Introdução à geometria

Vol. I

Geometria analítica

Resolução dos exercícios

Fabio Ferrari Ruffino

Sumário

Capítulo 1. Sistemas lineares 5
Seção 1.2.4 5
Seção 1.3.2 7

Capítulo 2. O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ 11
Seção 2.5.3 11
Seção 2.6.6 19
Seção 2.7.5 21
Seção 2.8.5 23
Seção 2.9.4 29
Parte III 34

Capítulo 3. Álgebra das matrizes e aplicações 39
Parte I 39
Parte II 47

Capítulo 4. Geometria em $\mathbb{R}^n$ 71
Parte I 71
Parte II 79

CAPíTULO 1

Sistemas lineares

Seção 1.2.4

Exercício 1.1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 13 \\ -1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -1 & 1 & -\frac{11}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to -II \\ I \leftrightarrow II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 4 & -6 & 13 \\ -3 & -1 & 1 & -\frac{11}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III + 3I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -4 & 14 \\ 0 & -4 & -2 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to \frac{1}{2}II \\ III \to -\frac{1}{4}III \\ II \leftrightarrow III \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right] III \to III - 3II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{4} \end{array}\right].$$

Uma solução: $\left(1, 2, -\frac{1}{2}\right)$.

Exercício 1.2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ IV \to IV + I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Pela quarta equação $y = 0$, portanto só consideramos as demais variáveis.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to -II \\ III \to -\frac{1}{3}III \\ II \leftrightarrow III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Uma solução: $\left(1, 0, -\frac{1}{3}, -1\right)$.

Exercício 1.3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III + 2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

∞^1 soluções: $(-1 - 2t, -t, t)$.

Exercício 1.4.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III + 2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$III \to III - II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

Impossível.

Exercício 1.5.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] II \to II - I \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right].$$

∞^1 soluções: $(-3-3t, 2+2t, t)$.

Exercício 1.6.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - 3I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

$$III \to III - 2II \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

Uma solução: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Exercício 1.7.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III - 3I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

∞^2 soluções: $(1-3t-u, u, t)$.

Exercício 1.8.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 8 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - 4I \\ III \to III - 7I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & -13 & -6 \end{array}\right]$$

$$III \to III - II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{array}\right].$$

Uma solução: $\left(\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right)$.

Exercício 1.9.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 & 14 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 12 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} I \to \frac{1}{2}I \\ II \to \frac{1}{3}II \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 12 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} II \to II - I \\ II \to III - 4I \\ IV \to IV - 5I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 12 & -3 & -7 & -27 \\ 0 & 6 & -3 & -10 & -36 \end{array}\right] \begin{array}{c} III \to III - 12II \\ IV \to IV - 6II \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & 33 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -6 \end{array}\right] III \leftrightarrow IV \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & 33 \end{array}\right]$$

$$IV \to IV - 3III \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 51 \end{array}\right].$$

Uma solução: $(2, 0, 2, 3)$.

Exercício 1.10.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III - I \\ IV \to IV - 3I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

∞^2 soluções: $\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u - \frac{3}{2}t, u, t\right)$.

Seção 1.3.2

Exercício 1.11.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & k & -1 \end{array}\right] II \to II + I \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 \end{array}\right].$$

$k \neq -1$: uma solução; $k = -1$: ∞^1 soluções.

Exercício 1.12.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k-1 & 1 \\ 2 & k & k & k \\ k & 2(k-1) & 2 & 4-k \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III - kI \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k-1 & 1 \\ 0 & k-2 & -k+2 & k-2 \\ 0 & k-2 & 2-k^2+k & 4-2k \end{array}\right] III \to III - II$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k-1 & 1 \\ 0 & k-2 & 2-k & k-2 \\ 0 & 0 & k(2-k) & 6-3k \end{array}\right].$$

I. $k \neq 0, 2$: uma solução.
II. $k = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right].$$

Impossível.
III. $k = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

∞^2 soluções.

Exercício 1.13.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k & k-2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] I \leftrightarrow III \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k & k-2 \\ k & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - kI \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & k-1 & k-1 \\ 0 & 2-2k & 1-k & 1+k \end{array}\right]$$

$$III \to III + (1-k)II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & k(1-k) & k(3-k) \end{array}\right].$$

$k \neq 0, 1$: uma solução; $k = 0$: ∞^1 soluções; $k = 1$: impossível.

Exercício 1.14.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 0 \\ k & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & k \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - kI \\ III \to III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 2-k & 3 \\ 0 & 1-k & -2 & k \end{array}\right]$$

$$II \leftrightarrow III \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1-k & -2 & k \\ 0 & 1-k^2 & 2-k & 3 \end{array}\right]$$

$$III \to III - (1+k)II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 3 \\ 0 & 1-k & -2 & k \\ 0 & 0 & k+4 & -k^2-k+3 \end{array}\right].$$

I. $k \neq 1, -4$: uma solução.
II. $k = -4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right].$$

Impossível.
III. $k = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right] III \to III + \tfrac{5}{2}II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{array}\right].$$

Impossível.

Exercício 1.15.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & k & k+1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} III \to -III \\ I \leftrightarrow III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & k & k+1 \\ k & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - kI \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & k+1 & k+2 \\ 0 & 1+k & 1+k & k+2 \end{array}\right]$$

$$III \to III - (1+k)II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & k+1 & k+2 \\ 0 & 0 & -k(1+k) & -k(k+2) \end{array}\right].$$

$k \neq 0, -1$: uma solução; $k = 0$: ∞^1 soluções; $k = -1$: impossível.

Exercício 1.16.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k & k \end{array}\right] II \to II - I \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 & k-1 \end{array}\right].$$

$k \neq 1$: ∞^1 soluções; $k = 1$: ∞^2 soluções.

Exercício 1.17.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 2 \\ k & k & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - kI \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 2-k \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{array}\right].$$

Pela última linha $k = \pm 1$. Se $k = 1$, pela segunda linha o sistema é impossível. Se $k = -1$, temos uma solução única. Afinal, o sistema admite uma única solução para $k = -1$ e é impossível para $k \neq -1$.

Exercício 1.18.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2k & 2k \\ k & k & 2k & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - kI \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2k-2 & 2k-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{array}\right].$$

Pela última linha $k = 1$, mas, pela segunda, se $k = 1$ o sistema é impossível. Logo, o sistema é impossível para todo k.

Exercício 1.19.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] I \leftrightarrow II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ k & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II + 2I \\ III \to III - kI \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1+2k & 2 \\ 0 & -1 & -1-k^2 & -2-k \end{array}\right] III \to III + II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1+2k & 2 \\ 0 & 0 & k(2-k) & -k \end{array}\right].$$

$k \neq 0, 2$: uma solução; $k = 0$: ∞^1 soluções; $k = 2$: impossível.

Exercício 1.20.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ k & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] I \leftrightarrow II \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ k & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III - kI \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-2k & -3 \\ 0 & 2 & -2-k^2 & 1-k \end{array}\right] III \to III + II$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & -2 & 2-2k & -3 \\ 0 & 0 & -k(k+2) & -(k+2) \end{array}\right].$$

$k \neq 0, -2$: uma solução; $k = -2$: ∞^1 soluções; $k = 0$: impossível.

CAPíTULO 2

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Seção 2.5.3

EXERCÍCIO 2.1. (1) Vetor $(1, 1, -3)$:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \\ -x + 2y = -3. \end{cases}$$

$I+II$: $2x = 2$, logo $x = 1$. II: $y = 0$. III: $-1 = -3$, impossível. O vetor $(1, 1, -3)$ não é combinação linear de $\mathcal{B}$.

Vetor $(5, -1, -8)$:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = -1 \\ -x + 2y = -8. \end{cases}$$

$I+II$: $2x = 4$, logo $x = 2$. II: $y = -3$. III: $-8 = -8$. O vetor $(5, -1, -8)$ é combinação linear de $\mathcal{B}$.

Vetor $(-1, 3, 3)$:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \\ -x + 2y = 3. \end{cases}$$

$I+II$: $2x = 2$, logo $x = 1$. II: $y = 2$. III: $3 = 3$. O vetor $(-1, 3, 3)$ é combinação linear de $\mathcal{B}$.

(2) Vetor $(3, 0, -4, 4)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - I \\ , III \to III + I, \\ IV \to IV - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

$$III \to III - II, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{array}\right].$$

Sistema possível. O vetor $(3, 0, -4, 4)$ é combinação linear de $\mathcal{B}$.

Vetor $(1,2,1,3)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III + I, \\ IV \to IV - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right], III \to III - II,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right], IV \to IV - \tfrac{1}{2}III, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right].$$

Sistema impossível. O vetor $(1,2,1,3)$ não é combinação linear de $\mathcal{B}$.

Vetor $(0,0,0,-1)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III + I, \\ IV \to IV - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right], III \to III - II,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right], IV \to IV - \tfrac{1}{2}III, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Sistema impossível. O vetor $(0,0,0,-1)$ não é combinação linear de $\mathcal{B}$.

(3) Vetor $(-2,5,1)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 8 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III - I \end{array}, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{9} \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

Sistema possível. O vetor $(-2,5,1)$ é combinação linear de $\mathcal{B}$.

Vetor $(1,0,1)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III - I \end{array}, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} III \to -III \\ II \leftrightarrow III \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & -2 \end{array}\right], III \to III + 3II, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Sistema impossível. O vetor $(1,0,1)$ não é combinação linear de $\mathcal{B}$.

Vetor $(1,0,0)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III - I \end{array}, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right], \begin{array}{c} III \to -III \\ II \leftrightarrow III \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & -2 \end{array}\right], III \to III + 3II, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Sistema impossível. O vetor $(1,0,0)$ não é combinação linear de $\mathcal{B}$.

(4) Observamos que podemos tirar o vetor nulo da família $\mathcal{B}$. Vetor $(5,2,-1,5)$:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 2 \\ x - y = -1 \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

II: $y = 2$; I: $x = 1$; III: $-1 = -1$; IV: $5 = 5$. O vetor $(5,2,-1,5)$ é combinação linear de $\mathcal{B}$.

Vetor $(2,1,1,1)$:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ y = 1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

II: $y = 1$; I: $x = 0$; III: $-1 = 1$, impossível. O vetor $(2,1,1,1)$ não é combinação linear de $\mathcal{B}$.

Vetor $(0,-1,-1,0)$:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = -1 \\ x - y = -1 \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

II: $y = -1$; I: $x = -2$; III: $-1 = -1$; IV: $-4 = 0$, impossível. O vetor $(0,-1,-1,0)$ não é combinação linear de $\mathcal{B}$.

(5) Vetor $(2,0,2,-1)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - I \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$III \to III + II, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

Sistema possível. O vetor $(2,0,2,-1)$ é combinação linear de $\mathcal{B}$.

Vetor $(1,1,1,0)$: não é combinação linear de $\mathcal{B}$, pois a segunda componente não é nula.

Vetor $(0,0,-1,0)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - I \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$III \to III + II, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Sistema possível. O vetor $(0,0,-1,0)$ é combinação linear de $\mathcal{B}$.

Exercício 2.2. (1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - I, \\ IV \to IV + I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} IV \to IV + 3II \\ II \to -II \\ III \to -III \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{6} \end{array}\right].$$

A única solução é $\lambda_3 = 3$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_1 = 2$, portanto $(4,5,1,-1) = 2(1,1,1,-1) - (1,0,1,2) + 3(1,1,0,1)$.

(2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right], \begin{array}{c} III \to III - I \\ IV \to IV - I \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-2} & \cancel{4} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

∞^1 soluções: $\lambda_3 = t$, $\lambda_2 = -2 - t$ e $\lambda_1 = -2t - 1$. Escolhendo, por exemplo, $t = 0$, obtemos que $(-3,-2,1,-3) = -(1,0,1,1) - 2(1,1,-1,1) + 0(3,1,1,3)$.

(3) Temos ∞^2 possibilidades. Por exemplo, $(4,4,4) = 4(1,1,1) + 0(2,2,2) + 0(3,3,3)$.

(4) A combinação linear mais evidente é $(0,0,0) = 0(1,2,1) + 0(3,1,1) + 0(4,1,-4)$. Resolvendo o sistema linear homogêneo correspondente pode-se verificar se é a única, mas não é significativo para resolver este exercício.

(5)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&0&1\\1&1&1&3\\2&-1&2&9\end{array}\right], I \leftrightarrow II, \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&1&0&1\\2&-1&2&9\end{array}\right], \begin{array}{c}II \to II-2I\\III \to III-2I\end{array},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-1&-2&-5\\0&-3&0&3\end{array}\right], \begin{array}{c}III \to III-3II\\II \to -II\end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&2&5\\0&0&6&18\end{array}\right].$$

A única solução é $\lambda_3 = 3$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_1 = 1$, portanto $(1,3,9) = (2,1,2)-(1,1,-1)+3(0,1,2)$.

Exercício 2.3. (1)

$$\begin{cases} kx + 2y = -1\\ y = -1\\ x = k.\end{cases}$$

III: $x = k$; II: $y = -1$; I: $k^2 = 1$. O sistema admite solução para $k = 1$ ou $k = -1$.

(2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&k&0&1\\0&0&1&1\\1&1&-k&1\end{array}\right], IV \to IV-I, \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&k&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1-k&0\end{array}\right],$$

$$IV \to IV-(1-k)III, \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&k&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&k-1\end{array}\right]$$

Para $k \neq 1$ o sistema é impossível, para $k = 1$ os três pivot são não nulos, portanto o sistema admite solução. Afinal, o vetor $(1,1,1,1)$ é combinação linear da família $\mathcal{B}$ se, e somente se, $k = 1$.

(3)

$$\begin{cases} x - y = -5\\ x = -k\\ kx + 2y = 7.\end{cases}$$

II: $x = -k$; I: $y = 5-k$; III: $k^2 + 2k - 3 = 0$. O sistema admite solução para $k = 1$ ou $k = -3$.

(4)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&0&1&0\\-2&1&k&0\\k&1&2&k\end{array}\right], \begin{array}{c}II \to II-I\\III \to III+2I,\\IV \to IV-kI\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&1&0&-1\\0&-1&k+2&2\\0&1+k&2-k&0\end{array}\right],$$

$$\begin{matrix} III \to III + II \\ IV \to IV - (1+k)II \end{matrix}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-k & 1+k \end{array}\right], IV \to IV + III,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & k+2 \end{array}\right], \begin{matrix} IV \to \frac{1}{4}IV \\ III \leftrightarrow IV \end{matrix}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(k+2) \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \end{array}\right],$$

$$IV \to IV - (k+2)III, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(k+2) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(k^2+4k) \end{array}\right].$$

O sistema admite solução para $k = 0$ ou $k = -4$.

(5)

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = -k \\ x + ky = 3 \\ z = -2. \end{cases}$$

I: $x = 0$; IV: $z = -2$; II: $z = -k$, logo $k = 2$; III: $2y = 3$. O sistema admite solução para $k = 2$.

(6)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ ky + z = 2 \\ x = k \\ x - y = 0. \end{cases}$$

III: $x = k$; IV: $y = k$; II: $z = 2 - k^2$; I: $2k^2 = 2$. O sistema admite solução para $k = 1$ ou $k = -1$.

(7)

$$\begin{cases} x + y - kz = 0 \\ -2y = k \\ 2x + y = -1 \\ y = 1. \end{cases}$$

IV: $y = 1$; II: $x = -\frac{k}{2}$; III: $k = 2$; I: $z = 0$. O sistema admite solução para $k = 2$.

(8)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & -1 & -1 & k \\ k & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right], \begin{matrix} IV \to \frac{1}{2}IV \\ (I, II, III, IV) \to (IV, III, I, II) \end{matrix}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ k & -1 & -1 & k \\ k & 2 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{c} III \to III - kI \\ IV \to IV - III \end{array}, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & 0 \\ 0 & -1-\frac{k}{2} & -1-k & & k \\ 0 & 3 & 3 & & 1-k \end{array}\right], \begin{array}{c} III \to III + (1+\frac{k}{2})II \\ IV \to IV - 3II \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}k & k \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{array}\right].$$

O sistema admite solução para $k = 1$ (nesse caso também o pivot da terceira linha é não nulo).

(9)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -k \\ k & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right], (I, II, III, IV) \to (IV, III, I, II), \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -k \\ k & -2 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{c} II \to II + I \\ IV \to IV - kI \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -k \\ 0 & -2 & -k & 1+k \end{array}\right], \begin{array}{c} III \to III - \frac{1}{2}II \\ IV \to IV + II \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2-k & 2+k \end{array}\right], III \leftrightarrow IV, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-k & 2+k \\ 0 & 0 & 0 & -k-\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

O sistema admite solução para $k = -\frac{1}{2}$ (nesse caso também o pivot da terceira linha é não nulo).

(10)

$$\begin{cases} x + 2z = -1 \\ x = 1 \\ x - ky + z = 0 \\ y - 2z = k. \end{cases}$$

II: $x = 1$; I: $z = -1$; IV: $y = k - 2$; III: $-k^2 + 2k = 0$. O sistema admite solução para $k = 0$ ou $k = 2$.

Exercício 2.4. (1) Consideremos o vetor genérico $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ e verifiquemos que é combinação linear da família dada. O sistema linear correspondente é o seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & -1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 2 & \gamma \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - I \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 1 & \beta - \alpha \\ 0 & 0 & 2 & \gamma - \alpha \end{array}\right].$$

Obtemos três pivot, portanto o sistema admite solução para todo (α, β, γ).

(2) Consideremos o vetor genérico $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ e tentemos escreve-lo como combinação linear da família dada. O sistema linear correspondente é o seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & \alpha \\ -1 & 0 & -1 & \beta \\ 2 & 1 & 0 & \gamma \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II + I \\ III \to III - 2I \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & \alpha \\ 0 & -1 & 2 & \alpha+\beta \\ 0 & 3 & -6 & \gamma - 2\alpha \end{array}\right]$$

$$III \to III + 3II, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & \alpha \\ 0 & -1 & 2 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma + 3\beta + \alpha \end{array}\right].$$

O sistema admite solução se, e somente se, $\gamma + 3\beta + \alpha = 0$, ou seja, se o vetor for da forma $(\alpha, \beta, -\alpha - 3\beta)$. Por exemplo, o vetor $(1, 1, 1)$ *não* é combinação linear da família dada.

(3) É fácil provar que todo vetor de $\mathbb{R}^2$ é combinação linear de $\{(1, 1), (1, -1)\}$. De fato, seja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ um vetor genérico. O sistema linear correspondente é o seguinte:

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases}$$

logo $x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ e $y = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Considerando a família dada no texto temos que:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(4) Qualquer combinação linear da família dada é um múltiplo de $(1, 1)$, portanto, por exemplo, $(1, 2)$ não é combinação linear dessa família.

(5) Seja $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ um vetor genérico. Temos que:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.5. (1) Por hipótese existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\underline{v}_1 = \lambda \underline{v}_2 + \mu \underline{v}_3$. Escolhamos $\lambda = 0$. A família é da forma $\{\mu \underline{v}_3, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Dessa maneira, para que $\underline{v}_2$ não seja combinação linear de $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3\}$, é suficiente que não seja múltiplo de $\underline{v}_3$. Por exemplo, escolhendo $\underline{v}_2 = (1, 0, 0, 0)$, $\underline{v}_3 = (0, 1, 0, 0)$ e $\mu = 2$, obtemos a família $\{(2, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$.

(2) Podemos escolher três vetores que não estejam contidos em um plano, por exemplo $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Como quarto vetor, escolhemos a soma dos três. Obtemos a família $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$. É fácil verificar que cada vetor é combinação linear da família formada pelos demais, mas é claro que nenhum deles é múltiplo de um dos demais.

(3) $\underline{0} = 0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_k$.

(4) $\underline{v}_i = 0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_{i-1} + 1\underline{v}_i + 0\underline{v}_{i+1} + \cdots + 0\underline{v}_k$.

(5) Por hipótese existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tais que $\underline{w} = \lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_k\underline{v}_k$. Se existem $\mu_1, \ldots, \mu_{k-1} \in \mathbb{R}$ tais que $\underline{v}_k = \mu_1\underline{v}_1 + \cdots + \mu_{k-1}\underline{v}_{k-1}$, então:

$$\begin{aligned}\underline{w} &= \lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_{k-1}\underline{v}_{k-1} + \lambda_k(\mu_1\underline{v}_1 + \cdots + \mu_{k-1}\underline{v}_{k-1}) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_k\mu_1)\underline{v}_1 + \cdots + (\lambda_{k-1} + \lambda_k\mu_{k-1})\underline{v}_{k-1}.\end{aligned}$$

Pondo $\xi_i := \lambda_i + \lambda_k\mu_i$, vemos que $\underline{w} = \xi_1\underline{v}_1 + \cdots + \xi_{k-1}\underline{v}_{k-1}$, logo $\underline{w}$ é combinação linear da família $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{k-1}\}$.

Seção 2.6.6

Exercício 2.6. (1) É um subespaço vetorial. De fato, sejam $\underline{v}_1 = (a_1, 2a_1, c_1, d_1)$ e $\underline{v}_2 = (a_2, 2a_2, c_2, d_2)$ dois vetores genéricos de V. Temos que, para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1(2a_1) + \lambda_2(2a_2) \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ 2(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ 2a_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix},$$

logo $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 \in V$.

(2) É um subespaço vetorial. De fato, sejam $\underline{v}_1 = (b_1 - d_1, b_1, 0, d_1)$ e $\underline{v}_2 = (b_2 - d_2, b_2, 0, d_2) \in V$ dois vetores genéricos de V. Temos que, para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 &= \begin{pmatrix} \lambda_1(b_1 - d_1) + \lambda_2(b_2 - d_2) \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 0 + \lambda_2 0 \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) - (\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ 0 \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_3 - d_3 \\ b_3 \\ 0 \\ d_3 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

logo $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 \in V$.

(3) Não é um subespaço vetorial. De fato, $(1, 1) \in V$ mas $-(1, 1) \notin V$.

(4) Não é um subespaço vetorial, pois $\underline{0} \notin V$.

(5) É um subespaço vetorial. De fato, sejam $\underline{v}_1 = (a_1, 0, c_1, d_1, 0) \in V$ e $\underline{v}_2 = (a_2, 0, c_2, d_2, 0) \in V$ dois vetores genéricos. Para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 0 + \lambda_2 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \\ \lambda_1 0 + \lambda_2 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ c_3 \\ d_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

logo $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 \in V$.

(6) Não é um subespaço vetorial, pois $\underline{0} \notin V$.

(7) Não é um subespaço vetorial. De fato, $(1, 1, 1) \in V$ mas $-(1, 1, 1) \notin V$.

(8) Não é um subespaço vetorial. De fato, $(1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1) \in V$ mas $(1, 0, 0, 1) + (1, 0, 0, -1) = (2, 0, 0, 0) \notin V$.

(9) É um subespaço vetorial. De fato, $a^3 = b^3$ se, e somente se, $a = b$. Sejam $\underline{v}_1 = (a_1, a_1, c_1, d_1) \in V$ e $\underline{v}_2 = (a_2, a_2, c_2, d_2) \in V$ dois vetores genéricos. Para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \\ \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix},$$

logo $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 \in V$.

(10) É um subespaço vetorial. De fato, $2^d = 1$ se, e somente se, $d = 0$. Sejam $\underline{v}_1 = (a_1, a_1, a_1, 0) \in V$ e $\underline{v}_2 = (a_2, a_2, a_2, 0) \in V$ dois vetores genéricos. Para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 0 + \lambda_2 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

logo $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 \in V$.

Exercício 2.7. (1) Seja $V = \{\underline{0}\}$. Sejam $\underline{v}, \underline{w} \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Necessariamente $\underline{v} = \underline{w} = \underline{0}$, portanto $\lambda \underline{v} + \mu \underline{w} = \lambda \underline{0} + \mu \underline{0} = \underline{0} \in V$, logo V é um subespaço vetorial. (2) Seja $V = \mathbb{R}^n$. Sejam $\underline{v}, \underline{w} \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. É claro que $\lambda \underline{v} + \mu \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, dado que, por definição, a soma e o produto externo de $\mathbb{R}^n$ são operações cujo resultado é um vetor de $\mathbb{R}^n$. Por isso $\mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial de si mesmo.

Exercício 2.8. ($\Leftarrow$) Já foi demonstrado no exercício precedente. ($\Rightarrow$) Como $V := \{\underline{v}\}$ é um subespaço vetorial por hipótese e todo subespaço vetorial contém $\underline{0}$, necessariamente $\underline{v} = \underline{0}$. Podemos demonstrar o mesmo resultado também da seguinte maneira. Como $\underline{v} \in V$, temos que $\underline{v} + \underline{v} \in V$, logo necessariamente $\underline{v} + \underline{v} = \underline{v}$, o que equivale a $\underline{v} = \underline{0}$.

Exercício 2.9. Dado que $(1, 2), (2, 1) \in V$ e V é um subespaço vetorial, toda combinação linear de $\{(1, 2), (2, 1)\}$ pertence a V, portanto devemos demonstrar que todo vetor de $\mathbb{R}^2$ é combinação linear de $\{(1, 2), (2, 1)\}$. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e procuremos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $(x, y) = \lambda(1, 2) + \mu(2, 1)$. Isso equivale ao sistema linear:

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 2\lambda + \mu = y. \end{cases}$$

O leitor pode verificar que este sistema admite a (única) solução $\lambda = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$ e $\mu = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y$, portanto todo vetor (x, y) é combinação linear de $\{(1, 2), (2, 1)\}$.

Exercício 2.10. Seja $V = \{(x, y, z) : x = y = z\}$. O leitor pode verificar que se trata de um subespaço vetorial. Ademais, é claro que $(1, 1, 1) \in V$, enquanto $(3, -1, 1) \notin V$.

Seção 2.7.5

Exercício 2.11. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Para que (x, y) seja combinação linear de $\mathcal{A}$, devem existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $(x, y) = \lambda(1, 1) + \mu(2, 2)$, logo $(x, y) = (\lambda + 2\mu, \lambda + 2\mu)$. Isso implica que $x = y$, portanto, por exemplo, o vetor $(1, 3)$ não é combinação linear de $\mathcal{A}$. Isso demostra que $\mathcal{A}$ não gera $\mathbb{R}^2$.

Exercício 2.12. Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Para que (x, y, z) seja combinação linear de $\mathcal{A}$, o seguinte sistema linear, nas variáveis λ, μ e ξ, deve admitir pelo menos uma solução:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\xi = x \\ \lambda + \mu = y \\ \lambda - \mu + \xi = z. \end{cases}$$

Vamos usar o algoritmo de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & 1 & z \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & -2 & y - x \\ 0 & -2 & -1 & z - x \end{array}\right]$$

$$II \leftrightarrow III \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & -1 & z - x \\ 0 & 0 & -2 & y - x \end{array}\right].$$

Temos três pivot e três variáveis, independentemente de x, y e z, portanto o sistema admite solução para todo vetor (x, y, z). Isso demonstra que $\mathcal{A}$ gera $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2.13. Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Para que (x, y, z) seja combinação linear de $\mathcal{A}$, o seguinte sistema linear, nas variáveis λ, μ e ξ, deve admitir pelo menos uma solução:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \xi = x \\ \lambda + \mu + \xi = y \\ \lambda - \mu + 5\xi = z. \end{cases}$$

Podemos já observar que, pelas primeiras duas equações, necessariamente $x = y$. Contudo, vamos usar o algoritmo de Gauss para mostrar a técnica geral.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & 5 & z \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-x \\ 0 & -2 & 4 & z-x \end{array}\right]$$

$$II \leftrightarrow III \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & 4 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & y-x \end{array}\right].$$

Por causa da última linha, o sistema admite solução se, e somente se, $y - x = 0$, isto é, $x = y$. Portanto, por exemplo, o vetor $(1, 2, 3)$ não é combinação linear de $\mathcal{A}$, logo $\mathcal{A}$ não gera $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2.14. *Primeiro item.* Sejam $\underline{v} = (y_1+z_1, y_1, z_1)$ e $\underline{w} = (y_2+z_2, y_2, z_2)$ dois vetores genéricos de V. Para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ temos que:

$$\lambda\underline{v} + \mu\underline{w} = \begin{pmatrix} \lambda(y_1+z_1) + \mu(y_2+z_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_3 + z_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

portanto $\lambda\underline{v} + \mu\underline{w} \in V$. Isso demonstra que V é um subespaço vetorial.

Segundo item. Seja $(y+z, y, z)$ o genérico vetor de V. Devemos demonstrar que existem $\lambda, \mu \in R$ tais que $(y+z, y, z) = \lambda(1,1,0) + \mu(1,0,1)$. É claro que $\lambda = y$ e $\mu = z$ é uma solução, portanto $\mathcal{A}$ gera V.

Terceiro item. Seja $(y+z, y, z)$ o genérico vetor de V. Devemos demonstrar que existem $\lambda, \mu, \eta, \xi \in \mathbb{R}$ tais que $(y+z, y, z) = \lambda(2,1,1) + \mu(1,1,0) + \eta(-1,-1,0) + \xi(0,1,-1)$. Isso equivale ao seguinte sistema linear nas variáveis λ, μ, η e ξ:

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu - \eta = y + z \\ \lambda + \mu - \eta + \xi = y \\ \lambda - \xi = z. \end{cases}$$

Vamos usar o algoritmo de Gauss.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & y+z \\ 1 & 1 & -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & -1 & z \end{array}\right] I \leftrightarrow II \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & y \\ 2 & 1 & -1 & 0 & y+z \\ 1 & 0 & 0 & -1 & z \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III - I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 1 & -2 & z-y \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{z-y} \end{array}\right].$$

A última linha foi cortada por ser igual à segunda. Obtemos um sistema com 4 variáveis e 2 pivot, independentemente de y e z, portanto existe pelo menos uma solução para todo vetor $(y+z, y, z)$. Isso demonstra que $\mathcal{A}$ gera V.

Quarto item. Seja $(y+z, y, z)$ o genérico vetor de V. Devemos demonstrar que nem sempre existem $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ tais que $(y+z, y, z) = \lambda(1,1,0)+\mu(2,2,0)+\eta(3,3,0)$. De fato, é claro que, se existirem estes coeficientes, então $z = 0$, portanto, por exemplo, o vetor $(2,1,1) \in V$ não é combinação linear de $\mathcal{A}$. Isso demonstra que $\mathcal{A}$ não gera V.

Exercício 2.15. Sejam $\underline{v} = (x_1, x_1, x_1)$ e $\underline{w} = (x_2, x_2, x_2)$ dois vetores genéricos de V. Para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda\underline{v}+\mu\underline{w} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_2) = (x_3, x_3, x_3)$, logo $\lambda\underline{v}+\mu\underline{w} \in V$. Isso demonstra que V é um subespaço vetorial. Todo vetor de V é da forma $(x_1, x_1, x_1) = x_1(1,1,1)$, logo a família $\mathcal{A}' := \{(1,1,1)\}$ gera V. Para achar uma família de 8 geradores, é suficiente acrescentar 7 vetores de V a $\mathcal{A}'$. Por exemplo, podemos considerar $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6),(7,7,7),(8,8,8)\}$.

Seção 2.8.5

Exercício 2.16. (1)

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

IV: $\beta = 0$; I: $\alpha = 0$. A única solução é a nula, logo a família é independente.

(2) A família contém o vetor nulo, portanto é dependente.

(3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to \frac{1}{2}II \\ \text{'}\, III \to III - I\text{'} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

∞^1 soluções, logo a família é dependente.

(4) 5 vetores de $\mathbb{R}^2$ são necessariamente dependentes, pois $5 > 2$. Podemos prova-lo explicitamente.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right], II \to II - I,$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

∞^3 soluções, logo a família é dependente.

(5)

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I: $\alpha = 0$; II: $\beta = 0$; III: $\gamma = 0$; IV: $\delta = 0$. A única solução é a nula, logo a família é independente.

(6)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right], IV \to IV - I, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

$$IV \to IV + III, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Uma solução, logo a família é independente.

(7)

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II: $\alpha = 0$; III: $\gamma = 0$; I: $\beta = 0$. A única solução é a nula, logo a família é independente.

(8)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - I \\ 'IV \to IV - I' \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right],$$

$$II \leftrightarrow III, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Uma solução, logo a família é independente.

(9) O segundo vetor é múltiplo do primeiro, logo a família é dependente.

(10)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ IV \to IV - I \end{array}, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right],$$

$$III \to III + II, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

∞^1 soluções, logo a família é dependente.

Exercício 2.17. (1)

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I, II, IV: $\alpha = -2\beta$; III: $2\beta(2-k) = 0$. Para que haja só a solução nula, $2 - k \neq 0$. Logo, a família é independente para todo $k \neq 2$.

(2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III + I \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-1 & 0 \end{array}\right],$$

$$III \to III + 2II, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \end{array}\right].$$

Para que haja uma solução única, $k \neq -1$.

(3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - kI \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2k & 4k & 0 \end{array}\right],$$

$$III \to III - 2kII, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

∞^1 soluções, logo a família é dependente para todo $k \in \mathbb{R}$.

(4)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ k & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array}\right], II \to II - kI, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2(1-k) & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array}\right].$$

$k \neq 0, 1$: uma solução, a família é independente. $k = 0$: ∞^1 soluções, a família é dependente. $k = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

∞^1 soluções, a família é dependente. Logo, a família é independente para todo $k \neq 0, 1$.

(5)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & k & 3 & 0 \end{array}\right], III \to III - I, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & k-1 & 3-k & 0 \end{array}\right],$$

$$III \to III + (k-1)II, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-2k & 0 \end{array}\right].$$

Para que haja uma solução única, $k \neq 2$.

(6)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right], I \leftrightarrow IV, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} III \to III + II \\ IV \to IV - kI \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & -k & 1-2k & 0 \end{array}\right], IV \to IV - kII, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1-k} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

Para que haja uma solução única, $k \neq 1$.

(7)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1-k & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} III \to III - I \\ IV \to IV - kI \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-k & 1-3k & 0 \end{array}\right],$$

$$\begin{matrix} III \to III + II \\ IV \to IV + (1-k)II \end{matrix}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1-k} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

A família é independente para todo $k \in \mathbb{R}$.

(8)

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I: $\alpha = -2\beta$; II: $\beta(1-2k) = 0$; III: $\beta(k-2) = 0$. Se $k \neq \frac{1}{2}$, a equação II impõe $\beta = 0$, se $k \neq 2$ a equação III impõe $\beta = 0$. Afinal, para todo $k \in \mathbb{R}$ temos que $\beta = \alpha = 0$, logo a família é independente para todo k.

(9)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right], (I, II, III, IV) \to (II, III, IV, I), \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

$$\begin{matrix} II \to II - I \\ IV \to IV - kI \end{matrix}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & k-3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 2-3k & 0 \end{array}\right], \begin{matrix} II \to II + 2III \\ IV \to IV + kIII, \\ II \leftrightarrow III \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2-2k} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

Para que haja uma solução, $k \neq 1$.

(10)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & k & 2 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], (I, II, III, IV) \to (II, IV, III, I), \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \end{array}\right],$$

$$\begin{matrix} II \to II + I \\ III \to III + I \end{matrix}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 2 & k+3 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \end{array}\right], \begin{matrix} III \to III - 2II \\ IV \to IV - kII \end{matrix}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{(1-k)(k+2)} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

Para que haja uma solução, $k \neq 1$.

EXERCÍCIO 2.18. (1) Seja $\mathcal{A} = \{\underline{0}, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}$. Temos que

$$1 \cdot \underline{0} + 0\underline{v}_2 + \cdots + 0\underline{v}_k = \underline{0}$$

e os coeficientes não são todos nulos, pois $1 \neq 0$, logo a família é dependente.

(2) Sejam $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h\}$ e $\mathcal{A} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h, \underline{v}_{h+1}, \dots, \underline{v}_k\}$. Seja

$$(\star) \qquad \lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_h \underline{v}_h = \underline{0}$$

e demonstremos que todos os coeficientes têm que ser nulos. De fato, a identidade $(\star)$ equivale à $\lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_h \underline{v}_h + 0\underline{v}_{h+1} + \cdots + 0\underline{v}_k = \underline{0}$. Como $\mathcal{A}$ é independente, todos os coeficientes são nulos, em particular $\lambda_1 = \cdots = \lambda_h = 0$. Isso demonstra que $\mathcal{B}$ é independente.

Exercício 2.19. (1) Suponhamos que $\mu_1(\lambda_1 \underline{v}_1) + \mu_2(\lambda_2 \underline{v}_2) + \mu_3(\lambda_3 \underline{v}_3) = \underline{0}$ e provemos que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. A identidade precedente é equivalente à $(\mu_1\lambda_1)\underline{v}_1 + (\mu_2\lambda_2)\underline{v}_2 + (\mu_3\lambda_3)\underline{v}_3 = \underline{0}$. Sendo $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ independente, temos que $\mu_1\lambda_1 = \mu_2\lambda_2 = \mu_3\lambda_3 = 0$. Sendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$, temos que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$.

(2) Suponhamos que $\lambda_1(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \lambda_2(\underline{v}_2 + \underline{v}_3) + \lambda_3(\underline{v}_1 + \underline{v}_3) = \underline{0}$ e provemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. A identidade precedente é equivalente à $(\lambda_1 + \lambda_3)\underline{v}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\underline{v}_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)\underline{v}_3 = \underline{0}$. Sendo $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ independente temos que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(3) Suponhamos que $\lambda_1(\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3) + \lambda_2(-\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3) + \lambda_3(3\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3) = \underline{0}$ e provemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. A identidade precedente é equivalente à $(\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3)\underline{v}_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\underline{v}_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\underline{v}_3 = \underline{0}$. Sendo $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ independente temos que:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(4) Seja $\lambda\underline{v} + \mu(\underline{w} + k\underline{v}) = \underline{0}$. Isso equivale a $(\lambda + k\mu)\underline{v} + \mu\underline{w} = \underline{0}$. Sendo $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ independente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \lambda + k\mu = 0 \\ \mu = 0. \end{cases}$$

Pela segunda equação $\mu = 0$, portanto, pela primeira, $\lambda = 0$. Isso demonstra que $\{\underline{v}, \underline{w} + k\underline{v}\}$ é independente.

(5) Seja $\lambda\underline{v}_1 + \mu(\underline{v}_2 + k\underline{v}_1) + \xi(\underline{v}_3 + k\underline{v}_2) = \underline{0}$. Isso equivale a $(\lambda + k\mu)\underline{v}_1 + (\mu + k\xi)\underline{v}_2 + \xi\underline{v}_3 = \underline{0}$. Sendo $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ independente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \lambda + k\mu = 0 \\ \mu + k\xi = 0 \\ \xi = 0. \end{cases}$$

Pela terceira equação $\xi = 0$, portanto, pela segunda, $\mu = 0$, portanto, pela primeira, $\lambda = 0$. Isso demonstra que $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2 + k\underline{v}_1, \underline{v}_3 + k\underline{v}_2\}$ é independente.

Exercício 2.20. Seja $\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_k\underline{v}_k = \underline{0}$. Também temos que $0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_k = \underline{0}$. Acabamos de escrever o vetor $\underline{w} = \underline{0}$ como combinação linear de $\mathcal{A}$ de duas maneiras, as quais, por hipótese, têm que coincidir. Logo $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$, portanto $\mathcal{A}$ é independente.

Seção 2.9.4

Exercício 2.21. (1) Dois vetores não podem gerar $\mathbb{R}^3$. (2) Quatro vetores em $\mathbb{R}^3$ são dependentes. (3) Sendo três vetores em $\mathbb{R}^3$, é suficiente verificar que geram $\mathbb{R}^3$ para provar que formam uma base. Dado um vetor genérico $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, temos que $(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$, logo a família dada é uma base. (4) Sendo três vetores em $\mathbb{R}^3$, é suficiente verificar que são independentes para provar que formam uma base. Seja $\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 0) + \gamma(0, 0, -1) = (0, 0, 0)$. Temos que $\alpha + \beta = 0$ e $\alpha + 2\beta = 0$, logo $\alpha = \beta = 0$. Pela terceira equação $\gamma = 0$, logo a família dada é uma base. (5) A família contém o vetor nulo, portanto é dependente.

Exercício 2.22. (1) Sendo quatro vetores em $\mathbb{R}^4$, formam uma base se, e somente se, são independentes. O sistema correspondente é o seguinte:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ kx + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ kz + kw = 0. \end{cases}$$

I e III: $z = y = -x$. II: $x(k-1) = 0$. IV: $k(w - x) = 0$. Se $k = 1$ obtemos $x = t$ e $z = y = -w = -t$. Se $k = 0$ obtemos $w = t$ e $x = y = z = 0$. Se $k \neq 0, 1$ há somente a solução nula. Logo, a família dada é uma base para todo $k \neq 0, 1$.

(2) Sendo três vetores em $\mathbb{R}^4$, não geram $\mathbb{R}^4$ para nenhum k.

(3) Sendo quatro vetores em $\mathbb{R}^4$, formam uma base se, e somente se, são independentes. Vamos usar o algoritmo de Gauss.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - (k-1)I \\ III \to III - I \\ IV \to IV - I \end{array}, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 \end{array}\right]$$

$$IV \to IV - III, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right].$$

Para que haja só uma solução, $k \neq 1$.

(4) Sendo cinco vetores em $\mathbb{R}^4$, são dependentes para todo k.

(5) Sendo quatro vetores em $\mathbb{R}^4$, formam uma base se, e somente se, são independentes. O sistema correspondente é o seguinte:

$$\begin{cases} x + kw = 0 \\ y + kz + kw = 0 \\ z = 0 \\ w = 0. \end{cases}$$

III e IV: $z = w = 0$. I e II: $x = y = 0$. A família é uma base para todo $k \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.23. ($\Rightarrow$) Seja $\lambda(x_1, y_1, 0) + \mu(x_2, y_2, 0) + \xi(0, 0, 1) = 0$. Pela terceira componente temos que $\xi = 0$. As primeiras duas componentes equivalem a $\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (0, 0)$, logo, sendo $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ independente, temos que $\lambda = \mu = 0$. ($\Leftarrow$) Seja $\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (0, 0)$. Isso equivale a $\lambda(x_1, y_1, 0) + \mu(x_2, y_2, 0) = (0, 0, 0)$, portanto $\lambda(x_1, y_1, 0) + \mu(x_2, y_2, 0) + 0(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Como $\{(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0), (0, 0, 1)\}$ é independente, temos que $\lambda = \mu = 0$.

Exercício 2.24. (1) $(1, -1, 2) = (1, 0, 0) - (0, 1, 0) + 2(1, -1, 2)$, logo as coordenadas são $(1, -1, 2)$.

(2) Usamos o algoritmo de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - I \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right],$$
$$III \to III + II, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Obtemos $z = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$ e $x = \frac{9}{2}$, portanto as coordenadas são $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(3) O sistema correspondente é o seguinte:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

III: $x = 2$. I: $z = -1$. II: $y = -2$. As coordenadas são $(2, -2, -1)$.

Exercício 2.25. Estamos procurando uma base $\mathcal{A} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ tal que $(1, 1) = 3(x_1, y_1) + 2(x_2, y_2)$. Isso equivale a $(1 - 3x_1, 1 - 3y_1) = (2x_2, 2y_2)$, portanto podemos fixar livremente o valor de (x_1, y_1) e deduzir o de (x_2, y_2), verificando que $\mathcal{A}$ seja independente. Por exemplo, podemos escolher $(x_1, y_1) = (1, 0)$, logo $(x_2, y_2) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$. Também podemos escolher $(x_1, y_1) = (0, 1)$, logo $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$. Obviamente há infinitas outras possibilidades.

Exercício 2.26. (1) O vetor genérico é da forma

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que a família $\{(1,0,2,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ gera o sub-espaço. Se verificamos que é independente, provamos que é uma base. Seja $\alpha(1,0,2,0) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$. Pela primeira, segunda e quarta componente temos que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, logo essa família é uma base.

(2) O vetor genérico é da forma

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que a família $\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,0,0,1)\}$ gera o sub-espaço. Se verificamos que é independente, provamos que é uma base. Seja $\alpha(1,0,0,0,0) + \beta(0,1,0,0,0) + \gamma(0,0,0,0,1) = (0,0,0,0,0)$. Pela primeira, segunda e quinta componente temos que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, logo essa família é uma base.

(3) O vetor genérico é da forma

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que a família $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ gera o sub-espaço. Se verificamos que é independente, provamos que é uma base. Seja $\alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) = (0,0,0)$. Pela primeira e segunda componente temos que $\alpha = \beta = 0$, logo essa família é uma base.

(4) O vetor genérico é da forma

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que a família $\{(1,0,-1)\}$ gera o sub-espaço. Como contém somente um vetor não nulo, é independente, logo é uma base.

(5) O vetor genérico é da forma

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -2d \\ d \\ -a-b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que a família $\{(1,0,0,0,-1),(0,1,0,0,-1),(0,0,-2,1,0)\}$ gera o sub-espaço. Se verificamos que é independente, provamos que é uma base. Seja $\alpha(1,0,0,0,-1)+\beta(0,1,0,0,-1)+\gamma(0,0,-2,1,0)=(0,0,0,0,0)$. Pela primeira, segunda e quarta componente temos que $\alpha=\beta=\gamma=0$, logo essa família é uma base.

Exercício 2.27. A família $\{(1,1,2),(-1,1,1),\underline{v}\}$ tem que ser independente. Seja $\underline{v}=(\alpha,\beta,\gamma)$. O sistema linear correspondente é o seguinte.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \beta & 0 \\ 2 & 1 & \gamma & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - 2I \end{array}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & 3 & \gamma-2\alpha & 0 \end{array}\right],$$

$$III \to 2III - 3II, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma-3\beta-\alpha & 0 \end{array}\right].$$

Para que haja uma solução única, temos que escolher um vetor tal que $2\gamma-3\beta-\alpha\neq 0$, ou seja, $\alpha\neq 2\gamma-3\beta$. Por exemplo, podemos escolher $\underline{v}=(1,1,1)$.

Exercício 2.28. Uma base tem que ser linearmente independente, enquanto, qualquer seja $\underline{v}$, a família $\{(1,1,2),(-1,-1,-2),\underline{v}\}$ é dependente, dado que $1(1,1,2)+1(-1,-1,-2)+0\underline{v}=\underline{0}$, com dois coeficientes não nulos.

Exercício 2.29. (1)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ III \to III - I \end{array}, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{-4} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

Os pivot estão nas primeiras duas posições, logo uma sub-família maximal independente é $\{(1,1,2,1),(1,1,4,3)\}$.

(2) Podemos tirar o vetor nulo da família.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - I, \\ IV \to IV - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

A família é independente, portanto é uma sub-família maximal independente da de partida.

(3)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - 2I \\ , III \to III - I, \\ IV \to IV - I \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

Os pivot estão nas primeiras duas posições, logo uma subfamília maximal independente é $\{(1,2,1,1),(0,1,1,-1)\}$.

(4) A família é independente, pois contém somente um vetor não nulo, logo é a única sub-família maximal independente de si mesma.

(5)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -8 & -5 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} III \to III - I \\ , IV \to IV - I, \\ V \to V + I \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & -3 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} III \leftrightarrow IV \\ , V \to V - 3II \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array}\right].$$

Os pivot estão na primeira, segunda, quarta e quinta posição, logo uma sub-família maximal independente é

$$\{(1,0,1,1,1,-1),(1,1,1,1,1,2),(2,-1,2,2,1,-5),(1,1,0,0,1,3)\}.$$

Exercício 2.30. Para verificar que a família dada gera $\mathbb{R}^3$, mostremos que as suas sub-famílias maximais independentes contêm três elementos.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - I \\ , III \to III + I, \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$III \to III + 2II, \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Temos três pivot, logo a família gera $\mathbb{R}^3$. As sub-famílias, que são uma base de $\mathbb{R}^3$, são as sub-famílias maximais independentes. O sistema precedente mostra que $\{(1,1,-1),(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma delas. Para achá-las todas, temos que considerar as quatro sub-famílias de três elementos da família dada e verificar quais são independentes. O leitor pode verificar que são as seguintes três: $\{(1,1,-1),(1,0,1),(0,1,1)\}$, $\{(1,1,-1),(0,1,1),(3,2,-1)\}$, $\{(1,0,1),(0,1,1),(3,2,-1)\}$.

Parte III

2.17. (1) É um sub-espaço afim. Antes de tudo não é um sub-espaço vetorial, pois $\underline{0} \notin A$. Fixemos um vetor $\underline{v}_0 \in A$, por exemplo $\underline{v}_0 = (0,-1,0,0)$, e calculemos $W := A - \underline{v}_0$. Temos que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : 2a - b = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ c \\ d \end{pmatrix} : 2a - b = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} : 2\tilde{a} - (\tilde{b} - 1) = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} : 2\tilde{a} - \tilde{b} = 0 \right\}.$$

O leitor pode verificar que W é um sub-espaço vetorial, mostrando que é fechado por combinações lineares de dois elementos, portanto A é afim. Para achar uma base de W, observamos que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ 2\tilde{a} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \tilde{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{d} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Isso mostra que $\mathcal{A} = \{(1,2,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma família de geradores, portanto só falta provar que é independente. Seja $\alpha(1,2,0,0) + \beta(0,0,1,0) + \gamma(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$. Por causa da primeira, da terceira e da quarta componente temos que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, logo $\mathcal{A}$ é uma base.

(2) É um sub-espaço afim. Antes de tudo não é um sub-espaço vetorial, pois $\underline{0} \notin A$. Fixemos um vetor $\underline{v}_0 \in A$, por exemplo $\underline{v}_0 = (0,0,-2,0)$, e calculemos $W := A - \underline{v}_0$. Temos que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} : a = b - d, c = -2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c+2 \\ d \end{pmatrix} : a = b - d, c = -2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} : \tilde{a} = \tilde{b} - \tilde{d}, \tilde{c} = 0 \right\}.$$

O leitor pode verificar que W é um sub-espaço vetorial, mostrando que é fechado por combinações lineares de dois elementos, portanto A é afim. Para achar uma base de W, observamos que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{b} - \tilde{d} \\ \tilde{b} \\ 0 \\ \tilde{d} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \tilde{b} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{d} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Isso mostra que $\mathcal{A} = \{(1,1,0,0), (-1,0,0,1)\}$ é uma família de geradores, portanto só falta provar que é independente. Seja $\alpha(1,1,0,0)+\beta(-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$. Por causa da segunda e da quarta componente temos que $\alpha = \beta = 0$, logo $\mathcal{A}$ é uma base.

(3) O leitor pode verificar que A é um sub-espaço vetorial, portanto é afim. Para achar uma base de $W = A$, observamos que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Isso mostra que $\mathcal{A} = \{(1,0,0,2,0), (0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0)\}$ é uma família de geradores, portanto só falta provar que é independente. Seja $\alpha(1,0,0,2,0)+\beta(0,1,0,0,0)+\gamma(0,0,1,0,0) = (0,0,0,0)$. Por causa da primeira, da segunda e da terceira componente temos que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, logo $\mathcal{A}$ é uma base.

(4) Como $\underline{0} \in A$, temos que A é afim se, e somente se, é vetorial. Temos que $(1,1,0,0) \in A$ mas $-(1,1,0,0) \notin A$, logo A não é vetorial, portanto não é afim.

(5) É um sub-espaço afim. Antes de tudo não é um sub-espaço vetorial, pois $\underline{0} \notin A$. Fixemos um vetor $\underline{v}_0 \in A$, por exemplo $\underline{v}_0 = (0,0,0,0,-1)$, e calculemos $W := A - \underline{v}_0$. Temos que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \\ d \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

O leitor pode verificar que W é um sub-espaço vetorial, portanto A é afim. Uma base de W é $\{(1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0)\}$.

(6) Não é um sub-espaço afim. Antes de tudo não é um sub-espaço vetorial, pois $\underline{0} \notin A$. Fixemos um vetor $\underline{v}_0 \in A$, por exemplo $\underline{v}_0 = (1,0,0,0)$, e calculemos

$W := A - \underline{v}_0$. Temos que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : a^4 = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a-1 \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : a^4 = 1 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} : (\tilde{a}+1)^4 = 1 \right\}.$$

Como $(-1,0,0,0) \in W$, mas $(1,0,0,0) \notin W$, concluímos que W não é um sub-espaço vetorial, portanto A não é afim.

(7) Temos que $A = \{(1,1)\}$, portanto é um sub-espaço afim, sendo $\{\underline{0}\}$ o sub-espaço direção.

(8) Temos que $A = \{(a,b,c,d) : a = b = c, d = 1\}$. Vamos verificar que é afim. Antes de tudo não é um sub-espaço vetorial, pois $\underline{0} \notin A$. Fixemos um vetor $\underline{v}_0 \in A$, por exemplo $\underline{v}_0 = (0,0,0,1)$, e calculemos $W := A - \underline{v}_0$. Temos que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

O leitor pode verificar que W é um sub-espaço vetorial, portanto A é afim. Uma base de W é $\{(1,1,1,0)\}$.

(9) Como $\underline{0} \in A$, temos que A é afim se, e somente se, é vetorial. Temos que $(1,1,1,1), (1,1,1,-1) \in A$ mas $(1,1,1,1) + (1,1,1,-1) = (2,2,2,0) \notin A$, logo A não é vetorial, portanto não é afim.

(10) Como $\underline{0} \in A$, temos que A é afim se, e somente se, é vetorial. Temos que $(1,1,0,0), (1,0,1,0) \in A$ mas $(1,1,0,0) + (1,0,1,0) = (2,1,1,0) \notin A$, logo A não é vetorial, portanto não é afim.

2.18. (1) Temos que resolver o sistema $\lambda_1(1,0,0,1) + \lambda_2(1,2,0,1) = \mu_1(1,1,1,-3)$. A única solução é $(0,0,0)$, logo $V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\}$.

(2) Temos que resolver o sistema $\lambda_1(1,-2,0,1) + \lambda_2(1,2,2,1) = \mu_1(2,3,1,2) + \mu_2(1,3,0,1)$. As soluções são dadas por $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}t$, $\mu_1 = -t$ e $\mu_2 = t$, logo $V_1 \cap V_2 = \{(-t,0,-t,-t)\} = \langle(1,0,1,1)\rangle$.

(3) Temos que resolver o sistema $\lambda_1(1,0,0,1,-1) + \lambda_2(0,1,1,0,0) + \lambda_{23}(0,0,1,1,1) = \mu_1(1,-2,-2,1,-1) + \mu_2(1,1,2,2,0)$. O sistema possui ∞^2 soluções, portanto $\dim(V_1 \cap$

$V_2) = 2 = \dim(V_2)$, logo $V_1 \cap V_2 = V_2$ (ou seja, $V_2 \subset V_1$).

2.19. (1) Temos que resolver o sistema $(1,0,0,0)+\lambda_1(1,0,1,1)+\lambda_2(2,-1,1,2) = (0,1,0,-2) + \mu_1(1,0,1,3) + \mu_2(0,1,1,2)$. As soluções são dadas por $\lambda_1 = \frac{3}{2} + t$, $\lambda_2 = -1 - t$, $\mu_1 = \frac{1}{2} - t$ e $\mu_2 = t$, logo $A_1 \cap A_2 = \left\{\left(\frac{1}{2} - t, 1 + t, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - t\right)\right\} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \langle(-1,1,0,-1)\rangle$.

(2) Temos que resolver o sistema $(1,-1,0,0) + \lambda_1(1,0,1,3) + \lambda_2(0,-1,2,4) = (1,1,1,1) + \mu_1(0,0,3,0) + \mu_2(1,1,2,-1)$. O sistema é impossível, logo $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

(3) Temos que resolver o sistema $(1,1,0,1) + \lambda_1(1,2,1,-1) + \lambda_2(1,1,1,1) = (-1,4,1,1) + \mu_1(1,-1,0,1) + \mu_2(0,1,2,2)$. A única solução é $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_1 = -3$ e $\mu_2 = 0$, logo $A_1 \cap A_2 = \{(2,1,1,4)\}$.

(4) Temos que resolver o sistema $(1,1,1) + \lambda_1(1,2,1) + \lambda_2(1,-1,1) = (3,2,3) + \mu_1(0,3,0) + \mu_2(1,5,1)$. O sistema possui ∞^2 soluções, portanto $\dim(A_1 \cap A_2) = 2 = \dim A_1 = \dim A_2$, logo $A_1 = A_2 = A_1 \cap A_2$.

(5) Temos que resolver o sistema $(2,1,1,-2) + \lambda_1(1,0,-1,1) + \lambda_2(2,1,1,-2) = (2,2,4,-6) + \mu_1(-1,-2,-5,7)$. O sistema possui ∞^1 soluções, portanto $\dim(A_1 \cap A_2) = 1 = \dim A_2$, logo $A_1 \cap A_2 = A_2$, ou seja, $A_2 \subset A_1$.

2.20. (1) Sejam V_1 e V_2 os dois sub-espaços direção. Para verificar se A_1 e A_2 são paralelos, temos que verificar se $V_2 \subset V_1$. Isso equivale a verificar se $(1,-1,-5,-1)$ é combinação linear de $\{(1,1,-1,1),(1,2,1,2)\}$. Equivalentemente, podemos verificar se a dimensão de $V_1 \cap V_2$ é 1. Neste último caso o sistema linear correspondente é $\lambda_1(1,1,-1,1) + \lambda_2(1,2,1,2) = \mu_1(1,-1,-5,-1)$, o qual tem ∞^1 soluções, portanto $\dim(V_1 \cap V_2) = 1 = \dim V_2$, logo $V_2 \subset V_1$. Isso demostra que A_1 e A_2 são paralelos. Para verificar se $A_2 \subset A_1$, é suficiente verificar se $(1,3,1,1) \in A_1$. O sistema linear correspondente é $(1,3,1,1) = (1,0,1,-1) + \lambda_1(1,1,-1,1) + \lambda_2(1,2,1,2)$, que é impossível, portanto $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

(2) Sejam V_1 e V_2 os dois sub-espaços direção. Para verificar se A_1 e A_2 são paralelos, temos que verificar se $V_1 = V_2$, ou seja, se a dimensão de $V_1 \cap V_2$ é 2. O sistema linear correspondente é $\lambda_1(1,1,0,3)+\lambda_2(1,-1,1,1) = \mu_1(-1,-4,0,6)+\mu_2(1,2,0,0)$, o qual tem ∞^1 soluções, portanto $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$. Isso mostra que A_1 e A_2 não são paralelos.

(3) Sejam V_1 e V_2 os dois sub-espaços direção. Para verificar se A_1 e A_2 são paralelos, temos que verificar se $V_2 \subset V_1$. Isso equivale a verificar se $(1,-5,4)$ é combinação linear de $\{(1,-1,1),(2,2,-1)\}$. Equivalentemente, podemos verificar se a dimensão de $V_1 \cap V_2$ é 1. Neste último caso o sistema linear correspondente é $\lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(2,2,-1) = \mu_1(1,-5,4)$, o qual tem ∞^1 soluções, portanto

$\dim(V_1 \cap V_2) = 1 = \dim V_2$, logo $V_2 \subset V_1$. Isso demostra que A_1 e A_2 são paralelos. Para verificar se $A_2 \subset A_1$, é suficiente verificar se $(1, -4, 4) \in A_1$. O sistema linear correspondente é $(1, -4, 4) = (1, 0, 1) + \lambda_1(1, -1, 1) + \lambda_2(2, 2, -1)$, que admite solução, portanto $A_2 \subset A_1$.

Observação: Podíamos também calcular diretamente a interseção $A_1 \cap A_2$ e verificar que tem dimensão 1. Isso implica que $A_2 \subset A_1$, portanto, em particular, são paralelos.

(4) Sejam V_1 e V_2 os dois sub-espaços direção. Para verificar se A_1 e A_2 são paralelos, temos que verificar se $V_1 = V_2$, ou seja, se a dimensão de $V_1 \cap V_2$ é 2. O sistema linear correspondente é $\lambda_1(0, 1, 1) + \lambda_2(1, 2, 2) = \mu_1(-1, 0, 0) + \mu_2(1, 3, 3)$, o qual tem ∞^2 soluções, portanto $V_1 = V_2 = V_1 \cap V_2$. Isso mostra que A_1 e A_2 são paralelos. Para verificar se $A_1 = A_1$, é suficiente verificar se $(2, 4, 3) \in A_1$ ou, equivalentemente, se $(1, 1, 0) \in A_2$. No primeiro caso o sistema linear correspondente é $(2, 4, 3) = (1, 1, 0) + \lambda_1(0, 1, 1) + \lambda_2(1, 2, 2)$, que admite solução, portanto $A_1 = A_2$.

Observação: Podíamos também calcular diretamente a interseção $A_1 \cap A_2$ e verificar que tem dimensão 2. Isso implica que $A_1 = A_2$, portanto, em particular, são paralelos.

(5) Sejam V_1 e V_2 os dois sub-espaços direção. Para verificar se A_1 e A_2 são paralelos, temos que verificar se $V_2 \subset V_1$, ou seja, se a dimensão de $V_1 \cap V_2$ é 1. O sistema linear correspondente é $\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 2, 1) = \mu_1(3, 3, 2)$, o qual só tem a solução nula, portanto $V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\}$. Isso mostra que A_1 e A_2 não são paralelos.

CAPíTULO 3

Álgebra das matrizes e aplicações

Parte I

3.1. (1) Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes diagonais de ordem n e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Seja $C = [c_{ij}] = \lambda A + \mu B$ e provemos que também C é diagonal. Temos que $a_{ij} = b_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Ademais, $c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$, portanto, se $i \neq j$, temos que $c_{ij} = \lambda 0 + \mu 0 = 0$, logo C é diagonal. (2) $-$ (3) A prova é parecida à precedente.

3.2. Método de Laplace:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ \boxed{0 \quad 2 \quad 0 \quad 0} \\ 1 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad -1} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = -2(-3+0) = 6.$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} \boxed{0 \quad 0 \quad -1 \quad 0} \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ \boxed{0 \quad 2 \quad 0} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 8.$$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{3} & 2 & -4 & 1 \\ 2 & \boxed{0} & 2 & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{0} & -1 & 2 & 5 \\ 1 & \boxed{0} & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & -1 & \boxed{2} & 5 \\ 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 1} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = 6(1+0) = 6.$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{-2} & 2 & -4 & 1 \\ 2 & \boxed{0} & 2 & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{0} & -1 & -1 & 6 \\ 1 & \boxed{0} & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 2 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & -1 & \boxed{-1} & 6 \\ 1 & 1 & \boxed{0} & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 1} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 2(1+0) = 2.$$

$$(5)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 3 & 1 & 5 & \boxed{2} \\ 1 & -2 & 1 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 2 & 0 & 2 & \boxed{0} \\ -1 & 2 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & -2 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 2 & \boxed{0} & 2 \\ -1 & 2 & \boxed{0} & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 1} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \\ -1 \quad 2 \quad 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = 2(0+4) = 8.$$

Escalonamento:

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} II \to II - 2I \\ III \to \frac{1}{2}III \\ IV \leftrightarrow IV - I \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, II \leftrightarrow IV,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{matrix} III \to III + 7II \\ IV \to IV - 2II \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, III \leftrightarrow IV,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, IV \to IV - 2III, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $(-1)^2 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}, I \text{ col} \leftrightarrow III \text{ col}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} II \to II + 3I \\ III \to III + I \\ IV \to IV - 4I \end{matrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} III \to III - 2II \\ IV \to IV + II \end{matrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{matrix} IV \to \frac{1}{4}IV \\ III \leftrightarrow IV \end{matrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{bmatrix}, IV \to IV + 6III, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $(-1)^2 \cdot 4 \cdot 2 = 8$.

(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} II \to II - I \\ III \to III - 2I \\ IV \to IV - I \\ V \to V - I \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, III \leftrightarrow V,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} IV \to IV + III \\ V \to V - 2III \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $-(-6) = 6$.

(4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} II \to II - I \\ III \to III - 2I \\ IV \to IV - I \\ V \to V - I \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, III \leftrightarrow V,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} IV \to IV + III \\ V \to V - 2III \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $-(-2) = 2$.

(5)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{matrix} II \to II - I \\ III \to III - I \\ IV \to IV - I \\ V \to V + I \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, II \text{ col} \leftrightarrow V \text{ col},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, V \to V - 3IV, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Obtemos $-(-8) = 8$.

3.3. Seja $A = [\underline{a}_1 \mid \cdots \mid \underline{a}_n]$. Sendo o determinante linear em cada coluna, temos que $\det[\lambda_1\underline{a}_1 \mid \cdots \mid \lambda_n\underline{a}_n] = \lambda_1 \cdots \lambda_n \det A$. Pondo $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = -1$, obtemos que $\det(-A) = (-1)^n \det A$.

3.4. Como $\det(A) = \det(A^T)$, pelo exercício precedente temos que $\det(A) = (-1)^n \det(A^T) = (-1)^n \det(A)$, logo, se n for ímpar, obtemos que $\det(A) = -\det(A)$, ou seja, $\det(A) = 0$.

3.5. Matriz dos cofatores:

$$(1)\ \det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{0} & 2 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 3 \\ \boxed{0} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = -(A^C)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(2)\ \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 1 \\ 3 & \boxed{0} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

$$A^C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^C)^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$(3)\ \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = (A^C)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(4) $\det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad -1} \\ -1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-3) - (-3) = 9.$

$$A^C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{9}(A^C)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(5) $\det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \\ 1 \quad 1 \quad 2 \\ 3 \quad 2 \quad 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1.$

$$A^C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = -(A^C)^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Duplo escalonamento:

(1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], (I, II, III) \to (II, III, I),$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], III \to III - 2I,$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II + III \\ III \to -III \end{array},$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right], I \to I - II - 3III,$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

(2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - 3I \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right], III \to -\tfrac{1}{2} III,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right], I \to I - III,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

(3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II + I \\ III \to III - I \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to 3II \\ III \to 4III \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -12 & -8 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right], III \to III + II,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right], II \to \tfrac{1}{12}(II - 9III),$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right], I \to I - 3II - 2III,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

(4)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to II + I \\ III \to III - I \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], \begin{array}{c} II \to \frac{1}{3}II \\ III \to \frac{1}{3}III \end{array},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right], I \to I - II + III,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

(5)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], (I, II, III) \to (II, III, I),$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], II \to II - 3I,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], II \to -II,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], II \to II - 4III,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], I \to I - II - 2III,$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

3.6. Seja:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = 2$ e $\beta = \gamma = 1$. Seja:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = -2$ e $\beta = \gamma = -\frac{2}{3}$. Seja:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso é claro que $\alpha = \gamma = 0$ e $\beta = 2$. Por isso:

$$\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Invertendo a matriz obtemos:

$$\mu(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Podemos também calcular $\mu(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ escrevendo os vetores de $\mathcal{A}$ como combinação dos de $\mathcal{B}$.

3.7. Podemos deduzir imediatamente do texto que:

$$\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mu(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A partir disso, temos que:

$$\mu(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mu(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mu(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \mu(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cdot \mu(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu(\mathcal{C}, \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \cdot \mu(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Também podíamos usar a identidade $\mu(\mathcal{C}, \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A}, \mathcal{C})^{-1}$.

3.8. Temos que:

$$\det \mu(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k(2 - k).$$

Por isso, $\mathcal{B}$ é uma base se, e somente se, $k \neq 0, 2$.

3.9. Invertendo a matriz temos que:

$$\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sejam A e B as matrizes cujas colunas são os elementos respetivamente de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Temos que $A \cdot \mu(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = B$, logo podemos calcular B e obtemos a seguinte base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

3.10. Invertendo a matriz temos que:

$$\mu(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

O vetor das coordenadas de $\underline{v}$ em relação a $\mathcal{A}$ é $(2, -1, 1)$, logo o das coordenadas de $\underline{v}$ em relação a $\mathcal{B}$ é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Por isso, $\underline{v} = 5\underline{b}_1 - 3\underline{b}_2 - 3\underline{b}_3$.

Parte II

3.11. Método de Laplace:

(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) - (-1) + 1 = 1.$$

Por isso, $\mathrm{rk}(A) = 3$. As colunas de $\mathcal{A}$ formam uma família independente e as linhas de $\mathcal{A}$ também.

(2) Observamos que, entre as linhas, vale a relação $III = II - 2I$, portanto $\mathrm{rk}(A) \leq 2$. Se não reparamos nisso, podemos calcular os determinantes de ordem 3:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 0} \\ 1 \quad -1 \quad 1 \\ -1 \quad -7 \quad 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 3 \cdot 2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 4} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -7 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 14 - 3(-6) + 4(-8) - 0.$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 4} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 4 \cdot 2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & \boxed{0} & 4 \\ -1 & \boxed{1} & 1 \\ -7 & \boxed{1} & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 7 = 0.$$

Vamos escolher a seguinte submatriz de ordem 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

O determinante e 3, portanto o posto de A é 2. As primeiras duas linhas formam uma sub-família maximal independente e a segunda e a terceira coluna também.

(3) Tirando a primeira linha, temos que

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

portanto $\mathrm{rk}(A) = 2$. As duas colunas formam uma família independente e a segunda e a terceira linha formam uma sub-família maximal independente das linhas.

(4) Observamos que, entre as linhas, vale a relação $III = 3I - II$. Em alternativa, o leitor pode verificar que todas as sub-matrizes de ordem 3 têm determinante nulo. Escolhemos a seguinte sub-matriz de ordem 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

O determinante é 9, portanto $\mathrm{rk}(A) = 2$. A segunda e a terceira linha formam uma subfamília maximal independente e a primeira e a segunda coluna também.

(5) O leitor pode verificar que o determinante de A e de todas as sub-matrizes de ordem 3 (que são 16 em total, pois se obtêm tirando uma linha e uma coluna) têm determinante nulo. Mais rapidamente, podemos observar que, entre as colunas, vale a relação $III = II - I$, portanto podemos tirar a terceira coluna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 7 & -6 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Não é imediato achar mais uma relação de dependência linear, mas, tendo tirado uma coluna, ficam 3 sub-matrizes de ordem 3 em total, portanto podemos calcular os determinantes correspondentes e verificar que são todos nulos. Em alternativa, podemos observar que, entre as linhas, vale a relação $IV = 2II - III$, portanto podemos tirar a quarta linha, obtendo uma matriz de ordem 3, cujo determinante é nulo.

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 7 \\ -3 & -5 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & -6 \\ -2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz destacada é 1, portanto $\mathrm{rk}(A) = 2$. As primeiras duas colunas formam uma sub-família maximal independente e as primeiras duas linhas também.

Escalonamento:

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} II \to II - 2I \\ III \to III - 3I \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, III \to III - II, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3 pivot, portanto a família das colunas e a das linhas de A são independentes, logo são a única sub-família maximal independente de si mesmas.

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -7 \end{bmatrix}, \begin{matrix} II \to II - I \\ III \to III + I \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$
$$III \to III - II, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2 pivot. Como não trocamos linhas nem colunas, as primeiras duas colunas da matriz de partida formam uma sub-família maximal independente e as primeiras duas linhas também.

(3)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{matrix} II \to 2II - 3I \\ III \to 2III - I \end{matrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2 pivot. Como não trocamos linhas nem colunas, as primeiras duas colunas da matriz de partida formam uma sub-família maximal independente e a primeira e a terceira linha duas linhas também.

(4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, II \to II - 3I, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$III \to III - II, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2 pivot. Como não trocamos linhas nem colunas, as primeiras duas colunas da matriz de partida formam uma sub-família maximal independente e as primeiras duas linhas também.

(5)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 7 & 4 & -6 \\ -3 & -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{matrix} III \to III - 3I \\ IV \to IV + 3I \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-3} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-3} \end{bmatrix}.$$

2 pivot. Como não trocamos linhas nem colunas, as primeiras duas colunas da matriz de partida formam uma sub-família maximal independente e as primeiras duas linhas também.

3.12. (1) Vamos escolher as últimas três componentes.

$$\left|\begin{array}{ccc} k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ \multicolumn{3}{c}{\boxed{0 \quad 1 \quad 1}} \end{array}\right| = -\begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2k-2) + (k-1) = 1-k.$$

Se $k \neq 1$ a família é independente. Se $k = 1$ temos:

$$\left[\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cancel{1} \\ \cancel{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \cancel{2} \\ \cancel{1} \end{matrix} \end{array}\right].$$

O último vetor é a soma dos primeiros dois. O determinante da matriz destacada é -1, logo os primeiros dois vetores formam uma sub-família maximal independente.

(2) Vamos escolher as últimas três componentes.

$$\left|\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\boxed{0 \quad 1 \quad k}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k - 1.$$

Se $k \neq 1$ a família é independente. Se $k = 1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cancel{2} \\ 0 & 1 & \cancel{1} \\ 0 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & 1 & \cancel{2} \end{bmatrix}.$$

O último vetor é a soma dos primeiros dois. O determinante da matriz destacada é 1, logo os primeiros dois vetores formam uma sub-família maximal independente.

(3) Vamos escolher as últimas três componentes.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k(1-k).$$

Se $k \neq 0, 1$ a família é independente.

Se $k = 0$ temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz destacada é 1, logo a família é independente.

Se $k = 1$ temos:

$$\begin{bmatrix} \cancel{-1} & -1 & 1 \\ \cancel{0} & 0 & 1 \\ \cancel{1} & 1 & 1 \\ \cancel{1} & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O primeiro vetor é igual ao segundo. O determinante da matriz destacada é 1, os últimos dois vetores formam uma sub-família maximal independente.

Afinal, para $k \neq 1$ a família é independente, enquanto, para $k = 1$, os últimos dois vetores formam uma sub-família maximal independente.

(4) Vamos escolher a primeira, a segunda e a quarta componente.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ k & -1 & 0 \\ 2k & -2 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 2k & -2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ k & -1 \end{vmatrix} = k(-3-k).$$

Se $k \neq 0, -3$ a família é independente.

Se $k = 0$ temos:

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & 1 & 1 \\ \cancel{0} & -1 & 0 \\ \cancel{-6} & 0 & -2 \\ \cancel{0} & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

O primeiro vetor é igual a três vezes o terceiro. O determinante da matriz destacada é 1, logo os últimos dois vetores formam uma sub-família maximal independente.

Se $k = -3$ temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz destacada é -15, logo a família é independente.

Afinal, para $k \neq 0$ a família é independente, enquanto, para $k = 0$, os últimos dois vetores formam uma sub-família maximal independente.

(5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -k \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -k(-k-1) = k(k+1).$$

Se $k \neq 0, -1$ a família é independente. Se $k = 0$ ou $k = -1$, o máximo número possível de vetores independentes é 3.

Se $k = 0$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz destacada é 1, portanto os primeiros três vetores formam uma sub-família maximal independente.

Se $k = -1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz destacada é -1, portanto os primeiros três vetores formam uma sub-família maximal independente.

Afinal, para $k \neq 0, -1$ a família é independente, enquanto, para $k = 0$ ou $k = -1$, os primeiros três vetores formam uma sub-família maximal independente.

3.13. A seguinte sub-matriz é triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & k & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & k-1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & k+3 \end{bmatrix},$$

portanto podemos calcular facilmente o determinante, sendo igual a $k(k-1)(k+3)$. Logo, para $k \neq 0, 1, -3$ o posto de A é igual a 4.

Para $k = 0$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Aplicando duas vezes o método de Laplace à última coluna da sub-matriz destacada, obtemos:

$$3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9,$$

logo o posto de A é igual a 4.

Para $k = 1$ temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cancel{0} \\ -1 & 2 & 1 & 0 & \cancel{0} \\ -2 & 1 & 1 & 0 & \cancel{0} \\ 3 & 0 & 1 & 2 & \cancel{4} \end{bmatrix}.$$

A última coluna foi cortada por ser o dobro da quarta. Temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) = 0.$$

De fato, podemos observar que, entre as colunas, vale a relação $I = II - 3III$. Isso mostra que $\mathrm{rk}(A) \leq 3$. Consideremos a seguinte sub-matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de Laplace à última coluna vemos que o determinante é $2(2 - 1) = 2$, logo $\mathrm{rk}(A) = 3$.

Enfim, para $k = -3$ temos:

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{1} & 1 & 0 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{-1} & 2 & -3 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{-2} & 1 & 1 & -4 & \cancel{0} \\ \cancel{3} & 0 & 1 & 2 & \cancel{0} \end{bmatrix}.$$

A última coluna foi cortada por ser nula e a primeira por ser a soma entre a segunda e a terceira. Isso mostra que $\mathrm{rk}(A) \leq 3$. Consideremos a seguinte sub-matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sendo uma sub-matriz triangular superior, vemos que o determinante é 12, logo $\mathrm{rk}(A) = 3$.

Afinal, o posto de A é igual a 3 para $k = 1$ e $k = -3$.

3.14. (1)

$$[A \mid \underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & k & \bigm| & 1 \\ -1 & 2 & -2 & \bigm| & 1 \\ 1 & k & 2 & \bigm| & 0 \end{bmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{0} & 2 & k \\ \boxed{-1} & 2 & -2 \\ \boxed{1} & k & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -k(k+2).$$

Para $k \neq 0, -2$ temos uma solução.

Para $k = 0$:

$$[A \mid \underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & \bigm| & 1 \\ -1 & 2 & -2 & \bigm| & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \bigm| & 0 \end{bmatrix}.$$

A terceira coluna é o duplo da primeira e a quarta é a metade da segunda. O determinante da matriz destacada é 2, portanto $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 2$, logo há $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluções.

Para $k = -2$:

$$[A \mid \underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & \bigm| & 1 \\ -1 & 2 & -2 & \bigm| & 1 \\ 1 & -2 & 2 & \bigm| & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

Nesse caso $\mathrm{rk}(A) = 2$ e $\mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 3$, portanto o sistema é impossível.

Para $k \neq 0, -2$, vamos calcular a única solução com o método de Cramer. Temos que:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{0} & 2 & k \\ \boxed{-1} & 2 & -2 \\ \boxed{1} & k & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -k(k+2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & k \\ \boxed{1} & 2 & -2 \\ \boxed{0} & k & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ k & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{vmatrix} = k(k+2)$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \boxed{0} & 1 & k \\ \boxed{-1} & 1 & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -k$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} \boxed{0} & 2 & 1 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 \\ \boxed{1} & k & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -k.$$

Por isso:

$$x = -1 \qquad y = \frac{1}{k+2} \qquad z = \frac{1}{k+2}.$$

(2)

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 1 \end{vmatrix} = -k(k+2).$$

Para $k \neq 0, -2$ temos uma solução.

Para $k = 0$:

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

O determinante da matriz destacada é -1, como se pode verificar facilmente aplicando o método de Laplace à primeira coluna, portanto $\text{rk}(A) = 2$ e $\text{rk}([A \mid \underline{b}]) = 3$, logo o sistema é impossível.

Para $k = -2$:

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

Também neste caso $\text{rk}(A) = 2$ e $\text{rk}([A \mid \underline{b}]) = 3$, logo o sistema é impossível.

Para $k \neq 0, -2$, vamos calcular a única solução com o método de Cramer. Temos que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 1 \end{vmatrix} = -k(k+2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - k$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix} = k^2 - k + 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3k.$$

Por isso:

$$x = \frac{1}{k} \qquad y = -\frac{k^2 - k + 1}{k^2 + 2k} \qquad z = \frac{3k - 1}{k^2 + 2k}.$$

(3)

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k - 1.$$

Para $k \neq 1$ temos que $\mathrm{rk}(A) = 2$. Para $k = 1$, as duas colunas de A são iguais e não nulas, portanto $\mathrm{rk}(A) = 1$. Ademais:

$$\det([A \mid \underline{b}]) = \left|\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(k-1)^2.$$

Logo, para $k \neq 1$ temos que $\mathrm{rk}(A) = 2$ e $\mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 3$, portanto o sistema é impossível. Para $k = 1$ as três colunas de $[A \mid \underline{b}]$ são iguais e não nulas, logo $\mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 1$, portanto temos ∞^2 soluções.

