Introdução à Topologia Diferencial e Algébrica

Vol. 0

Noções preliminares

Fabio Ferrari Ruffino

Sumário

Introdução

Estes volumes oferecem uma introdução à Topologia Diferencial e à Topologia Algébrica. Trata-se de dois ramos da Matemática em parte distintos, mas também com muitas interações entre eles, que serão destacadas com ênfase de ambos os lados.

A Topologia Diferencial consiste principalmente no estudo das variedades suaves (ou diferenciáveis), ou seja, dos espaços que *localmente* "se parecem" com um aberto de $\mathbb{R}^n$, mas *globalmente* têm uma estrutura que pode ser bem diferente. Por exemplo, uma circunferência é uma variedade suave de dimensão 1, pois um trecho pequeno da circunferência pode ser deformado suavemente a um segmento, mas a circunferência toda não pode ser deformada a um segmento ou a uma reta sem cortá-la. Analogamente, uma superfície esférica é uma variedade suave de dimensão 2, pois um disco pequeno na superfície pode ser deformado suavemente a um disco pequeno no plano, mas a superfície esférica toda não pode ser deformada a um disco plano ou ao plano todo sem rasgá-la. O fato que uma variedade se pareça localmente com um aberto de $\mathbb{R}^n$ é suficiente para poder definir e aplicar as noções fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral em várias variáveis reais, portanto, se quisermos ser muito sintéticos, podemos afirmar que a Topologia Diferencial é o estudo das variedades suaves através das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral.

A Topologia Algébrica consiste no uso de ferramentas algébricas para estudar os espaços topológicos e as funções contínuas. Mais precisamente, se trata de associar a cada espaço topológico certas estruturas algébricas (grupos, anéis, módulos, etc.), de modo que a uma função contínua entre dois espaços topológicos fique associado um morfismo entre as estruturas algébricas correspondentes. Graças a construções deste tipo podemos traduzir um problema topológico em um problema algébrico. Acontece frequentemente que a tradução algébrica é mais simples, portanto podemos resolver problemas topológicos graças à álgebra. Às vezes pode acontecer também o contrário, mas é menos comum.

Observamos que há uma assimetria significativa entre as duas áreas. De fato, a estrutura suave de uma variedade se acrescenta ao espaço topológico subjacente, mas não fica determinada pela pura topologia. Mais precisamente, o mesmo espaço topológico pode admitir várias estruturas suaves não equivalentes, em um sentido que esclareceremos em detalhe. Por isso, *não* podemos afirmar que a Topologia Diferencial use as ferramentas do Cálculo Diferencial para resolver problemas de Topologia Geral, mas sim que introduz objetos novos, só parcialmente caracterizados pela topologia correspondente. Acontece frequentemente que a estrutura suave acrescentada permita deduzir informações topológicas significativas, mas este não é o único objetivo, pois a estrutura suave é interessante em si mesma. Pelo contrário, a Topologia Algébrica proporciona ferramentas algébricas para estudar os espaços topológicos mesmos, portanto pode ser pensada como um enriquecimento da Topologia Geral. É verdade que às vezes precisaremos acrescentar estruturas adicionais (CW-complexo, Δ-complexo, etc.), mas principalmente com o objetivo de esclarecer as propriedades topológicas subjacentes.

Em ambos os casos temos que restringir a classe dos espaços topológicos a serem considerados. De fato, no caso da Topologia Diferencial nem todo espaço topológico admite uma estrutura de variedade suave. Analogamente, no caso da Topologia Algébrica, algumas ferramentas (homologia simplicial, homologia celular, etc.) só se aplicam a uma classe particular de espaços topológicos, que admitem uma estrutura adicional adequada. Na verdade, também neste caso há uma assimetria. De fato, as ferramentas mais abrangentes da Topologia Algébrica (os grupos de homotopia e os grupos de homologia e de cohomologia singular) podem ser definidos para qualquer espaço topológico, sem nenhuma restrição. Contudo, por motivos que esclareceremos, estas ferramentas dão informações relevantes somente quando forem aplicadas a espaços suficientemente "regulares". Por isso, na Topologia Diferencial temos uma restrição a priori, ou seja, assumimos desde o começo a existência da estrutura suave, excluindo os espaços que não a admitem; pelo contrário, em relação às ferramentas principais da Topologia Algébrica, temos uma restrição a posteriori, ou seja, depois de tê-las definido para qualquer espaço, observamos que são mais interessantes acrescentando algumas hipóteses razoáveis.

As interações entre as duas áreas são de vários tipos. Antes de tudo alguns assuntos podem ser desenvolvidos de modo paralelo, usando a linguagem diferencial no caso suave e a linguagem algébrica no caso contínuo. Por exemplo, isso acontece com vários resultados básicos (teorema do ponto fixo de Brower, teorema de Borsuk-Ulham, etc.) e com algumas definições naturais (grau de uma função entre esferas, orientação de uma variedade, etc.). Obviamente um resultado no caso contínuo implica no mesmo resultado no caso suave, pois toda função suave é contínua, mas frequentemente vale também a volta por causa do *teorema de aproximação suave*, portanto nestes casos as duas linguagens são equivalentes. Outro tipo relevante de interação consiste no fato que cada uma das duas áreas pode usar resultados ou ferramentas da outra. Por exemplo, toda vez que estudamos uma variedade suave é interessante conhecer seus grupos de homotopia, de homologia e de cohomologia, portanto a Topologia Diferencial toda frequentemente precisa de resultados algébricos. Nem sempre vale a volta, pois a Topologia Algébrica concerne também a espaços que não admitem uma estrutura suave. Contudo, pode acontecer que uma ferramenta algébrica, que se aplica a todo espaço topológico, fique definida usando a noção de variedade suave. Isso é precisamente o que ocorre definindo as várias versões do bordismo como teorias homológicas. Enfim, pode ser interessante comparar explicitamente ferramentas diferenciais e ferramentas algébricas: um caso particularmente significativo é o Teorema de De-Rham, que mostra a equivalência entre a Cohomologia de De-Rham, definida com a linguagem diferencial, e a Cohomologia Singular Real, definida de modo puramente algébrico e topológico.

Iniciaremos a exposição com este Volume 0, que contém as noções preliminares necessárias para entender os volumes sucessivos. O Capítulo 1 é um breve resumo de Topologia Geral e constitui um pré-requisito comum para as duas áreas. O Capítulo 2 introduz a linguagem das categorias e dos funtores, que será usada principalmente (mas não exclusivamente) no volume de Topologia Algébrica. O Capítulo 3 introduz as construções livres (grupo livre, produto livre de grupos, módulo livre, etc.); também neste caso as aplicações principais estarão contidas no Volume II. Enfim, os Capítulos 4 e 5 serão essenciais para entender o volume de Topologia Diferencial, pois tratam respetivamente da Álgebra Multilinear e das noções básicas de Cálculo em várias variáveis reais. Se o leitor o preferir, pode começar a ler os volumes sucessivos, utilizando este como referência quando for necessário.

CAPíTULO 1

Preliminares de topologia geral

Vamos relembrar as noções fundamentais de Topologia Geral, que serão a base natural para iniciar o estudo da Topologia Diferencial e da Topologia Algébrica. Assumimos que o leitor já tenha alcançado um bom nível de familiaridade com estas noções, portanto só vamos mostrar um breve resumo, com poucos exemplos e demonstrações.

1.1. Espaços topológicos e funções contínuas

Dado um conjunto X, denotamos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto dos subconjuntos de X.

DEFINIÇÃO 1.1.1. Seja X um conjunto. Uma *topologia* em X é um subconjunto $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- se $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, então $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$;
- se $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, então $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{T}$. ♢

DEFINIÇÃO 1.1.2. Um *espaço topológico* é um par $(X, \mathcal{T})$, sendo X um conjunto e $\mathcal{T}$ uma topologia em X. Os elementos de $\mathcal{T}$ são ditos *subconjuntos abertos* e os complementares dos elementos de $\mathcal{T}$ são ditos *subconjuntos fechados*. ♢

Daqui em diante, quando falarmos do "espaço topológico X", estaremos subentendendo que se trata de um par $(X, \mathcal{T})$. Ademais, nas seguintes definições a letra 'X' denotará sempre um espaço topológico.

DEFINIÇÃO 1.1.3. Seja $x \in X$. Um subconjunto $U \subset X$ é dito *vizinhança* de x se existe um subconjunto aberto $V \subset X$ tal que $x \in V \subset U$. ♢

DEFINIÇÃO 1.1.4. Seja $Y \subset X$ um subconjunto.

- O *interior* de Y, denotado por $\mathrm{int}(Y)$, é o máximo subconjunto aberto A de X tal que $A \subset Y$.
- O *fecho* de Y, denotado por $\overline{Y}$, é o mínimo subconjunto fechado F de X tal que $Y \subset F$. ♢

O interior de Y coincide com a união de todos os subconjuntos abertos de X contidos em Y. O fecho de Y coincide com a interseção de todos os subconjuntos fechados de X que contêm Y.

DEFINIÇÃO 1.1.5. Um subconjunto $Y \subset X$ é dito *denso* em X se $\overline{Y} = X$. ♢

Um exemplo particularmente importante de topologia é o seguinte.

Definição 1.1.6. Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, definimos a *bola* $B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \varepsilon\}$. A *Topologia Euclidiana* de $\mathbb{R}^n$ é definida declarando $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. ♢

1.1.1. Bases e pré-bases.

Definição 1.1.7. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma família $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos abertos é dita *base* de $\mathcal{T}$ se, para todo subconjunto aberto U de X e para todo $x \in U$, existe $i \in I$ tal que $x \in U_i \subset U$. ♢

Isso implica que um subconjunto é aberto se, e somente se, é união de uma família de elementos da base. Por isso, os elementos de uma base são "geradores" da topologia considerada.

Definição 1.1.8. Um espaço topológico é dito *de base enumerável* (também se diz que *satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade*) se existe uma base cuja cardinalidade é enumerável.[1] ♢

Por causa da Definição 1.1.6, a família das bolas $\mathfrak{B} = \{B_\varepsilon(x)\}_{x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0}$ é uma base da topologia euclidiana de $\mathbb{R}^n$. É fácil verificar que também a família $\mathfrak{B}' = \{B_\varepsilon(x)\}_{x \in \mathbb{Q}^n, \varepsilon \in \mathbb{Q}^{>0}}$ é uma base, portanto a Topologia Euclidiana é de base enumerável.

Definição 1.1.9. Seja $x \in X$. Uma família $\{U_i\}_{i \in I}$ de vizinhanças de x é dita *sistema fundamental de vizinhanças de* x se, para toda vizinhança $U \subset X$ de x, existe $i \in I$ tal que $U_i \subset U$. ♢

Definição 1.1.10. Um espaço topológico X *satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade* se, para todo $x \in X$, existe um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. ♢

É fácil verificar que um espaço de base enumerável satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Definição 1.1.11. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma família de subconjuntos $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ é dita *pré-base* de $\mathcal{T}$ se $\mathcal{T}$ é a mínima topologia tal que os elementos de Σ são abertos. ♢

Proposição 1.1.12. *Sejam X um conjunto e $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$. Existe uma única topologia $\mathcal{T}$ em X de que Σ é uma pré-base. Uma base de $\mathcal{T}$ é formada pela família das interseções das subfamílias finitas de Σ e por X todo, ou seja, $\mathcal{B} = \{Y_1 \cap \ldots \cap Y_n : n \in \mathbb{N}, Y_1, \ldots, Y_n \in \Sigma\} \cup \{X\}$.*

1.1.2. Espaços metrizáveis.

Definição 1.1.13. Um *espaço métrico* é um conjunto X dotado de uma função $d \colon X \times X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, dita *distância*, tal que, para todos $x, y, z \in X$:

- $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

[1] Quando dizemos "enumerável" estamos incluindo a possibilidade que seja finita.

- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. ♢

A distância induz naturalmente uma topologia, uma base da qual é formada pelas bolas $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$. O Exemplo 1.1.6 é um caso particular desta construção.

Definição 1.1.14. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito *metrizável* se existe uma distância d em X que induz a topologia $\mathcal{T}$. ♢

1.1.3. Funções contínuas e homeomorfismos. Vamos agora considerar as funções entre espaços topológicos. Nesta seção as letras 'X' e 'Y' denotarão dois espaços topológicos fixados.

Definição 1.1.15. Uma função $f : Y \to X$ é dita *contínua* se a imagem inversa de um subconjunto aberto de X é um subconjunto aberto de Y. Dado um ponto $y \in Y$, a função f é dita *contínua em y* se a imagem inversa de uma vizinhança de $f(y)$ é uma vizinhança de y. ♢

O leitor pode verificar que uma função é contínua se, e somente se, é contínua em todo ponto do domínio. Ademais, a Definição 1.1.15 é equivalente a pedir que a imagem inversa de um subconjunto fechado de X seja um subconjunto fechado de Y. Enfim, se Σ for uma pré-base (em particular, uma base) da topologia de X, então f é contínua se, e somente se, a imagem inversa de todo elemento de Σ é aberta em Y.

Definição 1.1.16. Uma função $f : Y \to X$ é dita *homeomorfismo* se é contínua, bijetora e a sua inversa é contínua. Dois espaços X e Y são ditos *homeomorfos* se existe um homeomorfismo entre eles. ♢

Obtemos uma relação de equivalência na classe dos espaços topológicos, que identifica dois espaços quando forem homeomorfos.

Definição 1.1.17. Uma função $f : Y \to X$ é dita *aberta* (*fechada*) se a imagem de um subconjunto aberto (fechado) de Y é aberta (fechada) em X. ♢

É fácil verificar que, se $f : Y \to X$ for uma função contínua e bijetora, então as seguintes três condições são equivalentes: (i) f é um homeomorfismo; (ii) f é aberta; (iii) f é fechada. Enfim, a seguinte proposição será útil mais adiante.

Proposição 1.1.18. *Sejam Y um espaço de base enumerável, X um espaço topológico e $f : Y \to X$ uma função contínua, aberta e sobrejetora. Então X é de base enumerável.*

1.1.4. Coberturas e lema da colagem.

Definição 1.1.19. Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto. Uma *cobertura* de Y em X é uma família $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X tal que $Y \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. A cobertura é dita *aberta* (*fechada*) se U_i é aberto (fechado) em X para todo $i \in I$. ♢

Na definição de cobertura pode acontecer que $Y = X$; neste caso se trata de uma cobertura do espaço todo.

Definição 1.1.20. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos de X. A família $\mathcal{Y}$ é dita:

- *finita* se o conjunto $\mathcal{Y}$ é finito;
- *finita em relação aos índices* se o conjunto I é finito;
- *localmente finita* se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x em X tal que o conjunto $\{Y_i \in \mathcal{Y} : Y_i \cap U \neq \emptyset\}$ é finito;
- *localmente finita em relação aos índices* se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x em X tal que o conjunto $\{i \in I : Y_i \cap U \neq \emptyset\}$ é finito. ♢

Claramente uma família (localmente) finita em relação aos índices é (localmente) finita. Reciprocamente, uma família (localmente) finita se torna (localmente) finita em relação aos índices eliminando uma quantidade suficiente de repetições.

Proposição 1.1.21 (Lema da colagem). *Sejam X e Z espaços topológicos. Seja $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família que verifica uma das duas seguintes condições:*

- *$\mathcal{Y}$ é uma cobertura aberta de X;*
- *$\mathcal{Y}$ é uma cobertura fechada localmente finita de X.*

Dada uma família de funções contínuas $\{f_i\colon Y_i \to Z\}_{i\in I}$, tal que $f_i|_{Y_i\cap Y_j} = f_j|_{Y_i\cap Y_j}$ para todos $i, j \in I$, existe uma única função contínua $f\colon X \to Z$ tal que $f|_{Y_i} = f_i$ para todo $i \in I$.

1.1.5. Topologia Produto.

Definição 1.1.22. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ espaços topológicos. A família formada pelos produtos $U_1 \times \cdots \times U_n$, sendo U_i aberto em X_i para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, é a base de uma topologia no conjunto $X_1 \times \cdots \times X_n$, dita *Topologia Produto.* ♢

Trata-se da mínima topologia que torna as projeções $\pi_i\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ contínuas. Ademais, uma função $f\colon Y \to X_1 \times \cdots \times X_n$ é contínua se, e somente se, todas as composições $\pi_i \circ f\colon Y \to X_i$ são contínuas.

Consideremos o espaço produto $X_1 \times \cdots \times X_n$. Seja $U_i \subset X_i$ aberto para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Temos que $U_1 \times \cdots \times U_n = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \pi_n^{-1}(U_n)$, portanto uma base da topologia produto é formada pelas interseções finitas de conjuntos da forma $\pi_i^{-1}(U_i)$. Equivalentemente, uma pré-base é formada pelos conjuntos da forma $\pi_i^{-1}(U_i)$. No caso do produto de uma família genérica de espaços (inclusive infinita), esta é a definição da topologia produto.

Definição 1.1.23. Seja $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e denotemos por $\pi_i\colon \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ a projeção canônica. A família das imagens inversas $\pi_i^{-1}(U_i)$, sendo $U_i \subset X_i$ aberto, é uma pré-base de uma topologia no conjunto $\prod_{i\in I} X_i$, dita *Topologia Produto.* ♢

Como para os produtos finitos, trata-se da mínima topologia que torna toda projeção π_i contínua. Ademais, uma função $f\colon Y \to \prod_{i\in I} X_i$ é contínua se, e somente se, todas as composições $\pi_i \circ f\colon Y \to X_i$ são contínuas. Observamos que, por definição, se $U \subset \prod_{i \in I} X_i$ for aberto, existe um subconjunto *finito* $J \subset I$ tal que $\pi_i(U) = X_i$ para todo $i \in I \setminus J$.

1.1.6. Topologia Induzida e mergulhos.

DEFINIÇÃO 1.1.24. Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto. A *Topologia Induzida* em Y por X é a topologia tal que $U \subset Y$ é aberto se, e somente se, existe um subconjunto aberto $V \subset X$ tal que $U = V \cap Y$. O espaço Y, com esta topologia, é dito *subespaço topológico* de X. $\diamondsuit$

O leitor pode verificar que a inclusão $i \colon Y \hookrightarrow X$ é uma função contínua se Y for dotado da topologia induzida por X. Ademais, se $Z \subset Y \subset X$, a topologia induzida em Z por X coincide com aquela induzida em Z por Y, sendo Y dotado da topologia induzida por X. A Definição 1.1.24 equivale a declarar que $F \subset Y$ é fechado se, e somente se, existe um subconjunto fechado $G \subset X$ tal que $F = G \cap Y$. Enfim, se $U \subset X$ for aberto, um subconjunto $V \subset U$ é aberto a respeito da topologia induzida em U se, e somente se, é aberto em X. Analogamente, se $F \subset X$ for fechado, um subconjunto $G \subset F$ é fechado a respeito da topologia induzida em F se, e somente se, é fechado em X.

DEFINIÇÃO 1.1.25. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. A *Topologia Euclidiana* de X é a topologia induzida por restrição pela Topologia Euclidiana de $\mathbb{R}^n$. $\diamondsuit$

NOTAÇÃO 1.1.26. Daqui em diante denotaremos por I o intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ com a Topologia Euclidiana. Ademais, quando considerarmos um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, sem especificar sua topologia, subentenderemos que seja dotado da Topologia Euclidiana. $\diamondsuit$

PROPOSIÇÃO 1.1.27. *Sejam X um espaço de base enumerável e $Y \subset X$ um subespaço topológico. Então Y é de base enumerável.*

COROLÁRIO 1.1.28. *Todo subespaço topológico de $\mathbb{R}^n$ é de base enumerável.*

Se $Y \subset X$ for um subespaço topológico, a inclusão $i \colon Y \hookrightarrow X$ é contínua e injetora. Mais em geral, podemos considerar uma função continua e injetora $f \colon Y \hookrightarrow X$, que não seja necessariamente a inclusão de um subespaço topológico. Isso não garante que f seja um homeomorfismo entre Y e a imagem $f(Y)$, sendo a imagem dotada da topologia induzida por X.

NOTAÇÃO 1.1.29. Dada uma função contínua $f \colon Y \to X$, chamamos de $\bar{f} \colon Y \to f(Y)$ a função contínua sobrejetora obtida restringindo o contra-domínio de f à imagem, sendo $f(Y)$ dotado da topologia induzida por restrição de X. $\diamondsuit$

DEFINIÇÃO 1.1.30. Uma função contínua injetora $f \colon Y \hookrightarrow X$ é dita *mergulho* se $\bar{f} \colon Y \hookrightarrow f(Y)$ for um homeomorfismo. Se $f(Y)$ for fechado em X, f é dito *mergulho fechado.* $\diamondsuit$

Se $Y \subset X$ for um subespaço topológico (fechado), a inclusão $Y \hookrightarrow X$ é um mergulho (fechado).

EXEMPLO 1.1.31. Seja $f \colon [0,1) \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$, sendo $\mathbb{C}$ identificado com $\mathbb{R}^2$. A função f é contínua e injetora, mas não é um mergulho. $\diamondsuit$

PROPOSIÇÃO 1.1.32. *Seja $f\colon Y \hookrightarrow X$ um mergulho. As duas seguintes condições são equivalentes:*

(i) f é um mergulho fechado;
(ii) f é uma função fechada.

1.1.7. Homeomorfismos locais.

DEFINIÇÃO 1.1.33. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f\colon Y \to X$ é dita *homeomorfismo local* se é contínua e, para todo $y \in Y$, existe uma vizinhança U de y tal que:

- $f(U)$ é aberto em X;
- $f|_U\colon U \to f(U)$ é um homeomorfismo, sendo $f(U)$ dotado da topologia induzida por X. ♢

O fato que $f(U)$ seja aberto não pode ser deduzido a partir das demais hipóteses. Por exemplo, se consideramos o mergulho $i\colon \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe uma vizinhança $U = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ (ou também $U = \mathbb{R}$) tal que $i|_U\colon U \to i(U)$ é um homeomorfismo, porém $i(U)$ não é aberto em $\mathbb{R}^2$.

OBSERVAÇÃO 1.1.34. Um homeomorfismo local pode não ser injetor. Por exemplo, a função $f\colon \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$, é um homeomorfismo local não injetor. ♢

OBSERVAÇÃO 1.1.35. Um homeomorfismo local, mesmo se injetor, pode não ser sobrejetor. Por exemplo, a inclusão de um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo local injetor, mas não sobrejetor. ♢

OBSERVAÇÃO 1.1.36. Se um homeomorfismo local for bijetor, então é um homeomorfismo. ♢

1.1.8. Subconjuntos localmente fechados.

DEFINIÇÃO 1.1.37. Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $Y \subset X$ é dito *localmente fechado* se, para todo $y \in Y$, existe uma vizinhança $U \subset X$ de y tal que $Y \cap U$ é fechado em U a respeito da Topologia Induzida. ♢

PROPOSIÇÃO 1.1.38. *Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) Y é localmente fechado em X;
(2) Y é aberto em $\overline{Y}$;
(3) existem um subconjunto aberto $U \subset X$ e um subconjunto fechado $F \subset X$ tais que $Y = U \cap F$.

1.1.9. Topologia Quociente.

DEFINIÇÃO 1.1.39. Sejam Y um espaço topológico, X um conjunto e $f\colon Y \to X$ uma função sobrejetora. A *Topologia Quociente* induzida por f em X é definida declarando $U \subset X$ aberto se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é aberto em Y. ♢

Trate-se da máxima topologia em X que torna f contínua. Como caso particular podemos considerar uma relação de equivalência em Y e definir X como o conjunto quociente e f como a projeção. Enfim, se f for bijetora, então a Topologia Quociente é a única que torna f um homeomorfismo.

DEFINIÇÃO 1.1.40. Seja $f\colon Y \to X$ uma função contínua sobrejetora. A função f é dita *projeção topológica* se a topologia de X coincide com a Topologia Quociente induzida por f. ♢

Sejam $f\colon Y \to X$ e $f'\colon Y' \to X'$ duas projeções topológicas. O produto $f \times f'\colon Y \times Y' \to X \times X'$ em geral não é uma projeção topológica, pois pode acontecer que os abertos de $X \times X'$, com a Topologia Produto, sejam menos que os abertos da Topologia Quociente induzida por $f \times f'$ (ou seja, pode acontecer que um subconjunto *não* aberto de $X \times X'$ tenha imagem inversa aberta em relação a $f \times f'$). Em particular, escolhendo $f' = \mathrm{id}_{Y'}$, pode acontecer que $f \times \mathrm{id}_{Y'}\colon Y \times Y' \to X \times Y'$ não seja um projeção topológica. Todavia, valem as seguintes proposições, nas quais precisamos da noção de *compacidade local*, que será definida na Seção 1.3, Def. 1.3.2.

PROPOSIÇÃO 1.1.41. *Sejam $f\colon Y \to X$ uma projeção topológica e Y' um espaço localmente compacto. Então $f \times \mathrm{id}_{Y'}\colon Y \times Y' \to X \times Y'$ é uma projeção topológica.*

PROPOSIÇÃO 1.1.42. *Sejam $f\colon Y \to X$ e $f'\colon Y' \to X'$ duas projeções topológicas. Se X e Y' forem localmente compactos, então $f \times f'\colon Y \times Y' \to X \times X'$ é uma projeção.*

1.1.10. Conexidade.

DEFINIÇÃO 1.1.43. Um espaço topológico X é dito *conexo* se não existem dois subconjuntos abertos $A, B \subset X$, ambos diferentes de X, tais que $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$. Equivalentemente, X é dito *conexo* se não existe um subconjunto $A \subset X$, diferente de X e de $\emptyset$, aberto e fechado. ♢

DEFINIÇÃO 1.1.44. Seja X um espaço topológico. Um *caminho* em X é uma função contínua $\varphi\colon I \to X$. O caminho é dito *fechado* se $\varphi(0) = \varphi(1)$. ♢

DEFINIÇÃO 1.1.45. Um espaço topológico X é dito *conexo por caminhos* se para todos $x_0, x_1 \in X$ existe um caminho $\varphi\colon I \to X$ tal que $\varphi(0) = x_0$ e $\varphi(1) = x_1$. ♢

PROPOSIÇÃO 1.1.46. *Um espaço conexo por caminhos é conexo.*

PROPOSIÇÃO 1.1.47. *Seja $f\colon Y \to X$ uma função contínua. Se Y é conexo (por caminhos), então $f(Y)$ é conexo (por caminhos).*

DEFINIÇÃO 1.1.48. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. A *componente conexa (por caminhos)* de x é o máximo subconjunto conexo (por caminhos) de X que contém x, o qual coincide com a união de todos os subconjuntos conexos (por caminhos) de X que contêm x. ♢

Um espaço topológico X é a união disjunta das suas componentes conexas (por caminhos). Ademais, X é conexo (por caminhos) se, e somente se, é formado por uma componente. Uma componente conexa (por caminhos) de X é fechada, porém pode não ser aberta. Por exemplo, as componentes conexas (por caminhos) de $\mathbb{Q}$ são os pontos, que não são abertos.

PROPOSIÇÃO 1.1.49. *Seja $f\colon Y \to X$ uma função contínua. Se $y_1, y_2 \in Y$ pertencem à mesma componente conexa (por caminhos) de Y, então $f(y_1)$ e $f(y_2)$*

pertencem à mesma componente conexa (por caminhos) de X. Em particular, se f for um homeomorfismo, então f induz uma bijeção entre o conjunto das componentes conexas (por caminhos) de Y e o das componentes conexas (por caminhos) de X.

Proposição 1.1.50. *Seja $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, de modo que:*
- *X_i é conexo (por caminhos) para todo $i \in I$;*
- *$X_i \cap X_j \neq \emptyset$ para todos $i, j \in I$.*

Então X é conexo (por caminhos).

Proposição 1.1.51. *Seja $X = Y \cup \bigcup_{i \in I} X_i$, de modo que:*
- *X_i é conexo (por caminhos) para todo $i \in I$;*
- *Y é conexo (por caminhos);*
- *$X_i \cap Y \neq \emptyset$ para todo $i \in I$.*

Então X é conexo (por caminhos).

1.1.11. Topologias fracas.

Definição 1.1.52. Sejam X um conjunto e $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos, cada um com uma topologia. A *topologia fraca* em X induzida por $\mathcal{Y}$ é a topologia tal que $A \subset X$ é aberto se, e somente se, $A \cap Y_i$ é aberto em Y_i para todo $i \in I$ (equivalentemente, $A \subset X$ é fechado se, e somente se, $A \cap Y_i$ é fechado em Y_i para todo $i \in I$). $\diamondsuit$

Proposição 1.1.53. *Dotando X da topologia fraca induzida por $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i \in I}$, uma função $f \colon X \to Z$ é contínua se, e somente se, $f|_{Y_i} \colon Y_i \to Z$ é contínua para todo $i \in I$.*

Proposição 1.1.54. *Seja X dotado da topologia fraca induzida pela família $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i \in I}$. Seja $\mathcal{T}_i$ a topologia de Y_i. Se valem as duas seguintes condições para todos $i, j \in I$:*
- *as restrições de $\mathcal{T}_i$ e $\mathcal{T}_j$ a $Y_i \cap Y_j$ coincidem;*
- *$Y_i \cap Y_j$ é aberto (fechado) em Y_i e em Y_j*

então a topologia de Y_i, como subespaço de X, coincide com $\mathcal{T}_i$ e cada Y_i é aberto (fechado) em X.

Dados um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e uma família $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i \in I}$ de subespaços de X, a topologia fraca induzida em X por $\mathcal{Y}$ é mais fina que $\mathcal{T}$. Neste caso, a primeira condição da proposição precedente é sempre verificada. Se $\mathcal{Y}$ for uma cobertura aberta ou fechada de X, também a segunda condição é verificada. Todavia, no caso de uma cobertura aberta, a topologia fraca correspondente coincide com $\mathcal{T}$.

1.2. Axiomas de separação

Definição 1.2.1. Um espaço topológico X é dito *de Hausdorff* se, para todos $x_1, x_2 \in X$ distintos, existem uma vizinhança U_1 de x_1 e uma vizinhança U_2 de x_2 tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. $\diamondsuit$

Um espaço é de Hausdorff quando dois pontos distintos são "separados". Em particular, cada ponto é fechado.

Proposição 1.2.2. *Um espaço X é de Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$ é fechada.*

Podemos estender a noção de vizinhança a um subconjunto de um espaço topológico.

Definição 1.2.3. Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto. Um subconjunto $U \subset X$ é dito *vizinhança* de Y se existe um subconjunto aberto $V \subset X$ tal que $Y \subset V \subset U$. ♢

Definição 1.2.4. Um espaço topológico de Hausdorff X é dito:

- *regular* se, dados um ponto $x \in X$ e um subconjunto fechado $F \subset X$, tais que $x \notin F$, existem uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de F tais que $U \cap V = \emptyset$;
- *normal* se, dados dois subconjuntos fechados $F, G \subset X$, tais que $F \cap G = \emptyset$, existem uma vizinhança U de F e uma vizinhança V de G tais que $U \cap V = \emptyset$.

♢

É claro que todo espaço normal é regular e todo espaço regular é de Hausdorff.

Proposição 1.2.5. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- *X é regular;*
- *dados um ponto $x \in X$ e uma vizinhança U de x, existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V} \subset U$;*
- *dados um ponto $x \in X$ e um subconjunto fechado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existe uma vizinhança U de x tal que $\overline{U} \cap F = \emptyset$;*
- *dados um ponto $x \in X$ e um subconjunto fechado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existe uma vizinhança V de F tal que $x \notin \overline{V}$;*
- *dados um ponto $x \in X$ e um subconjunto fechado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existem uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de F tais que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Proposição 1.2.6. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- *X é normal;*
- *dados um subconjunto fechado $F \subset X$ e uma vizinhança U de F, existe uma vizinhança V de F tal que $\overline{V} \subset U$;*
- *dados dois subconjuntos fechados $F, G \subset X$ tais que $F \cap G = \emptyset$, existe uma vizinhança U de F tal que $\overline{U} \cap G = \emptyset$;*
- *dados dois subconjuntos fechados $F, G \subset X$, tais que $F \cap G = \emptyset$, existem uma vizinhança U de F e uma vizinhança V de G tais que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Proposição 1.2.7. *Um subespaço topológico de um espaço regular é regular. O produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ é regular se, e somente se, cada espaço X_i é regular.*

Proposição 1.2.8. *Um subespaço topológico* fechado *de um espaço normal é normal. Se o produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ for normal, então cada espaço X_i é normal.*

A partir do segundo item da Proposição 1.2.5 é imediato verificar que $\mathbb{R}^n$ é regular. Por causa da Proposição 1.2.7, todo subespaço topológico de $\mathbb{R}^n$ é regular. Veremos que $\mathbb{R}^n$ é normal e que todo subespaço topológico de $\mathbb{R}^n$ é normal, mesmo se não for fechado.

Teorema 1.2.9. *Um espaço regular e de base enumerável é metrizável.*

O fato que um espaço seja normal está estritamente relacionado com o comportamento das funções com valores em $\mathbb{R}$.

Definição 1.2.10. Sejam X um espaço topológico e $F, G \subset X$ dois subconjuntos fechados tais que $F \cap G = \emptyset$. Uma *função de Urysohn* associada ao par (F, G) é um função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que:

- $f(x) = 1$ para todo $x \in F$;
- $f(x) = 0$ para todo $x \in G$;
- $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$. ♢

Teorema 1.2.11. *Um espaço topológico de Hausdorff X é normal se, e somente se, para todo par (F, G) de subconjuntos fechados disjuntos existe uma função de Urysohn associada a (F, G).*

Podemos formular o teorema da seguinte maneira equivalente.

Definição 1.2.12. Sejam X um espaço topológico, $F \subset X$ um subconjunto fechado e $U \subset X$ uma vizinhança aberta de F. Uma *função de Urysohn* associada ao par (F, U) é um função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que:

- $f(x) = 1$ para todo $x \in F$;
- $f(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus U$;
- $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$. ♢

Teorema 1.2.13. *Um espaço topológico de Hausdorff X é normal se, e somente se, para todo par (F, U), formado por um subconjunto fechado F e uma vizinhança aberta U de F, existe uma função de Urysohn associada a (F, U).*

A equivalência entre as duas versões é devida ao fato que ao par (F, G) de subconjuntos fechados, tais que $F \cap G = \emptyset$, podemos associar o par $(F, X \setminus G)$, sendo $X \setminus G$ uma vizinhança aberta de F. Reciprocamente, ao par (F, U) associamos o par $(F, X \setminus U)$.

O Teorema 1.2.11 mostra que a normalidade de um espaço é equivalente ao fato que dois subconjuntos fechados disjuntos possam ser "separados" por uma função f. O seguinte teorema mostra que a normalidade é equivalente também à possibilidade de estender uma função real contínua definida sobre um subconjunto fechado.

Teorema 1.2.14 (Teorema de Extensão de Tietze). *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. As seguintes condições são equivalentes:*

- *X é normal;*
- *dados um subconjunto fechado $F \subset X$ e uma função contínua $f\colon F \to \mathbb{R}$, existe uma função contínua $g\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $g|_F = f$;*

- *dados um subconjunto fechado $F \subset X$ e uma função contínua $f\colon F \to [a,b]$, existe uma função contínua $g\colon X \to [a,b]$ tal que $g|_F = f$;*
- *dados um subconjunto fechado $F \subset X$ e uma função contínua $f\colon F \to (a,b)$, existe uma função contínua $g\colon X \to (a,b)$ tal que $g|_F = f$.*

Vamos agora considerar condições de regularidade ainda mais fortes.

DEFINIÇÃO 1.2.15. Um espaço topológico de Hausdorff X é dito:

- *completamente normal* se, para todo par de subespaços $A, B \subset X$ tais que $\bar{A} \cap B = \emptyset$ and $A \cap \bar{B} = \emptyset$, existem uma vizinhança U de A e uma vizinhança V de B tais que $U \cap V = \emptyset$;
- *hereditariamente normal* se todo subespaço $Y \subset X$ é normal;
- *perfeitamente normal* se, para todo par (F, G) de subconjuntos fechados disjuntos, existe uma função de Urysohn $\lambda\colon X \to I$ associada a (F, G) tal que $F = \lambda^{-1}(1)$ e $G = \lambda^{-1}(0)$. ♢

Uma função de Urysohn, por definição, verifica $F \subset \lambda^{-1}(1)$ e $G \subset \lambda^{-1}(0)$, mas em geral não valem as igualdades. Obviamente as três condições enunciadas na Definição 1.2.15 implicam que X é normal.

PROPOSIÇÃO 1.2.16. *Um espaço é completamente normal se, e somente se, é hereditariamente normal. Ademais, todo espaço perfeitamente normal é completamente (ou hereditariamente) normal.*

Vamos analisar mais em detalhe a condição de normalidade perfeita.

DEFINIÇÃO 1.2.17. Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $Y \subset X$ é dito *de tipo G_δ* se coincidir com a interseção de uma família enumerável de subconjuntos abertos. ♢

PROPOSIÇÃO 1.2.18. *Seja X um espaço de Hausdorff. As seguintes condições são equivalentes:*

- *X é perfeitamente normal;*
- *X é normal e todo subconjunto fechado de X é de tipo G_δ;*
- *para todo subconjunto fechado $F \subset X$ existe uma função contínua $\lambda\colon X \to [0, +\infty)$ tal que $F = \lambda^{-1}(0)$.*

Veremos que todo espaço metrizável, toda variedade topológica e todo CW-complexo são perfeitamente normais, portanto a classe dos espaços perfeitamente normais é bem ampla e inclui quase todos os espaços topológicos que precisaremos considerar.

1.3. Compacidade, paracompacidade e partições da unidade

Nesta seção precisaremos várias vezes da definição de cobertura (Definição 1.1.19).

1.3.1. Compacidade.

DEFINIÇÃO 1.3.1. Sejam X um espaço topológico, $Y \subset X$ um subconjunto e $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura de Y em X. Uma cobertura $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ de Y em X é dita:

- *subcobertura* de $\mathfrak{U}$ se $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$, ou seja, se existe uma função $\varphi\colon J \to I$ tal que $V_j = U_{\varphi(j)}$ para todo $j \in J$;
- *refinamento* de $\mathfrak{U}$ se existe uma função $\varphi\colon J \to I$ tal que $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ para todo $j \in J$. $\diamondsuit$

Se $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ for uma cobertura aberta (fechada) de Y a respeito da topologia de X, então $\mathfrak{U}|_Y := \{U_i \cap Y\}_{i\in I}$ é uma cobertura aberta (fechada) de Y a respeito da Topologia Induzida. Se $\mathfrak{V}$ for uma subcobertura ou um refinamento de $\mathfrak{U}$, então $\mathfrak{V}|_Y$ é uma subcobertura ou um refinamento de $\mathfrak{U}|_Y$.

Definição 1.3.2. Um espaço topológico de Hausdorff X é dito *compacto* se para toda cobertura aberta de X existe uma subcobertura finita. O espaço X é dito *localmente compacto* se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança compacta de x.[2] $\diamondsuit$

Dado um subespaço topológico $Y \subset X$, sendo X de Hausdorff, o fato que Y com a Topologia Induzida seja compacto é equivalente ao fato que para toda cobertura aberta de Y como subconjunto de X exista uma subcobertura finita.

Proposição 1.3.3. *Seja $f\colon Y \to X$ uma função contínua, sendo X e Y de Hausdorff. Se Y é compacto, então $f(Y)$ é compacto.*

Lembramos que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito *limitado* se existe $M > 0$ tal que $X \subset B_M(0)$.

Teorema 1.3.4 (Heine-Borel). *Um subespaço topológico de $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Proposição 1.3.5. *Se X for um espaço topológico de Hausdorff, um subespaço compacto $Y \subset X$ é fechado em X. Se X for compacto, um subespaço fechado $F \subset X$ é compacto.*

Corolário 1.3.6. *Seja $f\colon Y \to X$ uma função contínua e bijetora, sendo Y compacto e X de Hausdorff. Então f é um homeomorfismo.*

A seguinte proposição mostra uma propriedade importante dos espaços compactos.

Proposição 1.3.7. *Sejam X um espaço topológico e Y um espaço compacto. Sejam $A \subset X$ um subespaço e $U \subset X \times Y$ uma vizinhança de $A \times Y$. Existe uma vizinhança $V \subset X$ de A tal que $V \times Y \subset U$.*

1.3.2. Compacidade sequencial e por ponto de acumulação.

Definição 1.3.8. Um espaço topológico de Hausdorff X é dito *compacto por ponto de acumulação* se todo subconjunto infinito de X admite um ponto de acumulação em X. $\diamondsuit$

Proposição 1.3.9. *Um espaço compacto é compacto por ponto de acumulação.*

[2]Pode-se demonstrar que, sendo X de Hausdorff por hipótese, a definição que demos de compacidade local é equivalente à existência de um sistema fundamental de vizinhanças compactas em cada ponto.

DEFINIÇÃO 1.3.10. Sejam X um espaço topológico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X e $x \in X$. Dizemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a x, e escrevemos $x_n \to x$, se, para toda vizinhança U de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. ♢

Se X for um espaço de Hausdorff e $x_n \to x$, então x é o único ponto de X a que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Nesse caso, dizemos que a sequência é *convergente*.

DEFINIÇÃO 1.3.11. Um espaço topológico de Hausdorff X é dito *sequencialmente compacto* se, para toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, existe uma subsequência convergente. ♢

PROPOSIÇÃO 1.3.12. *Seja X um espaço que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Se X for compacto por ponto de acumulação (em particular, se for compacto), então X é sequencialmente compacto.*

TEOREMA 1.3.13. *Seja X um espaço metrizável. As seguintes três condições são equivalentes:*

- *X é compacto;*
- *X é compacto por ponto de acumulação;*
- *X é sequencialmente compacto.*

1.3.3. Paracompacidade. Nesta seção precisaremos da Definição 1.1.20 de família (em particular, de cobertura) localmente finita (em relação aos índices). Além disso, observamos que, dada uma cobertura $\mathfrak{U}$ aberta (fechada) de um espaço topológico, uma subcobertura de $\mathfrak{U}$ é necessariamente aberta (fechada), enquanto um refinamento de $\mathfrak{U}$ poderia não sê-lo. Se o for, o chamamos de *refinamento aberto (fechado)*.

DEFINIÇÃO 1.3.14. Um espaço topológico de Hausdorff X é dito *paracompacto* se toda cobertura aberta de X admite um refinamento aberto localmente finito. ♢

É claro que um espaço compacto é paracompacto, pois uma subcobertura é também um refinamento.

PROPOSIÇÃO 1.3.15. *Todo espaço paracompacto é normal.*

Por causa da proposição precedente temos as seguintes inclusões entre classes de espaços topológicos:

$$\{\text{de Hausdorff}\} \supset \{\text{regulares}\} \supset \{\text{normais}\} \supset \{\text{paracompactos}\} \supset \{\text{compactos}\}.$$

PROPOSIÇÃO 1.3.16. *Um espaço metrizável (em particular, um espaço regular e de base enumerável, v. Teorema 1.2.9) é paracompacto.*

COROLÁRIO 1.3.17. *Seja X um espaço topológico de base enumerável. Então:*

$$X \text{ é regular} \Leftrightarrow X \text{ é normal} \Leftrightarrow X \text{ é paracompacto.}$$

Já vimos que todo subespaço de $\mathbb{R}^n$ é regular, portanto, pelo corolário precedente, é também normal e paracompacto. Veremos que todo CW-complexo é paracompacto. Também toda variedade topológica é paracompacta, mas isso será imposto por definição.

1.3.4. Partições da unidade. A importância dos espaços paracompactos é devida à existência das partições da unidade, cuja versão suave é uma ferramenta fundamental na Topologia (e na Geometria) Diferencial.

DEFINIÇÃO 1.3.18. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O *suporte* de f é o fecho do subconjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. O denotamos por $\mathrm{supp} f$. ♢

DEFINIÇÃO 1.3.19. Sejam X um espaço topológico e $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura aberta de X. Uma *partição da unidade subordinada a* $\mathfrak{U}$ é uma família de funções contínuas $\{\varphi_i\colon X \to I\}_{i\in I}$ tais que:

- $\mathrm{supp}\, \varphi_i \subset U_i$ para todo $i \in I$;
- a família $\{\mathrm{supp}\, \varphi_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura fechada de X localmente finita em relação aos índices;
- para todo $x \in X$, temos que $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$. ♢

A soma faz sentido pois, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança V de x em que só uma quantidade finita de termos é não nula. O nome "partição da unidade" é devido ao fato que se trata de uma maneira de distribuir a função constante 1 no espaço topológico, de modo que em uma vizinhança de cada ponto o valor 1 fique subdividido em uma quantidade finita de partes. Esta noção é importante porque com uma partição da unidade podemos colar dados locais contínuos a um dado global contínuo (estudaremos também o caso suave). Por exemplo, se $\{f_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n\}$ for uma família de funções contínuas, a função $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, definida por $f(x) = \sum_{i\in I} \varphi_i(x) f_i(x)$, é contínua, pois coincide localmente com a soma de uma quantidade finita de funções contínuas. Ademais, se existem $Y \subset X$ e uma função $g\colon Y \to \mathbb{R}^n$ tais que $f_i|_{U_i\cap Y} = g|_{U_i\cap Y}$, então $f|_Y = g$, pois $f(y) = (\sum_{i\in I} \varphi_i(y)) \cdot g(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$. Veremos vários exemplos a respeito.

TEOREMA 1.3.20. *Um espaço de Hausdorff X é paracompacto se, e somente se, para toda cobertura aberta $\mathfrak{U}$ de X existe uma partição da unidade subordinada a $\mathfrak{U}$.*

Mostraremos em detalhe como construir uma partição da unidade suave em uma variedade diferenciável.

1.3.5. Funções próprias. Uma função contínua é dita *própria* se manda pontos "próximos ao infinito" no domínio em pontos "próximos ao infinito" no contradomínio. Vamos dar uma definição precisa.

DEFINIÇÃO 1.3.21. Sejam X um espaço topológico e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Dizemos que $x_n \to \infty$ se, para todo $K \subset X$ compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in X \setminus K$ para todo $n \geq N$. ♢

DEFINIÇÃO 1.3.22. Uma função contínua $f\colon Y \to X$ é dita:

- *sequencialmente própria* se, para toda sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, tal que $y_n \to \infty$, temos que $f(y_n) \to \infty$;
- *própria* se, para todo $K \subset X$ compacto, a imagem inversa $f^{-1}(K)$ é compacta. ♢

Observamos que a definição precedente fica válida sem assumir que f seja contínua, mas não estamos interessados em considerar funções não contínuas.

PROPOSIÇÃO 1.3.23. *Sejam X e Y espaços regulares e de base enumerável. Uma função contínua $f\colon Y \to X$ é própria se, e somente se, é sequencialmente própria.*

DEMONSTRAÇÃO. Como todo subespaço de X ou de Y é regular e de base enumerável, pelo Teorema 1.3.13 a compacidade é equivalente à compacidade sequencial. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $y_n \to \infty$ em Y. Se, por absurdo, $f(y_n) \nrightarrow \infty$ em X, então existem um subconjunto compacto $K \subset X$ e uma subsequência y_{n_k} tais que $f(y_{n_k}) \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(K)$. Isso é absurdo, pois $y_{n_k} \to \infty$ e $f^{-1}(K)$ é compacto, portanto deveria existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_k} \notin f^{-1}(K)$ para todo $k \geq N$. ($\Leftarrow$) Seja $K \subset X$ compacto. Como X é de Hausdorff, K é fechado, portanto $f^{-1}(K)$ é fechado. Suponhamos por absurdo que $f^{-1}(K)$ não seja compacto. Então existe uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(K)$ que não admite nenhuma subsequência convergente em $f^{-1}(K)$. Isso implica que $y_n \to \infty$: de fato, em caso contrário, existiriam um compacto $H \subset Y$ e uma subsequência $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$, logo existiria uma subsubsequência convergente $y_{n_{k_h}} \to y \in H$; sendo $f^{-1}(K)$ fechado, $y \in f^{-1}(K)$, portanto haveria uma subsequência convergente de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $f^{-1}(K)$. Como $y_n \to \infty$, por hipótese $f(y_n) \to \infty$, o que é absurdo, pois supusemos que $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, sendo K compacto. □

Observamos que a hipótese de X e Y serem regulares e de base enumerável foi usada somente na direção ($\Leftarrow$), portanto qualquer função contínua própria é sequencialmente própria.

1.3.6. Compactificação a um ponto. Dado um espaço topológico X, há uma maneira natural de construir um espaço compacto, que contém X como subespaço aberto, só acrescentando um ponto, que chamamos de "ponto ao infinito".

DEFINIÇÃO 1.3.24. Seja X um espaço topológico. A *compactificação a um ponto* ou *compactificação de Alexandroff* de X é o espaço topológico X^+ definido da seguinte maneira:

- como conjunto $X^+ := X \sqcup \{\infty\}$;
- um subconjunto $A \subset X^+$ é aberto se, e somente se, vale uma das duas seguintes possibilidades:
  - $\infty \notin A$ e A é aberto em X;
  - $\infty \in A$ e $X^+ \setminus A$, como subespaço topológico de X, é compacto. ◇

O leitor pode verificar que se trata efetivamente de uma topologia, portanto X^+ está bem definido. Além disso, X^+ é compacto e a inclusão $X \hookrightarrow X^+$ é um mergulho aberto.

PROPOSIÇÃO 1.3.25. *X^+ é de Hausdorff se, e somente se, X é localmente compacto.*[3]

Dada uma função $f\colon Y \to X$, fica definida a função $f^+\colon Y^+ \to X^+$, tal que $f^+(y) = f(y)$ para $y \in Y$ e $f^+(\infty) = \infty$.

PROPOSIÇÃO 1.3.26. *A função f^+ é contínua se, e somente se, f é contínua e própria.*

[3] Lembramos que, por definição, um espaço localmente compacto é de Hausdorff.

Podemos também acrescentar um ponto a um espaço topológico, como componente conexa separada, aberta e fechada, conforme a seguinte definição.

Definição 1.3.27. Dado um espaço topológico X, definimos:

$$X_+ := X \sqcup \{\infty\},$$

sendo $\{\infty\}$ aberto e fechado em X_+. ♢

Como conjuntos $X_+ = X^+$, mas em geral as topologias são bem diferentes.

Proposição 1.3.28. *Se X for compacto, então a identidade (entre conjuntos) induz o homeomorfismo canônico $X^+ \approx X_+$. Se X não for compacto, então X^+ é conexo (logo não é homeomorfo a X_+).*

1.4. Topologia Compacto-Aberto

Dados dois espaços topológicos X e Y, denotamos por $C(Y, X)$ o conjunto das funções contínuas de Y a X.

Notação 1.4.1. Dados dois subconjuntos $W \subset Y$ e $Z \subset X$, denotamos por $U_{W,Z}$ o conjunto das funções contínuas $f\colon Y \to X$ tais que $f(W) \subset Z$, ou seja:

$$U_{W,Z} := \{f \in C(Y, X) : f(W) \subset Z\}.$$ ♢

Definição 1.4.2. Sejam X e Y espaços topológicos. A família

$$\{U_{K,A} : K \subset Y \text{ compacto, } A \subset X \text{ aberto}\} \subset \mathcal{P}(C(Y, X))$$

é uma pré-base de uma topologia no conjunto $C(Y, X)$, dita *Topologia Compacto-Aberto.* ♢

É natural escolher um compacto no domínio e um aberto no contradomínio, pois a imagem de um compacto é compacta e a imagem inversa de um aberto é aberta. O problema desta topologia está no fato que, sem acrescentar algumas hipóteses em relação aos espaços envolvidos, seu comportamento não é natural a respeito de três noções fundamentais: a composição, o produto cartesiano e a avaliação. A respeito da composição vale o seguinte teorema.

Teorema 1.4.3. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos e sejam $f_0 \in C(Y, X)$ e $g_0 \in C(Z, Y)$.*

- *As seguintes funções são contínuas em relação às Topologias Compacto-Aberto:*

$$\begin{array}{ll} C(Z, Y) \to C(Z, X) & \qquad C(Y, X) \to C(Z, X) \\ g \mapsto f_0 \circ g & \qquad f \mapsto f \circ g_0. \end{array}$$

- *Se X e Z forem de Hausdorff e Y for localmente compacto, a seguinte função é contínua:*

$$\begin{array}{l} C(Z, Y) \times C(Y, X) \to C(Z, X) \\ (g, f) \mapsto f \circ g. \end{array}$$

A respeito do produto cartesiano vale o seguinte teorema.

NOTAÇÃO 1.4.4. Dada uma função $f\colon Z \times Y \to X$, chamamos de $\hat{f}\colon Z \to C(Y,X)$ a função $z \mapsto (y \mapsto f(z,y))$. ♢

TEOREMA 1.4.5. *Se f é contínua, então $\hat{f}$ é contínua. Se $\hat{f}$ é contínua e Y é localmente compacto, então f é contínua.*

Enfim, em relação à avaliação vale o seguinte teorema.

TEOREMA 1.4.6. *Sejam X e Y espaços topológicos e $y_0 \in Y$.*

- *A função $C(Y,X) \to X$, $f \mapsto f(y_0)$, é contínua.*
- *Se Y for localmente compacto, a função*

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}\colon C(Y,X) \times Y &\to X \\ (f,y) &\mapsto f(y) \end{aligned}$$

  é contínua.

O fato que seja necessário introduzir hipóteses adicionais nos Teoremas 1.4.3, 1.4.5 e 1.4.6 justifica a necessidade de buscar por uma família de espaços em que o comportamento da Topologia Compacto-Aberto seja mais natural. Veremos que, considerando espaços de Hausdorff, será possível tirar as hipóteses em relação à compacidade local impondo que valha uma relação adequada entre a família dos compactos e a família dos abertos. Dessa maneira introduziremos a noção de *espaço compactamente gerado*. Para espaços não necessariamente de Hausdorff, veremos que é mais natural considerar a *Topologia Test-Aberto*. Para que o comportamento desta topologia seja natural, deveremos introduzir a noção de *k-espaço*, generalizando a de espaço compactamente gerado. Tudo isso será discutido no primeiro capítulo do Volume II.

1.5. Espaços métricos e normados completos

DEFINIÇÃO 1.5.1. Sejam (X,d) um espaço métrico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X e $x \in X$. Dizemos que a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a x, e escrevemos $x_n \to x$, se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, temos que $d(x_n, x) < \varepsilon$. Se existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$, a sequência é dita *convergente*. ♢

A definição precedente coincide com a Definição 1.3.10 aplicada a um espaço métrico. Como todo espaço métrico é de Hausdorff, se $x_n \to x$, então x é o único ponto ao qual $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

DEFINIÇÃO 1.5.2. Dado um espaço métrico (X,d), uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X é dita *de Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $n, m \geq N$, temos que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. O espaço métrico (X,d) é dito *completo* se toda sequência de Cauchy é convergente. ♢

DEFINIÇÃO 1.5.3. Seja (X,d) um espaço métrico. Uma função $f\colon X \to X$ é dita *contração* se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \lambda < 1$ e $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$ para todos $x, y \in X$. A constante λ é dita *modulo de contração* de f. ♢

Uma contração é contínua, pois, se $f(y_0) = x_0$ e $d(y, y_0) < \delta$, então $d(f(y), x_0) \leq \lambda d(y, y_0) < \lambda\delta$, logo a imagem inversa da bola $B_\varepsilon(x_0)$ contém a bola $B_\delta(y_0)$, sendo $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$.

TEOREMA 1.5.4 (Teorema das contrações). *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Se $f\colon X \to X$ for uma contração, existe um único ponto fixo $\tilde{x} \in X$ de f.*[4]

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x_0 \in X$ um ponto qualquer. Definimos indutivamente $x_{n+1} := f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil provar por indução que $d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$, sendo λ o módulo de contração de f. Por isso, temos que, para $m > n$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (\lambda^n + \cdots + \lambda^{m-1}) d(x_1, x_0) = \tfrac{\lambda^n - \lambda^m}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Como $\{\lambda^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, a desigualdade precedente mostra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X, logo, sendo X completo, existe $\tilde{x} \in X$ tal que $x_n \to \tilde{x}$. Como f é contínua, temos que $f(x_n) \to f(\tilde{x})$, mas $f(x_n) = x_{n+1} \to \tilde{x}$, logo $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Enfim, se $\tilde{y}$ for outro ponto fixo, então $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(f(\tilde{x}), f(\tilde{y})) \leq \lambda d(\tilde{x}, \tilde{y})$. Sendo $\lambda < 1$, isso só pode acontecer se $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, ou seja, se $\tilde{x} = \tilde{y}$. □

DEFINIÇÃO 1.5.5. Um *espaço vetorial real normado* é um espaço vetorial real X dotado de uma função $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, dita *norma*, tal que, para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ♢

A norma induz naturalmente uma distância, definida por $d(x, y) := \|x - y\|$, portanto uma topologia, uma base da qual é formada pelas bolas $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : \|y - x\| < \varepsilon\}$. Se o espaço métrico correspondente for completo, X é dito *espaço de Banach*. Qualquer espaço normado de dimensão finita é de Banach. A *Norma Euclidiana* no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é definida por $\|(x_1, \ldots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. A topologia induzida pela norma euclidiana é a Topologia Euclidiana.

PROPOSIÇÃO 1.5.6. *Duas normas quaisquer em um espaço vetorial de dimensão finita induzem a mesma topologia.*

Em um espaço vetorial normado pode-se definir a noção de série convergente, conforme a definição usual de um curso de cálculo.

DEFINIÇÃO 1.5.7. Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sequência em X. A *série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ é a sequência das *soma parciais* $s_n := x_0 + \cdots + x_n$. Se esta sequência convergir a $x \in X$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ é dita *convergente* e x é dito *soma da série*. Neste caso usamos a notação $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. ♢

DEFINIÇÃO 1.5.8. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Uma série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ em X é dita *absolutamente convergente* se a série real $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente. ♢

[4]Lembramos que $\tilde{x}$ é dito *ponto fixo* de f se $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Teorema 1.5.9. *Um espaço normado é de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.*

Enfim, vamos recordar brevemente a noção de produto interno.

Definição 1.5.10. Um *produto interno* ou *produto escalar* em um espaço vetorial real X é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é bilinear;
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todos $x, y \in X$;
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in X$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$. $\diamondsuit$

Um produto interno define uma norma por $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Se o espaço normado correspondente for de Banach, o par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é dito *espaço de Hilbert*. Todo espaço vetorial de dimensão finita com um produto interno é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.5.11 (Desigualdade de Cauchy-Schwartz). *Seja $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial real com um produto interno. Para todos $x, y \in X$ temos que:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Definição 1.5.12. O *Produto Interno Canônico* ou *Euclidiano* no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é definido por $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. $\diamondsuit$

É claro que a norma induzida pelo Produto Interno Canônico é a Norma Euclidiana.

1.6. Teorema da categoria de Baire

Definição 1.6.1. Um espaço topológico X é dito *espaço de Baire* se valem as seguintes propriedades equivalentes:

- dada uma família enumerável de subconjuntos abertos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se todo A_n for denso em X, então a interseção $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é também densa em X;
- dada uma família enumerável de subconjuntos fechados $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se todo F_n tiver interior vazio, então a união $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ tem também interior vazio. $\diamondsuit$

Teorema 1.6.2 (Teorema da Categoria de Baire). *Se X for um espaço localmente compacto ou um espaço métrico completo, então é um espaço de Baire.*

1.7. Teorema de Invariância do Domínio

A demonstração do seguinte teorema não é trivial e será mostrada no volume de Topologia Algébrica. Vamos enunciar o teorema agora, pois será usado frequentemente no começo do volume de Topologia Diferencial.

Teorema 1.7.1 (Teorema de Invariância do Domínio). *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$, sendo U aberto. Se $\varphi \colon U \to V$ for uma função contínua e bijetora, então φ é um homeomorfismo e V é aberto em $\mathbb{R}^n$.*

Este teorema mostra em particular que um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^n$, é aberto. Poderíamos formular o teorema da seguinte maneira equivalente: se $U \subset \mathbb{R}^n$ for aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ for uma função contínua e injetora, então $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e, restringindo o contra-domínio de f à imagem, obtemos um homeomorfismo.

Corolário 1.7.2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Se $m < n$, não existe nenhuma função contínua injetora $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Logo, se $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ forem abertos e $f\colon U \to V$ for um homeomorfismo, então $n = m$.*

Demonstração. Se existisse uma função contínua injetora $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, então a função $g\colon U \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f(x), 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \simeq \mathbb{R}^n$ seria também contínua e injetora, porém a imagem $g(U)$ não seria aberta em $\mathbb{R}^n$, pois $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ tem interior vazio em $\mathbb{R}^n$. Isso é absurdo pelo Teorema de Invariância do Domínio. Enfim, se $f\colon U \to V$ fosse um homeomorfismo entre abertos e $n \neq m$, a função f ou sua inversa f^{-1} contradiriam o enunciado. □

É claro que o enunciado do corolário precedente não vale para $m > n$, pois, por exemplo, o mergulho $i\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (x, 0)$, é uma função contínua e injetora. Todavia, se pedimos que a imagem seja aberta, então é necessário que $m = n$, como mostra o seguinte corolário.

Corolário 1.7.3. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos abertos. Se $f\colon U \to V$ for uma função contínua e bijetora, então $n = m$ e f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Consideremos a família enumerável formada pelos discos de centro e raio racionais contidos em U:

$$\mathfrak{D} = \{D_\varepsilon(x) : x \in \mathbb{Q}^n, \varepsilon \in \mathbb{Q}^{>0}, D_\varepsilon(x) \subset U\}, \tag{1}$$

sendo $D_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \varepsilon\}$. Sendo $\mathfrak{D}$ enumerável, escolhemos uma enumeração dos seus elementos e chamamos de D_k o k-ésimo elemento. Sendo f contínua, temos que $f(D_k)$ é compacto, portanto fechado, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k = U$ e f é bijetora, temos que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(D_k) = V$. Sendo V localmente compacto, pelo Teorema de Baire existe $k \in \mathbb{N}$ tal que o interior de $f(D_k)$ em V não é vazio. Sendo V aberto, o interior de $f(D_k)$ em V coincide com o de $f(D_k)$ em $\mathbb{R}^m$. Seja $W \subset f(D_k)$ um subconjunto aberto em V e $\mathbb{R}^m$. Temos que $f^{-1}(W) \subset D_k$ é aberto em U e $\mathbb{R}^n$. A restrição $f|_{D_k} : D_k \to f(D_k)$ é um homeomorfismo, pois D_k é compacto e $f(D_k)$ de Hausdorff, portanto $f|_{f^{-1}(W)}\colon f^{-1}(W) \to W$ é um homeomorfismo. Sendo $f^{-1}(W)$ e W abertos, temos que $n = m$ pelo Corolário 1.7.2. Pelo Teorema de Invariância do Domínio, f é um homeomorfismo. □

CAPíTULO 2

Categorias e funtores

Neste capítulo vamos introduzir a linguagem das categorias e dos funtores. Esta linguagem será fundamental para entender o volume de topologia algébrica, pois será usada quase constantemente desde o começo. Não se trata de uma necessidade, dado que a matéria toda poderia ser exposta mesmo sem conhecer a definição de categoria. Contudo, em nossa opinião (não compartilhada por todos os matemáticos), se trata de uma ferramenta que ajuda a organizar o material em poucas estruturas claras e coerentes, baseadas em alguns princípios lógicos fundamentais que se repetem em contextos diferentes. Isso torna bem mais fácil lembrar-se da matéria e reconstruir os detalhes de cada construção que estudaremos, sem precisar aprendê-los de memória toda vez. Estas observações valem em parte também em relação à topologia diferencial, mas de modo menos significativo. Por este motivo, também no vol. I haverá várias referências à linguagem das categorias, mas (quase) todas poderão ser ignoradas sem prejudicar a compreensão do texto.

2.1. Categorias

DEFINIÇÃO 2.1.1. Uma *categoria* $\mathcal{C}$ é definida por:

- uma classe $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ de *objetos*;
- para todo par $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, um conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de *morfismos*; frequentemente um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é denotado por $f\colon X \to Y$;
- para toda tripla $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, uma função, dita *composição*:

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

tais que:

(i) se $(X, Y) \neq (Z, W)$, então $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) = \emptyset$;
(ii) a composição é associativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ quando os dois lados forem definidos;
(iii) para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, existe um *morfismo identidade* $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, ou seja, um morfismo tal que $f \circ \mathrm{id}_X = f$ e $\mathrm{id}_X \circ g = g$, quando estas composições forem definidas. ♢

Dado um morfismo $f\colon X \to Y$, o objeto X é dito *domínio* de f e o objeto Y é dito *contra-domínio* de f.

OBSERVAÇÃO 2.1.2. A condição (i) é necessária para que todo morfismo tenha um domínio e um contra-domínio bem definidos. Contudo, se não for verificada, é fácil impô-la por construção da seguinte maneira. Suponhamos que, para todo par $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, esteja definido um conjunto $\mathrm{Hom}'_{\mathcal{C}}(X, Y)$, de modo que nem sempre valha a condição (i). Podemos definir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) := \mathrm{Hom}'_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \{X\} \times \{Y\}$. Agora é óbvio que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W) = \emptyset$ para $(X,Y) \neq (Z,W)$ e temos a bijeção canônica $\mathrm{Hom}'_{\mathcal{C}}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $\varphi \simeq (\varphi, X, Y)$. ♢

Conforme a definição 2.1.1, os objetos formam uma *classe* e os morfismos entre dois objetos formam um *conjunto*. Esta distinção é muito importante do ponto de vista fundacional, pois em geral a classe dos objetos é demasiado ampla para ser um conjunto, como acontecerá nos exemplos 2.1.3–2.1.12 da próxima seção. Contudo, isso não tem a menor relevância em relação à matéria destes volumes.

2.1.1. Exemplos.

Exemplo 2.1.3. Denotamos por Grp a categoria dos grupos, definida da seguinte maneira. Os objetos são os grupos, os morfismos de G a H são os homomorfismos de grupos de G a H e a composição de dois morfismos coincide com a composição como funções. ♢

Exemplo 2.1.4. Denotamos por GrpAb a categoria dos grupos abelianos, definida analogamente à precedente, mas só considerando grupos abelianos como objetos. ♢

Exemplo 2.1.5. Fixado um corpo $\mathbb{K}$, denotamos por $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ a categoria dos espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, definida da seguinte maneira. Os objetos são os espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, os morfismos de V a W são as funções lineares de V a W e a composição de dois morfismos coincide com a composição como funções. ♢

Exemplo 2.1.6. Denotamos por $\mathrm{Vect}^{f}_{\mathbb{K}}$ a categoria dos espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, definida analogamente à precedente, mas só considerando espaços de dimensão finita como objetos. ♢

Exemplo 2.1.7. Denotamos por Vect a categoria dos espaços vetoriais, definida da seguinte maneira. Os objetos são os pares $(V,\mathbb{K})$, sendo $\mathbb{K}$ um corpo e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Os morfismos de $(V,\mathbb{K})$ a $(W,\mathbb{K}')$ são os pares (f,φ) tais que $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ é um morfismo de corpos e $f\colon V \to W$ é uma função que verifica a condição $f(\lambda v + \mu v') = \varphi(\lambda)f(v) + \varphi(\mu)f(v')$ para todos $v, v' \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. A composição é definida por $(g,\psi) \circ (f,\varphi) := (g \circ f, \psi \circ \varphi)$. ♢

Exemplo 2.1.8. Denotamos por Vect^{f} a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita, definida analogamente à precedente, mas só considerando pares $(V,\mathbb{K})$, em que V é um espaço de dimensão finita, como objetos. ♢

O leitor pode construir facilmente vários exemplos de categorias de estruturas algébricas análogos aos precedentes (anéis, módulos, álgebras, ...).

Exemplo 2.1.9. Denotamos por Sets a categoria dos conjuntos, definida da seguinte maneira. Os objetos são os conjuntos, os morfismos de X a Y são as funções de X a Y e a composição de dois morfismos é a composição de funções. ♢

Exemplo 2.1.10. Denotamos por Top a categoria dos espaços topológicos, definida da seguinte maneira. Os objetos são os espaços topológicos, os morfismos de X a Y são as funções contínuas de X a Y e a composição de dois morfismos coincide com a composição de funções. ♢

Exemplo 2.1.11. Denotamos por TopHd a categoria dos espaços topológicos de Hausdorff, definida como a precedente, mas só considerando espaços topológicos de Hausdorff como objetos. ♢

Exemplo 2.1.12. Denotamos por TopLocCpt a categoria dos espaços topológicos localmente compactos, sendo os morfismos as funções contínuas. Denotamos por TopLocCptP a categoria dos espaços topológicos localmente compactos, sendo os morfismos as funções contínuas e próprias. Em ambos os casos a composição de dois morfismos é a composição de funções. $\diamondsuit$

O leitor pode construir vários exemplos parecidos aos precedentes, considerando espaços conexos, espaços compactos e assim por diante.

Por enquanto só mostramos exemplos em que os objetos são conjuntos, eventualmente com estruturas adicionais, os morfismos são funções que respeitam as estruturas acrescentadas e a composição de morfismos coincide com a composição de funções. Esta situação é bastante comum, mas não é consequência da definição e encontraremos várias categorias interessantes em que isso não ocorre. Vamos mostrar alguns exemplos simples.

Exemplo 2.1.13. Seja $\mathcal{C}$ a categoria tal que $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{X\}$ e o único morfismo é a identidade de X. Qualquer seja o elemento X, se trata de uma categoria. $\diamondsuit$

Exemplo 2.1.14. Seja $\mathcal{C}$ a categoria tal que $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{X, Y, Z\}$ e os morfismos são definidos por:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) = \{\mathrm{id}_X\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y) = \{\mathrm{id}_Y\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Z) = \{\mathrm{id}_Z\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \{f\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) = \{g\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) = \{h\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) = \emptyset & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y) = \emptyset & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) = \emptyset. \end{array}$$

A única composição não trivial é $g \circ f = h$. $\diamondsuit$

Exemplo 2.1.15. Seja $\mathcal{D}$ a categoria tal que $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = \{U, V\}$ e os morfismos são definidos por:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,U) = \{\mathrm{id}_U\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V,V) = \{\mathrm{id}_V\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,V) = \{k\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V,U) = \{l\}. \end{array}$$

A únicas composições não triviais são $l \circ k = \mathrm{id}_U$ e $k \circ l = \mathrm{id}_V$. $\diamondsuit$

Vamos concluir com um breve comentário. Consideremos os exemplos 2.1.5 e 2.1.6. As categorias $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ e $\mathrm{Vect}^f_{\mathbb{K}}$ foram definidas fixando o corpo $\mathbb{K}$. Isso pode parecer estranho, pois $\mathbb{K}$ é um objeto da categoria dos corpos, portanto deveria estar a um nível "inferior" ao das categorias, as quais parecem estar "acima" dos objetos correspondentes. Na verdade, não tem nada de errado. Estes dois níveis não são realmente separados, e sim às vezes se misturam, portanto um objeto ou um morfismo de uma categoria pode ser usado para construir outra categoria.

2.1.2. Propriedades fundamentais.

Observação 2.1.16. O morfismo identidade de um objeto X é necessariamente único. De fato, sejam id_X e id'_X duas identidades de X. Então $\mathrm{id}_X \circ \mathrm{id}'_X = \mathrm{id}_X$, dado que id'_X é uma identidade, e $\mathrm{id}_X \circ \mathrm{id}'_X = \mathrm{id}'_X$, dado que id_X é uma identidade, logo $\mathrm{id}_X = \mathrm{id}'_X$. $\diamondsuit$

Agora vamos introduzir a noção de isomorfismo, que é muito familiar no contexto das estruturas algébricas.

Definição 2.1.17. Um morfismo $f\colon X \to Y$ é dito *isomorfismo* se existe um morfismo $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Dois objetos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ são *isomorfos* se existe um isomorfismo entre eles. Neste caso usamos a notação $X \simeq Y$. $\diamondsuit$

Observação 2.1.18. Se $f\colon X \to Y$ for um isomorfismo, o inverso $g\colon Y \to X$, que verifica a definição, é necessariamente único. De fato, se g' for outro inverso, temos que $g' = g' \circ \mathrm{id}_Y = g' \circ f \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g$. Por isso g se denota por f^{-1}, assim como f pode ser denotado por g^{-1}. $\diamondsuit$

Observação 2.1.19. É fácil conferir que a noção de isomorfismo define uma relação de equivalência na classe dos objetos, que portanto fica dividida em classes de equivalência. $\diamondsuit$

Exemplo 2.1.20. Nas categorias Grp e GrpAb (v. exemplos 2.1.3 e 2.1.4), um isomorfismo é um isomorfismo de grupos. Nas categorias $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ e $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{f}$ (v. exemplos 2.1.5 e 2.1.6) é uma função linear invertível. Nas categorias Vect e Vect^{f} (v. exemplos 2.1.7 e 2.1.8) é um morfismo (f, φ) tal que f é uma função bijetora e φ é um isomorfismo de corpos. Na categoria Sets (v. exemplo 2.1.9) é uma função bijetora. Na categoria Top (v. exemplo 2.1.10) é um homeomorfismo. Nos exemplos 2.1.13 e 2.1.14 os únicos isomorfismos são as identidades. Enfim, no exemplo 2.1.15, todo morfismo é um isomorfismo, sendo $l = k^{-1}$ e $k = l^{-1}$. $\diamondsuit$

Definição 2.1.21. Um morfismo $f\colon X \to Y$ é dito:

- *invertível à esquerda* se existe um morfismo $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$;
- *invertível à direita* se existe um morfismo $g\colon Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. $\diamondsuit$

Observação 2.1.22. f é um isomorfismo se, e somente se, é invertível à esquerda e à direita. De fato, se $g' \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, temos que $g' = g' \circ \mathrm{id}_Y = g' \circ f \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g$, logo $g = g' = f^{-1}$. Todavia, em geral, se f for invertível só à esquerda (direita), o inverso esquerdo (direito) não é único. $\diamondsuit$

Exemplo 2.1.23. Na categoria Sets um morfismo é invertível à esquerda se, e somente se, é uma função injetora. É claro que uma função inversa à esquerda em geral não é única. Por exemplo, seja $f\colon \{1,2\} \to \{1,2,3\}$, definida por $1 \mapsto 1$ e $2 \mapsto 2$. A função $g\colon \{1,2,3\} \to \{1,2\}$, definida por $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ e $3 \mapsto 2$, e a função $h\colon \{1,2,3\} \to \{1,2\}$, definida por $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ e $3 \mapsto 1$, são duas inversas à esquerda distintas de f. Analogamente, um morfismo é invertível à direita se, e somente se, é uma função sobrejetora. O leitor pode construir exemplos em que uma função inversa à direita não é única. $\diamondsuit$

Acabamos de ver que, na categoria Sets, um morfismo invertível à esquerda é uma função injetora, enquanto um morfismo invertível à direita é um função sobrejetora. Isso não vale em geral. Antes de tudo, teríamos que definir os morfismos injetores e sobrejetores; não precisaremos da definição geral, portanto vamos mostrá-la somente no apêndice A.[1] Por enquanto é suficiente saber que, nas categorias formadas por

[1]Uma exceção significativa é constituída pelas categorias abelianas, que introduziremos brevemente no volume de topologia algébrica. Neste caso poderemos definir facilmente os morfismos injetores e sobrejetores.

conjuntos com estruturas adicionais que consideraremos, um morfismo é injetor ou sobrejetor se, e somente se, a correspondente função entre conjuntos o é. Isso é necessário, mas não suficiente, para que o morfismo correspondente seja invertível à esquerda ou à direita, como mostram os seguintes exemplos.

