2(R)$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$. Use o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonomal de $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(13) Em cada um dos casos abaixo determine os valores de $m$ para os quais $u$ e $v$ são ortogonais em $V$.

(a) $u = (1, m + 1, m)$, $v = (m - 1, m, m + 1)$ em $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno usual.

(b) $u(t) = mt^2 - 1$, $v(t) = t$ em $V = P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno em (4)(b).

(14) Em $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual, determine todos os vetores de norma igual a 2 que sejam ortogonais simultaneamente a $(2, 1, 2)$ e $(-1, 3, 4)$.

(15) Determine uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual:

(a) $V^\perp$, onde $V = [(1, 0, 1, 1), (1, 1, 2, 0)]$.

(b) $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 3, 4)]$.

(c) $W$ e $W^\perp$, onde $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } 2x - y + z = 0\}$.

(16) Determine a projeção ortogonal do vetor $v \in V$ sobre o subespaço $W$ de $V$ em cada um dos casos abaixo.

(a) $v = (1, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$, $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z = 0 \text{ e } z - 2w = 0\}$, com o produto interno usual.

(b) $v = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$, $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$, com o produto interno usual.

(c) $v(t) = 2t - 1 \in P_2(\mathbb{R})$, $W = [t]$, com o produto interno em (4)(b).

(17) Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$ : $u = (2, 2, 2)$, $v = (3, 3, 1)$. Determine dois vetores $v_1$ e $v_2$ tais que $v = v_1 + v_2$; $v_1$ é ortogonal a $u$ e $v_2 = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(18) Em cada um dos casos abaixo, verifique se o operador $T \in L(\mathbb{R}^3)$ é auto-adjunto, sabendo que a matriz de $T$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é a seguinte:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(19) Seja $V$ um espaço vetorial euclidiano e $W \subset V$ um subespaço. Para cada $v \in V$, considere $v = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$.

(a) Mostre que $T : V \to V$ dada por $T(v) = w_1 - w_2$ é um operador linear auto-adjunto.

(b) Se $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, e $W = [(1, 1, 0)]$, ache a matriz de $T$ relativa à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

(20) Seja $T$ um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano $V$. Mostre que, se $\langle T(u), u\rangle = 0$, para todo $u \in V$, então $T = 0$.

(21) Sejam $V$ um espaço euclidiano e $T, S \in L(V)$ operadores auto-adjuntos. Prove que $T \circ S$ é auto-adjunto se, e somente se, $T \circ S = S \circ T$.

(22) Seja $T \in L(V)$ um automorfismo. Mostre que se $T$ é auto-adjunto, então $T^{-1}$ também é auto-adjunto.

(22) Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores de $R^2$. Quais das seguintes funções são formas bilineares:

(a) $f(u, v) = x_1 y_1$ (b) $f(u, v) = x_1 y_2$ (c) $f(u, v) = x_1(y_1 + y_2)$
(d) $f(u, v) = 1$ (e) $f(u, v) = x_1^2 + x_2 y_1$ (f) $f(u, v) = x_1 y_2 - x_2 y_1$

(23) Calcule a matriz das formas bilineares que aparecem no exerc'icio anterior em relação à base canônica.

(24) Seja a forma bilinear de $R^2$ dada por $f(u, v) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2$. Calcular sua matriz em relação as seguintes bases:

(a) $\{(1, 1), (1, -1)\}$ (b) $\{(2, 1), (1, 2)\}$ (c)$\{(2, 3), (4, 1)\}$

(25) Reduzir à forma diagonal pelo processo de Gauss as seguintes formas quadrt́icas de $R^2$.

(a) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$ (b) ${x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1 x_2$ (c) ${x_1}^2 - {x_2}^2 - 2x_1 x_2$
(d) $4x_1 x_2 + {x_2}^2$ (e) $4x_1 x_2$

(26) Seja a forma quadrática $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1 x_2 + cx_2^2$, $a \neq 0$. Reduza- a à forma diagonal.