Afinal temos ∞^2 soluções para $k = 1$ e nenhuma solução para $k \neq 1$.

(4)

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right].$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k - 1.$$

Para $k \neq 1$ temos que $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 2$, portanto temos ∞^1 soluções. Para $k = 1$, as duas linhas de A são iguais e não nulas, portanto $\mathrm{rk}(A) = 1$; ademais:

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Logo, para $k = 1$ temos que $\mathrm{rk}(A) = 1$ e $\mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 2$, portanto o sistema é impossível.

Afinal temos ∞^1 soluções para $k \neq 1$ e nenhuma solução para $k = 1$.

(5)

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ k & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ k & -1 \end{vmatrix} = k(k-2).$$

Para $k \neq 0, 2$ temos uma solução.

Para $k = 0$:

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Como o determinante precedente é nulo, temos que $\mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) \leq 2$. É fácil verificar que $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 2$, logo temos ∞^1 soluções.

Para $k = 2$:

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Neste caso $\mathrm{rk}(A) = 2$ e $\mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 3$, logo o sistema é impossível.

Para $k \neq 0, 2$, vamos calcular a única solução com o método de Cramer. Temos que:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ k & -1 & -1 \end{vmatrix} = k(k-2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+2k) + (-1) = 2k$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2(-1+2k) + (-2-k) = -5k$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2) - (2-k) = k.$$

Por isso:

$$x = \frac{2}{k-2} \qquad y = -\frac{5}{2-k} \qquad z = \frac{1}{k-2}.$$

3.15. (1) Temos que verificar se o sistema $x(1,2,1) + y(1,1,-1) = (-1,3,9)$ admite solução. A matriz completa é a seguinte:

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & & -1 \\ & & 3 \\ 1 & -1 & 9 \end{array}\right].$$

O determinante da sub-matriz destacada é -1, logo $\mathrm{rk}(A) = 2$. Ademais:

$$\det([A \mid \underline{b}]) = \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 9 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por isso também $\mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 2$, logo o sistema admite solução. Isso significa que $\underline{v}$ é combinação linear de $\mathcal{A}$.

(2) Temos que verificar se o sistema $x(1,1,1,2) + y(-1,1,3,1) = (0,1,0,2)$ admite solução. A matriz completa é a seguinte:

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & & 0 \\ & & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

O determinante da sub-matriz destacada é 2, logo $\mathrm{rk}(A) = 2$. Ademais, consideremos a seguinte sub-matriz:

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}\right] = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4.$$

Por isso $\mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 3$, logo o sistema é impossível. Isso significa que $\underline{v}$ não é combinação linear de $\mathcal{A}$.

(3) Temos que verificar se o sistema $x(1,1,3) + y(1,2,1) + z(2,3,4) = (0,0,2)$ admite solução. A matriz completa é a seguinte:

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right].$$

Temos que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De fato, podemos observar que a terceira coluna é a soma entre as primeiras duas, logo $\mathrm{rk}(A) \leq 2$. É fácil verificar que $\mathrm{rk}(A) = 2$. Consideremos a seguinte sub-matriz da matriz completa:

$$[A \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de Laplace à última coluna, é fácil verificar que o determinante é -2, portanto $\mathrm{rk}([A \mid \underline{b}]) = 3$, logo o sistema é impossível. Isso significa que $\underline{v}$ não é combinação linear de $\mathcal{A}$.

3.16. (1) Como nas três equações aparece a variável x com outra variável, podemos pôr $x = t$. Obtemos $x = t$, $y = 3 - t$, $z = t$ e $w = 2 - t$, logo obtemos a seguinte representação paramétrica:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(2) Sejam $z = t$ e $y = u$. Obtemos $x = 5 + t$, $y = u$ e $z = t$, logo obtemos a seguinte representação paramétrica:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

(3) Podemos isolar y e z em função das demais variáveis, portanto pomos $x = t$ e $w = u$ e obtemos $x = t$, $y = 1 - t + u$, $z = 2t - 3u$ e $w = u$, logo obtemos a seguinte representação paramétrica:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(4) Vamos resolver o sistema por escalonamento.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} II \to II - I \\ III \to III - 2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} III \to III - 2II \\ II \to \frac{1}{2} II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right].$$

Obtemos a única solução $x = y = z = 1$, portanto trata-se de um ponto, cuja única representação paramétrica é $(1, 1, 1)$.

(5) Pomos $z = t$ e obtemos $x = 1-t$, $y = 2-t$, $z = t$ e $w = -1+t$, logo obtemos a seguinte representação paramétrica:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

3.17. (1) *Método I.* Podemos escrever a representação paramétrica da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 1. \end{cases}$$

Pela segunda equação $t = y - 1$, logo a primeira se torna $x - 3y = -2$. Obtemos o sistema reduzido:

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ z = 1. \end{cases}$$

Método II. O posto da seguinte matriz tem que ser 1:

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & x-1 \\ 1 & y-1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}.$$

A sub-matriz destacada tem determinante não nulo, logo:

$$\begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ 1 & y-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Obtemos o sistema reduzido:

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ z = 1. \end{cases}$$

(2) *Método I.* Podemos escrever a representação paramétrica da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = 1 + t + u \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \\ w = 1 - t + u. \end{cases}$$

Pela segunda equação $t = -y$ e, pela primeira, $u = x + y - 1$, logo a terceira e a quarta se tornam respetivamente $2y + z = 1$ e $x + 2y - w = 0$. Obtemos o sistema reduzido:

$$\begin{cases} 2y + z = 1 \\ x + 2y - w = 0. \end{cases}$$

Método II. O posto da seguinte matriz tem que ser 2:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} x-1 \\ y \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} z-1 \\ w-1 \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

A sub-matriz destacada tem determinante não nulo, logo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 0 & y \\ 2 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 0 & y \\ -1 & 1 & w-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Obtemos o sistema reduzido:

$$\begin{cases} 2y + z = 1 \\ x + 2y - w = 0. \end{cases}$$

(3) *Método I.* Podemos escrever a representação paramétrica da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = 1 + t + u + 2a \\ y = t + a \\ z = 1 + t + u + a \\ w = -3t + 2u + 2a. \end{cases}$$

A matriz representativa do sistema, nas variáveis t, u e a, é a seguinte:

$$\left[\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -3 & 2 & 2 \end{matrix} & w \end{array}\right].$$

A sub-matriz destacada tem determinante não nulo, logo as primeiras três equações formam um sistema com uma solução. Podemos achá-la invertendo a matriz ou por escalonamento. Vamos usar o escalonamento:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z-1 \end{array}\right] \begin{matrix} II \to II - I \\ III \to III - I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x-1 \\ 0 & -1 & -1 & y-x+1 \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array}\right].$$

Obtemos $a = x - z$, $u = z - y - 1$ e $t = -x + y + z$. Substituindo estas expressões na última equação do sistema obtemos:

$$5x - 5y - 3z - w = 2.$$

Método II. Uma equação do hiperplano é dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & x-1 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 1 \quad y} \\ 1 & 1 & 1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 & w \end{vmatrix} = 0.$$

Aplicando a regra de Laplace à linha destacada obtemos:

$$
\begin{aligned}
&-\begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{x-1} \\ 1 & 1 & \boxed{z-1} \\ 2 & 2 & \boxed{w} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{x-1} \\ 1 & 1 & \boxed{z-1} \\ -3 & 2 & \boxed{w} \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{-3} & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\
&-\big((x-1)0 - (z-1)(-2) + w(-1)\big) - \big((x-1)5 \\
&\qquad\qquad - (z-1)5 + w0\big) + y\big(0 - (-2) - 3(-1)\big) = 0 \\
&5x - 5y - 3z - w = 2.
\end{aligned}
$$

(4) Como $\{(1,2),(2,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, o sub-espaço dado coincide com $\mathbb{R}^2$, logo a única representação cartesiana é o sistema vazio. Vamos mostrar que com os dois métodos que conhecemos chegamos ao sistema vazio.

Método I. Podemos escrever a representação paramétrica da seguinte maneira:

$$
\begin{cases} x = 1 + t + 2u \\ y = 1 + 2t + u. \end{cases}
$$

A matriz representativa do sistema correspondente, nas variáveis t e u, é:

$$
\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y-1 \end{array}\right].
$$

Como o determinante da matriz incompleta é -3, temos uma solução, ou seja, podemos escrever t e u em função de x e y de modo único. Contudo, não há nenhuma equação a mais na qual podemos substituir os valores correspondentes para ligar x e y, portanto ficamos com o sistema vazio.

Método II. O posto da seguinte matriz tem que ser 2:

$$
\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} x-1 \\ y-1 \end{matrix} \end{bmatrix}.
$$

A sub-matriz destacada tem determinante não nulo, portanto o posto desta matriz é sempre 2, sem impor nenhuma condição. Por isso, obtemos o sistema vazio.

(5) *Método I.* Podemos escrever a representação paramétrica da seguinte maneira:

$$
\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \\ w = 2 - t. \end{cases}
$$

Pela primeira equação $t = x - 1$, logo, substituindo esta expressão nas demais equações, obtemos:

$$
\begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = -1 \\ x + w = 3. \end{cases}
$$

Método II. O posto da seguinte matriz tem que ser 1:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & x-1 \\ -1 & y-1 \\ 1 & z-2 \\ -1 & w-2 \end{bmatrix}.$$

A sub-matriz destacada tem determinante não nulo, logo:

$$\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & y-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & w-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Obtemos o sistema reduzido:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-z=-1 \\ x+w=3. \end{cases}$$

3.18. (1) Unindo os dois sistemas obtemos o seguinte:

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y+2w=1 \\ x+y-z+2w=2 \\ x+y+z+4w=5. \end{cases}$$

A matriz representativa é a seguinte:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right].$$

A terceira linha foi cortada por ser a soma entre a primeira e a segunda. O leitor pode verificar que o determinante da matriz destacada é 2, logo as equações I, II e IV formam um sistema reduzido que representa $A_1 \cap A_2$:

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y+2w=1 \\ x+y+z+4w=5. \end{cases}$$

Trata-se de uma reta.

(2) Unindo os dois sistemas obtemos o seguinte:

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x-y=0 \\ y+z=2. \end{cases}$$

A matriz representativa é a seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

O leitor pode verificar que o determinante da matriz incompleta é 2, logo este sistema é reduzido, portanto é uma representação cartesiana de $A_1 \cap A_2$. Trata-se de um ponto.

(3) Unindo os dois sistemas obtemos o seguinte:

$$\begin{cases} x + y - z + w + u = 1 \\ x - y - z - w + u = 0 \\ x - z = 1 \\ 4x + y - 4z + w + 3u = 3 \\ y + z + w - u = 0. \end{cases}$$

A matriz representativa é a seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Vamos escalonar a matriz:

$$\begin{array}{r} \\ II \to II - I \\ III \to III - I \\ IV \to IV - 4I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ II \to II - 2III \\ IV \to IV - 3III \\ V \to V + III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

A quarta linha foi cortada por ser igual à segunda. Obtemos quatro pivot nas linhas I, II, III e V, portanto uma representação cartesiana de $A_1 \cap A_2$ é a seguinte:

$$\begin{cases} x + y - z + w + u = 1 \\ x - y - z - w + u = 0 \\ x - z = 1 \\ y + z + w - u = 0. \end{cases}$$

Trata-se de uma reta em $\mathbb{R}^5$.

(4) Neste caso poderíamos achar uma equação cartesiana de A_2 e, a partir de duas representações cartesianas, achar uma da interseção. Poderíamos também achar uma representação paramétrica de A_1, determinar uma representação paramétrica de $A_1 \cap A_2$ e encontrar uma representação cartesiana. Equivalentemente, vamos aplicar a seguinte técnica. O genérico ponto de A_2 é representado parametricamente

por:

$$(*)\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t + u \\ z = 2 - t \\ w = 3 + u. \end{cases}$$

Para que esse ponto pertença à interseção, tem que verificar as duas equações que definem A_1, ou seja:

$$(**)\begin{cases} (3 + t) - (2 + t + u) - (2 - t) = -1 \\ (3 + t) - (3 + u) = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema $(**)$, nas variáveis t e u, e substituindo o resultado no sistema $(*)$, obtemos uma representação paramétrica de $A_1 \cap A_2$. As duas equações de $(**)$ equivalem a $t = u$, logo obtemos ∞^1 soluções $t = a$, $u = a$. Com isso o sistema $(*)$ se torna:

$$\begin{cases} x = 3 + a \\ y = 2 + 2a \\ z = 2 - a \\ w = 3 + a. \end{cases}$$

Pela primeira equação $a = x - 3$, logo as três demais dão a seguinte representação cartesiana de $A_1 \cap A_2$:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + z = 5 \\ x - w = 0. \end{cases}$$

Trata-se de uma reta em $\mathbb{R}^4$.

(5) Observando a segunda equação de A_1 e a primeira de A_2, vemos imediatamente que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

3.19. (1) O sistema que representa cartesianamente a interseção é:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema achamos uma representação paramétrica:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] II \to II - I \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1. \end{array}\right]$$

Obtemos $z = t$, $y = \frac{1}{2} - t$ e $x = \frac{1}{2}$, logo $A_1 \cap A_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \langle (0, -1, 1) \rangle$.

(2) Como fizemos no exercício 3.18, item (4), observamos que o genérico ponto de A_2 é representado parametricamente por:

$$(*)\begin{cases} x = 1 - t + u \\ y = 3 + 2t + 3u \\ z = 1 - 3t + 3u. \end{cases}$$

Para que esse ponto pertença à interseção, tem que verificar a equação que define A_1, ou seja:

$$(1 - t + u) - (3 + 2t + 3u) - (1 - 3t + 3u) = 2.$$

A equação precedente equivale a $u = -1$, logo obtemos ∞^1 soluções $t = a$, $u = -1$. Com isso o sistema $(*)$ se torna:

$$\begin{cases} x = -a \\ y = 2a \\ z = -2 - 3a, \end{cases}$$

logo $A_1 \cap A_2 = (0, 0, -2) + \langle(-1, 2, -3)\rangle$. Trata-se de uma reta em $\mathbb{R}^3$.

(3) O sistema que representa cartesianamente a interseção é:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema achamos a única solução $(1, 1, 1)$, portanto a única representação paramétrica da interseção é $A_1 \cap A_2 = (1, 1, 1)$.

(4) A primeira equação que define A_1 é $y = 2$, enquanto todo ponto de A_2 verifica $y = 1$, logo a interseção é vazia.

(5) Vamos resolver o seguinte sistema nas variáveis t_1, t_2, u_1 e u_2:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Levando todas as variáveis do lado esquerdo e os termos constantes do lado direito, obtemos a seguinte matriz representativa:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] III \to III - I \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

$$III \to III - II \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right].$$

Obtemos $u_2 = a$ e $u_1 = 1 - a$, logo a interseção é a seguinte:

$$A_1 \cap A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

3.20. (1) A união dos dois sistema homogêneos associados é a seguinte:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y+2z=0 \\ 2x-y=0 \\ x+z=0. \end{cases}$$

A matriz incompleta é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix}.$$

A última linha foi cortada por ser igual à primeira. Podemos observar que $III = 2I - II$, portanto podemos cortar também a terceira linha. Se não repararmos nisso, podemos calcular o determinante da sub-matriz formada pelas primeiras três linhas e verificar que é nulo. Como o determinante da sub-matriz destacada de ordem 2 é 1, o posto da matriz é 2, logo os dois sub-espaços direção coincidem, portanto A_1 e A_2 são paralelos.

Para verificar se coincidem, vamos considerar a matriz completa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \end{array}\right].$$

O determinante da sub-matriz destacada é -1, logo o posto da matriz completa é 3, portanto $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, ou seja, A_1 e A_2 são paralelos e distintos.

