1a. Prova de Cálculo Diferencial e Integral C - Turma A - P1 - Gabarito

Professor: Edivaldo L. dos Santos

Nome: _____

Assinatura: _____

RA : _____ Data: 26/09/2007

Questões	Valor	Notas
1ª	2.0	
2ª	2.0	
3ª	2.0	
4ª	2.0	
Total	8.0	

Justifique todas as suas respostas.

1. Mostre que a seqüência definida recursivamente por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$ é decrescente e satisfaz $0 < a_n \leq 2$, $\forall n \geq 1$. Deduza que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e encontre seu limite.

   Solução. Como no exercício 6 da 1ª lista de exercícios, mostramos por indução que (a_n) é decrescente e satisfaz $0 < a_n \leq 2$, $\forall n \geq 1$ (Verifique!). Dessa forma, (a_n) é limitada inferiormente por $a = 0$ e é decrescente, logo (a_n) é convergente. Seja $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ (existe e é finito) e desde que se (a_n) converge $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$, temos

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-a_n} = \frac{1}{3-L} \tag{1}$$

$$L = \frac{1}{3-L} \Leftrightarrow L^2 - 3L + 1 = 0 \Leftrightarrow L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38 \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,6,$$

   porém como $L \leq 2$ segue que $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

2. **a)** Mostre que para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, a série: $\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3(x) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^4(x) + \cdots$ é convergente e calcule a sua soma.

   Solução. Temos que $\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3(x) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^4(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(x)\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\right)^n$ é uma série geométrica com $a = \operatorname{sen}(x)$ e $r = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$ que converge se $|r| = \left|-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\right| < 1 \Leftrightarrow |\operatorname{sen}(x)| < 2$, o que é verdade $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$ e a sua soma é dada por $S = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)} = \frac{2\operatorname{sen}(x)}{2 + \operatorname{sen}(x)}$.

   b) Mostre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$.

   Solução. Temos que $\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.
   Dessa forma,
   $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
   Portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$ é uma série telescópica e tem como soma $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$

3. Em cada caso, verifique se a série converge, converge absolutamente ou diverge.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3^n(n!)^2}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ **d)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{\ln(n)}}$

   Solução:

   a) Convergente. De fato, usando o teste da razão, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 n!}{(n+1)!n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 n!}{(n+1)n!n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^3} = 0 < 1.$$

   b) Divergente. De fato, vamos usar o teste da razão, assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1)+2)!}{3^{n+1}[(n+1)!]^2} \frac{3^n(n!)^2}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)!(n!)^2}{3(n+1)^2(n!)^2(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)(2n+3)}{3(n+1)^2} = \frac{4}{3} > 1.$$

c) Convergente. Sejam $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \lim_{n\to\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \ln e = 1 > 0.$$

Pelo teste da comparação do limite, desde que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge (série $p>1$), concluímos que a série é convergente.

d) Convergente. Temos que $a_n = \frac{1}{[\ln(n)]^{1/3}} > 0, \forall n \geq 2$ e $n < n+1 \Rightarrow \ln(n) < \ln(n+1) \Rightarrow [\ln(n)]^{1/3} < [\ln(n+1)]^{1/3} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{[\ln(n+1)]^{1/3}} < \frac{1}{[\ln(n)]^{1/3}}$.

Assim $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \geq 2$, ou seja, (a_n) é decrescente. Além disso, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[\ln(n)]^{1/3}} = 0$, portanto a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{\ln(n)}}$ converge pelo teste da série alternada.

4. **a)** Determine os valores de p para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^p}$ converge.

Solução. 1º Caso. Temos que para $p \leq 1$ a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^p}$ diverge pelo teste da comparação de limite, pois $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n)}{n^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty}\ln(n) = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ diverge para $p \leq 1$.

2º caso: Considere $p > 1$. A função $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^p}$ é contínua e positva no intervalo $[1,\infty)$. Temos que f é decrescente se $x > e^{1/p}$, pois $f'(x) = \frac{1-p\ln(x)}{x^{p+1}} < 0$ para $x > e^{1/p}$. Asim aplicando o teste da integral temos: $\int_1^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{\ln(x)}{x^p} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}[(1-p)\ln(x)-1]}{(1-p)^2}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^{1-p}[(1-p)\ln(t)-1]}{(1-p)^2}\right] - \left[\frac{1^{1-p}[(1-p)\ln(1)-1]}{(1-p)^2}\right] =$ $\frac{1}{(1-p)^2}\lim_{t\to\infty}\left[t^{1-p}[(1-p)\ln(t)-1]+1\right] = \frac{1}{(1-p)^2}$, pois $1-p<0$. Portanto a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^p}$ converge para $p>1$.

b) Mostre que se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge.

Solução. Vamos aplicar o teste da comparação do limite para as séries $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Temos que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge (série harmônica de ordem 1) segue do teste da comparação do limite que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge.