Folha de respostas - $1^{\underline{a}}$ **Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral C**

Professor: Edivaldo L. dos Santos **22/08/07**

1.

2.

3. a) $1/4$; b) 1; c) $2/3$; d) oscila entre 1 e 3, logo diverge; e) e^2 f) $\frac{1}{\alpha-1}$, se $\alpha > 1$ e ∞, se $\alpha \leq 1$; g) $\pi/2$; h) 0; i) 0 j) 0; k) 0; l) 8; m) 1; n) 1; o) e; p) 0; q) 0 r) 0; s) 2; t) $\frac{1}{1-t}$.

4. a) diverge; b) (a_n) é decrescente e limitada inferiormente por $a = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; c) (a_n) é crescente e limitada superiormente por $b = 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$; d) diverge; e) (a_n) não é monótona, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; f) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; g) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$; h) (a_n) é decrescente e limitada inferiormente por $a = 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$; i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$; j) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; k) (a_n) é decrescente e limitada inferiormente por $a = 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; l) $a_n \to 0$; m) $a_n \to 0$; n) (a_n) diverge para $+\infty$; o) $a_n \to 0$; p) $a_n \to 0$.

5. Mostre que $0 < a_n \leq \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$ e use o teorema do confronto para concluir que $\lim_{n\infty} a_n = 0$.

6. b) (i) (a_n) é crescente: $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$. De fato, mostremos por indução:

   A proposição é válida para $n = 1$.

   $$a_1 = \sqrt{2} \leq a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},$$

   pois $2 < 2 + \sqrt{2}$ e a função raiz $\sqrt{\ }$ é crescente, logo $\sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

   Hipótese de Indução (H.I.). Suponhamos que a propriedade seja válida para $n = k$ e mostremos que é válida para $n = k + 1$.

   H.I.: $a_k \leq a_{k+1}$

   Se $a_k \leq a_{k+1} \Rightarrow 2 + a_k \leq 2 + a_{k+1}$ e como $\sqrt{\ }$ é crescente, temos que $\sqrt{2+a_k} \leq \sqrt{2+a_{k+1}}$, ou seja, $a_{k+1} \leq a_{k+2}$.

   Portanto: $a_{k+1} \leq a_{k+2}$ e assim a propriedade é válida $\forall n \geq 1$, ou seja, $a_n \leq a_{n+1}$ e (a_n) é crescente.

   (ii) Mostremos usando indução finita que (a_n) é limitada superiormente por $b = 2$.

   A propriedade é váliada para $n = 1$, ou seja, $a_1 = \sqrt{2} \leq b = 2$. Suponhamos que a propriedade seja válida para $n = k$, ou seja, $a_k \leq 2$ e mostremos que ela é válida para $n = k + 1$.

   Se $a_k \leq 2 \Rightarrow 2 + a_k \leq 2 + 2 = 4$, e como $\sqrt{\ }$ é crescente, temos $\sqrt{2+ak} \leq \sqrt{4} = 2 \Rightarrow a_{k+1} \leq 2$ e portanto a propriedade é válida $\forall n \geq 1$, isto é, $a_n \leq 2, \forall n \geq 1$ e (a_n) é limitada superiormente por $b = 2$ e é crescente pelo item (i), logo (a_n) é convergente.

   c) Seja $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ (existe e é finito)

   $$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} \overset{\sqrt{\ } \text{ é contínua}}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty} (2 + a_{n-1})} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \tag{1}$$

   e desde que se (a_n) converge $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$, de (1) temos

$$L = \sqrt{2+L} \Rightarrow L^2 = 2 + L \Leftrightarrow L^2 - L - 2 \Leftrightarrow L = -1 \text{ ou } L = 2,$$

porém $L = -1$ é absurdo pois (a_n) é uma seqüência de termos positivos, e deste modo, $\lim_{n\to\infty} a_n = L = 2$.

7. Como no exercício anterior, mostre por indução finita que (a_n) é crescente, limitada superiormente por $b = 2$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

8. a) (a_n) é decrescente, limitada inferiormente por $a = 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   b) (a_n) é decrescente $\forall n \geq 2$, limitada inferiormente por $a = 0$, logo converge e $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2} = 0$.

   c) (a_n) é decrescente, limitada inferiormente por $a = 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   d) (a_n) não é monótona, porém é limitada pois $2 \leq a_n \leq 3,5$, $\forall n \geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 3$, pois $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

9. Verifique que $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$, que (a_n) é monótona crescente, limitada superiormente por $b = 3$ e

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n} = \sqrt{3L} \Rightarrow L = 3,$$

   pois $a_n \geq 1, \forall n \geq 1$.

10. b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (razão áurea).

11. b) $L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

12. Mostre por indução finita que $0 < a_{n+1} \leq a_n \leq 2$ e conclua que $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

13. Mostre por indução finita que $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq 3$, logo (a_n) é crescente e limitada superiormente $b = 3$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

14. Compare $\frac{[\text{sen}(x)]^2}{x^2}$ com a função $\frac{1}{x^2}$ e use o teste de convergência de integrais impróprias para concluir que $a_n = \int_1^n \frac{[\text{sen}(x)]^2}{x^2} dx$ é convergente, ou seja, existe $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{[\text{sen}(x)]^2}{x^2} dx = \int_1^\infty \frac{[\text{sen}(x)]^2}{x^2} dx$

15. $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.