(2) A união dos dois sistema homogêneos associados é a seguinte:

$$\begin{cases} x-y+2z-w=0 \\ x+y+z-w=0 \\ 2x+3z-2w=0 \\ x-7y+5z-w=0. \end{cases}$$

A matriz incompleta é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-2} \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{bmatrix}.$$

A terceira e a quarta linha foram cortadas, pois $III = I + II$ e $IV = II - I$. Como o determinante da sub-matriz destacada é 2, o posto da matriz é 2, logo os dois sub-espaços direção coincidem, portanto A_1 e A_2 são paralelos.

Para verificar se coincidem, vamos considerar a matriz completa:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-2} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{array}\right].$$

De novo podemos observar que $III = I + II$ e $IV = II - I$, portanto também o posto da matriz completa é 2, logo $A_1 = A_2$.

Isso significa que as duas representações cartesianas são equivalentes. Isso ocorre se, e somente se, o sub-espaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, gerado pelas linhas do primeiro sistema, coincide com o gerado pelas linhas do segundo, ou seja, vale a igualdade $\langle(1,-1,2,-1,1),(1,1,1,-1,0)\rangle = \langle(2,0,3,-2,1),(0,2,-1,0,-1)\rangle$.

(3) Vamos verificar se a direção de A_2 está contida na de A_1. Isso ocorre se, e somente se, o gerador $(1,1,2,2)$ satisfaz as duas equações homogêneas de A_1. Temos que $1-1+2-2 = 0$ e $1+1-2 = 0$, logo A_1 e A_2 são paralelos. Para verificar se $A_2 \subset A_1$, temos que verificar se $(1,1,2,1) \in A_1$, ou seja, se $(1,1,2,1)$ verifica as duas equações que definem A_1. Temos que $1-1+2-1 = 1$ e $1+1-1 = 1$, logo $A_2 \subset A_1$.

(4) Desta vez não podemos verificar se as direções de A_1 satisfazem as equações que definem A_2, pois $\dim A_1 > \dim A_2$, portanto, se forem paralelos, a direção de A_2 está contida na de A_1 e não vice-versa. Pondo $w = t$ em A_2, obtemos a representação paramétrica $x = t$, $y = 2$, $z = 1$ e $w = t$, logo $A_2 = (0,2,1,0) + \langle(1,0,0,1)\rangle$. Unindo as direções de A_1 e A_2 obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O determinante da sub-matriz destacada é -1, logo as três direções são independentes, portanto A_1 e A_2 não são paralelos.

(5) A matriz cujas colunas são os geradores das duas direções é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{3} \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A primeira linha é igual à terceira e a segunda é o triplo da quarta. O determinante da sub-matriz destacada -1, logo o posto da matriz é 2, portanto A_1 e A_2 são paralelos. Para verificar se coincidem, verifiquemos se $(1,1,1,2) - (0,-2,0,1)$ pertence à direção dos dois. Como as duas direções coincidem, é suficiente considerar os geradores de A_1. Dado que $(1,1,1,2) - (0,-2,0,1) = (1,3,1,1)$, que é um gerador da direção, temos que $A_1 = A_2$, ou seja, as duas representações paramétricas são equivalentes.

CAPíTULO 4

Geometria em $\mathbb{R}^n$

Parte I

4.1. (1) $d(\underline{v},\underline{w}) = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$. (2) $d(\underline{v},\underline{w}) = \sqrt{0^2+2^2+1^2+2^2} = 3$. (3) $d(\underline{v},\underline{w}) = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$.

4.2. $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, logo $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$. (2) $\cos\theta = 0$, logo $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. (3) $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, logo $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$.

4.3. Temos que:

$$\langle \underline{v}+\underline{w}, \underline{v}+\underline{w}\rangle = \langle \underline{v},\underline{v}\rangle + 2\langle \underline{v},\underline{w}\rangle + \langle \underline{w},\underline{w}\rangle,$$

portanto, sendo $\|\underline{v}\|^2 = \langle \underline{v},\underline{v}\rangle$:

$$\langle \underline{v},\underline{w}\rangle = \tfrac{1}{2}\big(\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 - \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2\big).$$

Isso mostra que $\langle \underline{v},\underline{w}\rangle = 0$ se, e somente se, $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$.

4.4. Sendo uma norma positiva por definição, $\|\underline{v}+\underline{w}\| = \|\underline{v}-\underline{w}\|$ se, e somente se, $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}-\underline{w}\|^2$. Temos que:

$$\begin{aligned}
&\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \langle \underline{v}+\underline{w}, \underline{v}+\underline{w}\rangle = \langle \underline{v},\underline{v}\rangle + 2\langle \underline{v},\underline{w}\rangle + \langle \underline{w},\underline{w}\rangle \\
&\|\underline{v}-\underline{w}\|^2 = \langle \underline{v}-\underline{w}, \underline{v}-\underline{w}\rangle = \langle \underline{v},\underline{v}\rangle - 2\langle \underline{v},\underline{w}\rangle + \langle \underline{w},\underline{w}\rangle \\
&\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 - \|\underline{v}-\underline{w}\|^2 = 4\langle \underline{v},\underline{w}\rangle.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}-\underline{w}\|^2$ se, e somente se, $\langle \underline{v},\underline{w}\rangle = 0$.

4.5. Fixemos um referencial, com eixos ortogonais, de modo que a origem coincida com o centro do círculo e o eixo x contenha o diâmetro BC. Dessa maneira, se r for o raio do círculo, temos que $B = (-r,0)$, $C = (r,0)$ e $A = (x, \sqrt{r^2-x^2})$. Chamando de $\vec{BA}$ o vetor equivalente ao segmento orientado que une B a A, temos que $\vec{BA} = (x+r, \sqrt{r^2-x^2})$. Analogamente, $\vec{AC} = (r-x, -\sqrt{r^2-x^2})$. Por isso $\langle \vec{BA}, \vec{AC}\rangle = (r+x)(r-x) - (r^2-x^2) = 0$.

4.6. Sejam $\underline{v}_1 = (4,6,-1)$, $\underline{v}_2 = (1,-1,3)$, $\underline{v}_3 = (6,2,-1)$ e $\underline{v}_4 = (1,-3,-1)$. Devemos procurar um ponto $\underline{w}$ tal que $d(\underline{w},\underline{v}_1) = d(\underline{w},\underline{v}_2) = d(\underline{w},\underline{v}_3) = d(\underline{w},\underline{v}_4)$.

Isso equivale às três equações:

$$\begin{cases} d(\underline{w},\underline{v}_1) = d(\underline{w},\underline{v}_4) \\ d(\underline{w},\underline{v}_2) = d(\underline{w},\underline{v}_4) \\ d(\underline{w},\underline{v}_3) = d(\underline{w},\underline{v}_4). \end{cases}$$

Escolhemos $\underline{v}_4$ como ponto base, pois tem uma coordenada em comum com cada um dos demais pontos. Isso tornará levemente mais simples o sistema. Como as distâncias são positivas por definição, podemos elevar ao quadrado ambos os termos de cada igualdade, portanto obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \\ (y+1)^2 + (z-3)^2 = (y+3)^2 + (z+1)^2 \\ (x-6)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2. \end{cases}$$

O sistema parece formado por equações de segundo grau, mas é fácil verificar que os termos quadráticos se cortam, portanto obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ y + 2z = 0 \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema vemos que o único ponto que satisfaz o pedido é $(1,2,-1)$.

4.7. (1)

V_1:

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ \underline{a}'_2 &= \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_2, \underline{a}_1 \rangle \underline{a}_1 = \underline{v}_2 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}\underline{a}_1 = \left(\tfrac{7}{6}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{4}{6}\right) \\ \underline{a}_2 &= \frac{\underline{a}'_2}{\|\underline{a}'_2\|} = \left(\tfrac{7}{\sqrt{66}}, \tfrac{1}{\sqrt{66}}, -\tfrac{4}{\sqrt{66}}\right). \end{aligned}$$

Afinal obtemos a base:

$$\left\{\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\tfrac{7}{\sqrt{66}}, \tfrac{1}{\sqrt{66}}, -\tfrac{4}{\sqrt{66}}\right)\right\}.$$

V_2:

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \tfrac{1}{2}\underline{v}_1 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \\ \underline{a}'_2 &= \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_2, \underline{a}_1 \rangle \underline{a}_1 = \underline{v}_2 - \underline{a}_1 = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \\ \underline{a}_2 &= \frac{\underline{a}'_2}{\|\underline{a}'_2\|} = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \\ \underline{a}'_3 &= \underline{v}_3 - \langle \underline{v}_3, \underline{a}_1 \rangle \underline{a}_1 - \langle \underline{v}_3, \underline{a}_2 \rangle \underline{a}_2 = \underline{v}_3 - \underline{a}_1 - \underline{a}_2 = (0,1,-1,0) \\ \underline{a}_3 &= \frac{\underline{a}'_3}{\|\underline{a}'_3\|} = \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right). \end{aligned}$$

Afinal obtemos a base:

$$\left\{\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right),\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right),\left(0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}.$$

Observação: Pode-se também observar que $V_2=\{(x,y,z,x)\}=\langle(1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\rangle$, portanto, aplicando o método Grahm-Schmidt a esta base, obtemos a base ortonormal:

$$\left\{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\right\}.$$

V_3: Temos que:

$$V_3=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\-x-y-z\end{pmatrix}\right\}=\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\rangle.$$

Aplicando Grahm-Schmidt:

$$\underline{a}_1=\frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|}=\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\underline{a}_2'=\underline{v}_2-\langle\underline{v}_2,\underline{a}_1\rangle\underline{a}_1=\underline{v}_2-\sqrt{2}\underline{a}_1=\left(-\tfrac{1}{2},1,0,-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\underline{a}_2=\frac{\underline{a}_2'}{\|\underline{a}_2'\|}=\tfrac{2}{\sqrt{6}}\underline{a}_2'=\left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},0,-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\underline{a}_3'=\underline{v}_3-\langle\underline{v}_3,\underline{a}_1\rangle\underline{a}_1-\langle\underline{v}_3,\underline{a}_2\rangle\underline{a}_2=\underline{v}_3-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\underline{a}_1-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\underline{a}_2=\left(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},1,-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\underline{a}_3=\frac{\underline{a}_3'}{\|\underline{a}_3'\|}=\tfrac{3}{2\sqrt{3}}\underline{a}_3'=\left(-\tfrac{1}{\sqrt{12}},-\tfrac{1}{\sqrt{12}},\tfrac{3}{\sqrt{12}},-\tfrac{1}{\sqrt{12}}\right).$$

Afinal obtemos a base:

$$\left\{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},0,-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(-\tfrac{1}{\sqrt{12}},-\tfrac{1}{\sqrt{12}},\tfrac{3}{\sqrt{12}},-\tfrac{1}{\sqrt{12}}\right)\right\}.$$

V_4: Temos que:

$$V_3=\left\{\begin{pmatrix}2z\\y\\z\\w\end{pmatrix}\right\}=\langle\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle.$$

Neste caso só temos que normalizar $\underline{v}_1$, portanto obtemos a base:

$$\left\{\left(\tfrac{2}{\sqrt{5}},0,\tfrac{1}{\sqrt{5}},0\right),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\right\}.$$

V_5: Temos que:

$$V_5=\left\{\begin{pmatrix}y-2z+2w\\y\\z\\w\\u\end{pmatrix}\right\}=\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle.$$

Aplicando Grahm-Schmidt:

$$\begin{aligned}
&\underline{a}_1 = \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right)\\
&\underline{a}_2' = \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_2, \underline{a}_1\rangle \underline{a}_1 = \underline{v}_2 + \sqrt{2}\underline{a}_1 = \left(-1, 1, 1, 0, 0\right)\\
&\underline{a}_2 = \frac{\underline{a}_2'}{\|\underline{a}_2'\|} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)\\
&\underline{a}_3 = (0, 0, 0, 1, 0)\\
&\underline{a}_4' = \underline{v}_4 - \sqrt{2}\underline{a}_1 + \tfrac{2}{\sqrt{3}}\underline{a}_2 = \left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 1\right)\\
&\underline{a}_4 = \tfrac{3}{\sqrt{15}}\underline{a}_4' = \left(\tfrac{1}{\sqrt{15}}, -\tfrac{1}{\sqrt{15}}, \tfrac{2}{\sqrt{15}}, 0, \tfrac{3}{\sqrt{15}}\right).
\end{aligned}$$

Afinal obtemos a base:

$$\left\{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right), \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), (0, 0, 0, 1, 0), \left(\tfrac{1}{\sqrt{15}}, -\tfrac{1}{\sqrt{15}}, \tfrac{2}{\sqrt{15}}, 0, \tfrac{3}{\sqrt{15}}\right)\right\}.$$

4.8. (1)

V_1: Para achar $V_1^\perp$ temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z - w = 0 \\ x - z - w = 0 \end{cases}$$

$II : x = z + w$, $I : y = -z$, logo:

$$V_1^\perp = \begin{Bmatrix} t+u \\ -t \\ t \\ u \end{Bmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

V_2: $x + y + z + w = 0$, logo:

$$V_2^\perp = \begin{Bmatrix} t \\ u \\ s \\ -t-u-s \end{Bmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

V_3 é formado pelos vetores (x, y, z, w) tais que $(x, y, z, w) \bullet (1, 1, 1, 1) = 0$, portanto $V_3^\perp = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$.

V_4 é formado pelos vetores (x, y, z, w) tais que $(x, y, z, w) \bullet (1, 0, -1, 0) = 0$ e $(x, y, z, w) \bullet (1, 1, 0, -1) = 0$, portanto $V_4^\perp = \langle (1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, -1) \rangle$.

V_5: Para achar $V_5^\perp$ temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z + 2w = 0 \\ x - z + w + 2u = 0 \end{cases}$$

$I : x = y - 2z - 2w$, $II : y = 3z + w - 2u$, portanto $x = z - w - 2u$, logo:

$$V_1^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 - t_2 - 2t_3 \\ 3t_1 + t_2 - 2t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

4.9. (1)

V_1: *Método I*: Para achar $V_1^\perp$ temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Obtemos $x = y = -z$, logo $V_1^\perp = \langle (1, 1, -1) \rangle$. Seja:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = \beta = \frac{2}{3}$ e $\gamma = \frac{1}{3}$, logo:

$$\pi_{V_1}(\underline{v}_1) = \tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Método II: Vamos ortonormalizar a base de V_1:

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \underline{a}_2' &= (0, 1, 1) - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \underline{a}_1 = \left(-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}\right) \\ \underline{a}_2 &= \frac{\underline{a}_2}{\|\underline{a}_2\|} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned}$$

Temos que:

$$\pi_{V_1}(\underline{v}_1) = \langle \underline{v}_1, \underline{a}_1 \rangle \underline{a}_1 + \langle \underline{v}_1, \underline{a}_2 \rangle \underline{a}_2 = \sqrt{2} \underline{a}_1 + \tfrac{2}{\sqrt{6}} \underline{a}_2 = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}\right).$$

Método III: É fácil ortonormalizar a base de $V_1^\perp$, obtendo $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$, portanto $\pi_{V_1^\perp}(\underline{v}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, logo $\pi_{V_1}(\underline{v}_1) = \underline{v}_1 - \pi_{V_1^\perp}(\underline{v}_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

V_2: *Método I*: Para achar $V_2^\perp$ temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + z + w = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Obtemos $x = y - z$ e $w = -z$, logo $V_2^\perp = \langle(1,1,0,-1),(-1,0,1,0)\rangle$. Seja:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = \frac{6}{5}$, $\beta = -\frac{4}{5}$, $\gamma = \frac{6}{5}$ e $\delta = \frac{3}{5}$, logo:

$$\pi_{V_2}(\underline{v}_2) = \tfrac{6}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \tfrac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\\frac{6}{5}\end{pmatrix}.$$

Método II: Vamos ortonormalizar a base de V_2:

$$\begin{aligned}\underline{a}_1 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}},0,\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ \underline{a}_2' &= (1,-1,1,0) - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\underline{a}_1 = \left(\tfrac{1}{3},-1,\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3}\right)\\ \underline{a}_2 &= \frac{\underline{a}_2}{\|\underline{a}_2\|} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{15}},-\tfrac{3}{\sqrt{15}},\tfrac{1}{\sqrt{15}},-\tfrac{2}{\sqrt{15}}\right).\end{aligned}$$

Temos que:

$$\pi_{V_2}(\underline{v}_2) = \langle\underline{v}_2,\underline{a}_1\rangle\underline{a}_1 + \langle\underline{v}_2,\underline{a}_2\rangle\underline{a}_2 = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\underline{a}_1 - \tfrac{4}{\sqrt{15}}\underline{a}_2 = \left(\tfrac{2}{5},\tfrac{4}{5},\tfrac{2}{5},\tfrac{6}{5}\right).$$

V_3: *Método I*: Para achar $V_3^\perp$ temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y + w = 0\\ x - u = 0.\end{cases}$$

Obtemos $w = -y$ e $u = x$, logo $V_3^\perp = \langle(1,0,0,0,1),(0,1,0,-1,0),(0,0,1,0,0)\rangle$. Seja:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = \frac{1}{2}$ e $\varepsilon = -1$, logo:

$$\pi_{V_3}(\underline{v}_3) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

Método II: Vamos ortonormalizar a base de V_3:

$$\begin{aligned}\underline{a}_1 &= \left(0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)\\ \underline{a}_2 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Temos que:

$$\pi_{V_3}(\underline{v}_3) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\big) = \big(0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\big).$$

V_4: *Método I*: Já sabemos que $V_4^\perp = \langle(1,-1,0,2)\rangle$. Por isso, $V_4 = \{(x,y,z,w) : x - y + 2w = 0\} = \langle(1,1,0,0),(0,0,1,0),(-2,0,0,1)\rangle$. Seja:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = 2$, $\gamma = -\frac{1}{3}$ e $\delta = \frac{2}{3}$, logo:

$$\pi_{V_4}(\underline{v}_4) = -\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\2\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Método II: Vamos ortonormalizar a base de V_4:

$$\begin{aligned}
\underline{a}_1 &= \big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\big)\\
\underline{a}_2 &= (0,0,1,0)\\
\underline{a}_3' &= (-2,0,0,1) + \sqrt{2}\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\big) = (-1,1,0,1)\\
\underline{a}_2 &= \big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big).
\end{aligned}$$

Temos que:

$$\pi_{V_4}(\underline{v}_4) = 2(0,0,1,0) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big) = \big(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, 2, -\tfrac{1}{3}\big).$$

Método III: É fácil ortonormalizar a base de $V_4^\perp$, obtendo $\big\{\big(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\big)\big\}$, portanto $\pi_{V_4^\perp}(\underline{v}_4) = \frac{4}{\sqrt{6}}\big(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\big) = \big(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3}\big)$, logo $\pi_{V_4}(\underline{v}_4) = \underline{v}_4 - \pi_{V_4^\perp}(\underline{v}_4) = \big(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 2, -\frac{1}{3}\big)$.

V_5: *Método I*: Já sabemos que $V_5^\perp = \langle(1,0,-1,2)\rangle$. Por isso, $V_5 = \{(x,y,z,w) : x - z + 2w = 0\} = \langle(0,1,0,0),(1,0,1,0),(-2,0,0,1)\rangle$. Seja:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = 1$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\gamma = 0$ e $\delta = -\frac{1}{2}$, logo:

$$\pi_{V_5}(\underline{v}_5) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

Método II: Vamos ortonormalizar a base de V_5:

$$\begin{aligned}
\underline{a}_1 &= (0,1,0,0)\\
\underline{a}_2 &= \big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\big)\\
\underline{a}_3' &= (-2,0,0,1)+\sqrt{2}\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\big) = (-1,0,1,1)\\
\underline{a}_3 &= \big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},0,\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\big).
\end{aligned}$$

Temos que:

$$\pi_{V_5}(\underline{v}_5) = (0,1,0,0)+\tfrac{3}{\sqrt{2}}\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\big) = \big(\tfrac{3}{2},1,\tfrac{3}{2},0\big).$$

Método III: É fácil ortonormalizar a base de $V_5^\perp$, obtendo $\big\{\big(\frac{1}{\sqrt{6}},0,-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\big)\big\}$, portanto $\pi_{V_5^\perp}(\underline{v}_5) = -\frac{3}{\sqrt{6}}\big(\frac{1}{\sqrt{6}},0,-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\big) = \big(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},-1\big)$, logo $\pi_{V_5}(\underline{v}_5) = \underline{v}_5 - \pi_{V_5^\perp}(\underline{v}_5) = \big(\frac{3}{2},1,\frac{3}{2},0\big)$.

4.10. O genérico vetor de W é da forma (t,u,t,t). Este vetor verifica $2x+z-3w=0$, ou seja, $2t+t-3t=0$, logo $W \subset V$. É imediato verificar que $(0,0,3,1)\in V$, pois $2\cdot 0+3-3\cdot 1=0$, e que $(0,0,3,1)\notin W$, pois $3\neq 1$.

Temos que $W=\langle(1,0,1,1),(0,1,0,0)\rangle$, logo o complemento ortogonal de W em $\mathbb{R}^4$ é definido por $W^\perp = \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+z+w=0, y=0\}$. Logo:

$$W^{\perp V} = W^\perp \cap V = \left\{ (x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x+z+w=0\\ y=0\\ 2x+z-3w=0 \end{array} \right\}.$$

Resolvendo o sistema obtemos $x=4t$, $y=0$, $z=-5t$ e $w=t$, logo $W^{\perp V} = \langle(4,0,-5,1)\rangle$, portanto uma base de $W^{\perp V}$ é $\{(4,0,-5,1)\}$.

Para calcular $\pi_W(\underline{v})$, podemos aplicar os três métodos que conhecemos, pensando em V como em um vetor de V ou como em um vetor de $\mathbb{R}^4$. Vamos considerá-lo um vetor de V.

Método I. Temos que $W=\langle(1,0,1,1),(0,1,0,0)\rangle$ e $W^{\perp V}=\langle(4,0,-5,1)\rangle$. Seja $(0,0,3,1)=\alpha(1,0,1,1)+\beta(0,1,0,0)+\gamma(4,0,-5,1)$. Resolvendo o sistema obtemos $\alpha=\frac{4}{3}$, $\beta=0$ e $\gamma=-\frac{1}{3}$, logo $\pi_W(\underline{v})=\frac{4}{3}(1,0,1,1)=\big(\frac{4}{3},0,\frac{4}{3},\frac{4}{3}\big)$.

Método II. Como $(1,0,1,1)$ é ortogonal a $(0,1,0,0)$, para obter uma base ortonormal de W é suficiente normalizar os dois vetores. Obtemos a base $\mathcal{A} = \big\{\big(\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\big),(0,1,0,0)\big\}$, logo $\pi_W(\underline{v})=\frac{4}{\sqrt{3}}\big(\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\big)+0(0,1,0,0)=\big(\frac{4}{3},0,\frac{4}{3},\frac{4}{3}\big)$.

Método III. Uma base ortonormal de $W^{\perp V}$ é $\big\{\big(\frac{4}{\sqrt{42}},0,-\frac{5}{\sqrt{42}},\frac{1}{\sqrt{42}}\big)\big\}$, portanto $\pi_{W^{\perp V}}(\underline{v}) = -\frac{14}{\sqrt{42}}\big(\frac{4}{\sqrt{42}},0,-\frac{5}{\sqrt{42}},\frac{1}{\sqrt{42}}\big) = \big(-\frac{4}{3},0,\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\big)$, logo $\pi_W(\underline{v}) = (0,0,3,1) - \big(-\frac{4}{3},0,\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\big) = \big(\frac{4}{3},0,\frac{4}{3},\frac{4}{3}\big)$.

Parte II

4.11. Trocando por exemplo $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$, temos que:

$$\mu(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

O leitor pode verificar que $\det \mu(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = -1 < 0$, logo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ não representam a mesma orientação. Considerando a base $\mathcal{A}''$, temos que $\mu(\mathcal{A}, \mathcal{A}'') = -I_k$, logo $\det \mu(\mathcal{A}, \mathcal{A}'') = (-1)^k$. Por isso $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}''$ representam a mesma orientação se, e somente se, k é par.

4.12. Temos que $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$, logo $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Vamos verificar se a base $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ de π é positivamente orientada. Isso acontece se, e somente se, $\{\underline{v}, \underline{w}, (1, -1, -1)\}$ é uma base positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$, a respeito da orientação canônica. Temos que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 > 0,$$

logo $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ é positivamente orientada, portanto $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Equivalentemente, podemos observar que a base $\{\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}\}$ é positivamente orientada em $\mathbb{R}^3$. Temos que:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

logo a base $\{\underline{v}, \underline{w}, (1, -1, -1)\}$ é positivamente orientada em $\mathbb{R}^3$. Isso implica que a base $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ de π seja positivamente orientada, portanto $\theta = \frac{\pi}{3}$.

4.13. O vetor genérico (x, y, z, w) pertence a $V^\perp$ se, e somente se, $x+y+z+w = 0$ e $x + w = 0$. Resolvendo o sistema obtemos $x = -t$, $y = -u$, $z = u$ e $w = t$, logo $V^\perp = \langle(-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\rangle$. Como o ângulo entre $(1, 0, 0, 1)$ e $(1, 1, 1, 1)$ é $-\frac{\pi}{4}$, uma base positivamente orientada de V é $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$. A base $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\}$ de $V^\perp$ é positivamente orientada se, e somente se, a base $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ é positivamente orientada (a respeito da orientação canônica). Temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

logo $\mathcal{B}$ é uma base positivamente orientada de $V^\perp$.

4.14. Temos que $\cos\theta = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$, logo $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. A base ordenada

$$\mathcal{B} = \{(1,-1,1,-1),(2,0,0,0)\}$$

de $W^{\perp V}$ é positivamente orientada se, e somente se, a base ordenada

$$\mathcal{A} = \{(0,1,1,0),(1,-1,1,-1),(2,0,0,0)\}$$

de V o é. Isso ocorre se, e somente se, a base ordenada

$$\{(0,1,1,0),(1,-1,1,-1),(2,0,0,0),(0,1,-1,-2)\}$$

de $\mathbb{R}^4$ é positivamente orientada. Temos que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12 < 0,$$

logo a base $\mathcal{B}$ é negativamente orientada. Por isso, o ângulo entre $(1,-1,1,-1)$ e $(2,0,0,0)$ é $-\frac{\pi}{3}$.

4.15. (1) O produto vetorial é o seguinte:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\|\underline{v}\| = \sqrt{6}$, $\|\underline{w}\| = \sqrt{3}$ e $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Por isso temos que $|\sin\theta| = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{7}}{3}$, logo $\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot |\sin\theta| = \sqrt{14}$. De fato, $\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = \sqrt{14}$.

(2) O produto vetorial é o seguinte:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\|\underline{v}\| = 2$, $\|\underline{w}\| = 3$ e $\cos\theta = 0$. Por isso temos que $|\sin\theta| = \sqrt{1-\cos^2\theta} = 1$, logo $\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot |\sin\theta| = 6$. De fato, $\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = 6$.

(3) O produto vetorial é o seguinte:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\|\underline{v}\| = \sqrt{2}$, $\|\underline{w}\| = \sqrt{5}$ e $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Por isso temos que $|\sin\theta| = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, logo $\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot |\sin\theta| = 1$. De fato, $\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = 1$.

(4) O produto vetorial é o seguinte:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\|\underline{v}\| = \sqrt{5}$, $\|\underline{w}\| = \sqrt{11}$ e $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{55}}$. Por isso temos que $|\sin\theta| = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{46}{55}}$, logo $\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot |\sin\theta| = \sqrt{46}$. De fato, $\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = \sqrt{46}$.

(5) O produto vetorial é o seguinte:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\|\underline{v}\| = \sqrt{10}$, $\|\underline{w}\| = \sqrt{10}$ e $\cos\theta = 0$. Por isso temos que $|\sin\theta| = \sqrt{1-\cos^2\theta} = 1$, logo $\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot |\sin\theta| = 10$. De fato, $\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = 10$.

4.16. ($\Leftarrow$) Segue imediatamente das definições de produto escalar e vetorial. ($\Rightarrow$) Temos que $\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot |\sin\theta|$ e $|\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle| = \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot |\cos\theta|$. Por isso, se os dois produtos se anularem e $\underline{v}, \underline{w} \neq \underline{0}$, então necessariamente $\cos\theta = \sin\theta = 0$, o que é absurdo, pois $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

4.17. O produto vetorial é o seguinte:

$$\underline{v} \wedge (1,1,-1) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 - v_3 \\ v_1 + v_3 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix}.$$

Por isso, $-v_2 - v_3 = 1$ e $v_1 - v_2 = 0$, logo, pondo $v_3 = t$, obtemos $\underline{v} = (-t-1, -t-1, t)$. Como $\|\underline{v}\|^2 = 2(1+t)^2 + t^2$, devemos impor $2(1+t)^2 + t^2 = 2$, ou seja, $3t^2 + 4t = 0$, portanto temos $t = 0$ e $t = -\frac{4}{3}$. Afinal, obtemos os vetores $\underline{v} = (-1,-1,0)$ e $\underline{v} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

4.18. Fixemos o referencial de modo que a origem seja B, o eixo x contenha o lato BC e o eixo y seja paralelo à altura AH. Dessa maneira $\vec{BC} = \lambda\underline{e}_1$ e $\vec{AH} = \mu\underline{e}_2$. Mergulhando $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, temos que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \nu\underline{e}_3$, logo $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \wedge \vec{BC} = \nu\lambda\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_1 = \nu\lambda\underline{e}_2$. Por isso $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \wedge \vec{BC}$ e $\vec{AH}$ são ambos paralelos e $\underline{e}_2$, logo são paralelos entre si.

4.19. Seja $\underline{x} = (3,5,2) + t(-1,1,1) + u(-2,-1,0)$. Os lados do tetraedro, que contêm o vértice $\underline{v}$, são os seguintes:

$$\begin{aligned} \underline{w} - \underline{v} &= (-2,-1,0) \\ \underline{z} - \underline{v} &= (-3,0,0) \\ \underline{x} - \underline{v} &= (1,2,3) + t(-1,1,1) + u(-2,-1,0). \end{aligned}$$

Considerando o lembrete, devemos impor que o volume do paralelepípedo de lados $\underline{w}-\underline{v}$, $\underline{z}-\underline{v}$ e $\underline{x}-\underline{v}$ seja 6, ou seja:

$$\big|\langle(\underline{w}-\underline{v})\wedge(\underline{z}-\underline{v}),(\underline{x}-\underline{v})\rangle\big| = 6.$$

O leitor pode verificar que $(\underline{w}-\underline{v})\wedge(\underline{z}-\underline{v}) = (0,0,-3)$, portanto obtemos $|9+3t| = 6$, que equivale a $t+3 = \pm 2$, logo $t = -1$ ou $t = -5$. No primeiro caso $\underline{x} = (4,4,1) + u(-2,-1,0)$ e no segundo caso $\underline{x} = (8,0,-3) + u(-2,-1,0)$. Afinal obtemos as duas retas paralelas $(4,4,1) + \langle(-2,-1,0)\rangle$ e $(8,0,-3) + \langle(-2,-1,0)\rangle$.

4.20. Temos que $\underline{v}_3 = -\underline{v}_1 - \underline{v}_2$, logo $\underline{v}_1\wedge\underline{v}_2 + \underline{v}_1\wedge\underline{v}_3 + \underline{v}_2\wedge\underline{v}_3 = \underline{v}_1\wedge\underline{v}_2$. Ademais, $\|\underline{v}_1+\underline{v}_2\|^2 = \|-\underline{v}_3\|^2 = 8 = \|\underline{v}_1\|^2 + \|\underline{v}_2\|^2$, portanto, pelo inverso do teorema de Pitágoras (v. ex. 4.3), se trata de um triângulo retângulo, logo $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ são ortogonais. Por isso $\|\underline{v}_1\wedge\underline{v}_2\| = \|\underline{v}_1\|\cdot\|\underline{v}_2\| = 4$.