Exemplo 2.1.24. Na categoria Grp ou GrpAb, seja $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$. Se trata de um morfismo injetor, mas não invertível à esquerda, pois o único inverso esquerdo possível seria a divisão por 2, que não está definida. ♢

Exemplo 2.1.25. Na categoria Grp ou GrpAb, seja $\pi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ a projeção ao quociente. Se trata de um morfismo sobrejetor, mas não invertível à direita, pois o único morfismo de $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}$ é o trivial. ♢

Exemplo 2.1.26. Na categoria Top, seja $i \colon S^1 \hookrightarrow D^2$ a inclusão da circunferência no disco do qual constitui o bordo. Se trata de um morfismo injetor, mas não invertível à esquerda, pois, como mostraremos no volume de topologia algébrica, S^1 não é *retrato* de D^2. ♢

Lema 2.1.27. *Sejam $f \colon X \xrightarrow{\simeq} X'$ e $g \colon Y \xrightarrow{\simeq} Y'$ dois isomorfismos em uma categoria $\mathcal{C}$. Fica definida a seguinte bijeção:*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{f,g} \colon \mathrm{Hom}(X,Y) &\xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(X',Y')\\ \varphi &\mapsto g \circ \varphi \circ f^{-1}.\end{aligned}$$

Demonstração. É imediato verificar que a função inversa $\mathcal{H}^{-1}_{f,g}$ é definida por $\psi \mapsto g^{-1} \circ \psi \circ f$. □

2.1.3. Subcategorias.

Definição 2.1.28. Uma categoria $\mathcal{C}'$ é dita *subcategoria* de $\mathcal{C}$ se:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$;
- para todos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y,Z)$, a composição $g \circ f$ em $\mathcal{C}'$ coincide com a em $\mathcal{C}$.

A subcategoria $\mathcal{C}'$ é dita *cheia* se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$. ♢

Exemplo 2.1.29. A categoria GrpAb é uma subcategoria cheia de Grp. Analogamente, $\mathrm{Vect}^f_{\mathbb{K}}$ é uma subcategoria cheia de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ e Vect^f é uma subcategoria cheia de Vect. ♢

Exemplo 2.1.30. Sejam TopLocCpt e TopLocCptP as categorias definidas no exemplo 2.1.12. Trata-se de duas subcategorias de Top, a primeira cheia e a segunda não cheia. Analogamente, TopLocCptP é uma subcategoria não cheia de TopLocCpt. ♢

Exemplo 2.1.31. Consideremos a categoria $\mathcal{C}$ do exemplo 2.1.14. Seja $\mathcal{C}'$ a categoria formada pelos objetos X e Y e pelos morfismos id_X, id_Y e f de $\mathcal{C}$. Por construção $\mathcal{C}'$ é uma subcategoria cheia de $\mathcal{C}$. Se considerássemos somente id_X e id_Y como morfismos, seria uma subcategoria não cheia. ♢

2.2. Funtores

Vamos agora introduzir a noção de funtor, que pode ser pensada como uma "flecha" de uma categoria a outra, assim como um morfismo é uma "flecha" de um objeto a outro dentro de uma categoria fixada.

DEFINIÇÃO 2.2.1. Um *funtor* $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre duas categorias é definido por:

- uma função $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$;
- para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, uma função (que denotamos com o mesmo símbolo) $\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$

tais que, para cada $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$:

- $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$;
- $\mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$. $\diamondsuit$

EXEMPLO 2.2.2. Seja $\mathcal{F}\colon \mathrm{Grp} \to \mathrm{Sets}$ o funtor que associa:

- a um grupo (ou seja, a um objeto de Grp) o conjunto subjacente (o qual é um objeto de Sets);
- a um morfismo entre dois grupos a função subjacente entre conjuntos.

O leitor pode verificar que se trata efetivamente de um funtor. Podemos construir exemplos análogos a partir de qualquer categoria de estruturas algébricas. Funtores deste tipo são chamados de *esquecedores*, pois "se lembram" somente dos conjuntos e das funções correspondentes, "esquecendo-se" das estruturas adicionais. Também é possível esquecer uma parte das estruturas adicionais. Por exemplo, podemos considerar o funtor $\mathcal{G}\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{GrpAb}$, que associa:

- a um $\mathbb{K}$-espaço vetorial o grupo abeliano subjacente;
- a uma função linear f a mesma função pensada como morfismo de grupos abelianos.

Este também é um funtor esquecedor. $\diamondsuit$

EXEMPLO 2.2.3. Seja $A\colon \mathrm{TopLocCptP} \to \mathrm{TopHd}$ o funtor compactificação a um ponto, que associa a um espaço localmente compacto X a sua compactificação X^+, que é de Hausdorff, e a uma função contínua própria $f\colon Y \to X$ a função contínua $f^+\colon Y^+ \to X^+$ (v. seção 1.3.6). Trata-se de um funtor bem definido. $\diamondsuit$

EXEMPLO 2.2.4. Sejam $\mathcal{C}$ a categoria do exemplo 2.1.14 e $\mathcal{D}$ a do exemplo 2.1.15. Fica definido um funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ por $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Z) = U$, $F(Y) = V$, $F(f) = k$, $F(g) = l$, $F(h) = \mathrm{id}_U$. $\diamondsuit$

Veremos muitos exemplos significativos nos volumes de topologia diferencial e algébrica.

OBSERVAÇÃO 2.2.5. Para toda categoria $\mathcal{C}$ existe o funtor identidade $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, que atua como a função identidade entre os objetos e entre os morfismos. $\diamondsuit$

LEMA 2.2.6. *Um funtor manda isomorfismos em isomorfismos e morfismos invertíveis à esquerda (direita) em morfismos invertíveis à esquerda (direita).*

DEMONSTRAÇÃO. Usando a notação da definição 2.2.1, seja $f\colon X \to Y$ invertível à esquerda. Então existe $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$, logo $\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$. Isso prova que $\mathcal{F}(f)$ é invertível à esquerda. O mesmo vale se $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. $\square$

2.2.1. Categoria oposta e funtores contravariantes. Frequentemente é necessário considerar funtores que invertem o domínio e o contradomínio dos morfismos, ditos *contravariantes* (por isso os funtores que acabamos de definir às vezes são ditos *covariantes*). Uma possibilidade consiste em dar a mesma definição, só pedindo que a função que atua sobre os morfismos seja definida por $\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y),\mathcal{F}(X))$, todavia se prefere dar uma definição diferente, que agora vamos mostrar.

Definição 2.2.7. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A *categoria oposta* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ é definida da seguinte maneira:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- para $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$;
- para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y,Z)$, ou seja, $f\colon Y \to X$ e $g\colon Z \to Y$ em $\mathcal{C}$, a composição $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Z)$ coincide com a composição $f \circ g\colon Z \to X$ em $\mathcal{C}$. ♢

Definição 2.2.8. Um *funtor contravariante* de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ é um funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ (equivalentemente, é um funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$). ♢

Exemplo 2.2.9. Seja $*\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ o funtor dualidade, que associa a um objeto V o dual V^* e a uma função linear $f\colon V \to W$ a função transposta $f^T\colon W^* \to V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. Trata-se de um funtor contravariante de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ em si mesma. ♢

2.2.2. Isomorfismos e mergulhos de categorias. A seguinte noção de *isomorfismo* entre categorias é muito natural, mas veremos que é demasiado rígida para ser interessante. Mostraremos na próxima seção a noção de *equivalência* de categorias, que é bem mais útil por ser mais flexível.

Definição 2.2.10. Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ditas *isomorfas* se existem dois funtores $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. ♢

Exemplo 2.2.11. Seja TopD a categoria cujos objetos são os espaços topológicos formados por um conjunto dotado da topologia discreta e cujos morfismos são as funções (contínuas) entre estes espaços. Seja $\mathcal{F}\colon \mathrm{Sets} \to \mathrm{TopD}$ o funtor que associa:

- a um conjunto X o espaço topológico obtido dotando X da topologia discreta;
- a uma função $f\colon X \to Y$ a mesma f, pensada como função contínua entre espaços discretos.

Trata-se de um isomorfismo de categorias, cujo inverso é o funtor esquecedor $\mathcal{F}^{-1}\colon \mathrm{TopD} \to \mathrm{Sets}$. ♢

Definição 2.2.12. Um funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito *mergulho de categorias* se a função $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ é injetora e, para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, a função $\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y))$ é injetora. Se a função $\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y))$ for também sobrejetora para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, então $\mathcal{F}$ é dito *mergulho cheio.* ♢

Exemplo 2.2.13. Seja $\mathcal{F}\colon \mathrm{Sets} \to \mathrm{Top}$ o funtor que atua como o do exemplo 2.2.11, associando a um conjunto o correspondente espaço topológico discreto. Trata-se de um mergulho cheio de categorias, cuja imagem é a subcategoria cheia TopD de Top. ♢

Exemplo 2.2.14. Fixado um corpo $\mathbb{K}$, seja $\mathcal{F}\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{Vect}$ o funtor que associa a um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V o par $(V, \mathbb{K})$ e a uma função linear $f\colon V \to W$ o par $(f, \mathrm{id}_{\mathbb{K}})$. Trata-se de um mergulho de categorias. Vamos verificar que $\mathcal{F}$ é cheio se, e somente se, o único automorfismo do corpo $\mathbb{K}$ é a identidade. ($\Leftarrow$) Óbvio, pois os únicos morfismos possíveis em Vect são da forma $(f, \mathrm{id}_{\mathbb{K}})$. ($\Rightarrow$) Seja $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ um automorfismo diferente da identidade. Dado um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V (por exemplo $V = \mathbb{K}^n$), definimos o espaço vetorial V' da seguinte maneira: como grupo abeliano $V = V'$; denotando por '$\cdot$' o produto externo de V e por '$\circ$' o produto externo de V', definimos $\lambda \circ \underline{v} := \varphi(\lambda) \cdot \underline{v}$. (Por exemplo, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e φ é a conjugação, obtemos o espaço vetorial conjugado.) Fica definido o isomorfismo $(\mathrm{id}, \varphi^{-1})\colon V \to V'$ em Vect, o qual não pertence à imagem de $\mathcal{F}$, logo $\mathcal{F}$ não é cheio. ♢

Exemplo 2.2.15. Seja Mod a categoria dos módulos sobre um anel comutativo, definida da seguinte maneira:

- os objetos são os pares (M, R), sendo R um anel comutativo e M um R-módulo;
- um morfismo de (M, R) a (M', R') é um par $(f\colon M \to M', \varphi\colon R \to R')$, onde φ é um morfismo de anéis e $f\colon M \to M'$ é um morfismo de grupos abelianos tal que $f(r \cdot m) = \varphi(r) \cdot f(m)$ para todos $r \in R$ e $m \in M$.

Seja $\mathcal{F}\colon \mathrm{GrpAb} \to \mathrm{Mod}$ o funtor que associa a um grupo abeliano G o par $(G, \mathbb{Z})$, sendo G dotado da estrutura natural de $\mathbb{Z}$-módulo, e a um morfismo $f\colon G \to H$ o morfismo $(f, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$. Trata-se de um mergulho de categorias, o qual é cheio, dado que o único automorfismo do anel $\mathbb{Z}$ é a identidade. ♢

É fácil verificar que:

- se $\mathcal{C}'$ for uma subcategoria de $\mathcal{C}$, a inclusão $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ é um mergulho de categorias, o qual é cheio se, e somente se, $\mathcal{C}'$ é uma subcategoria cheia;
- a imagem de um mergulho $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma subcategoria de $\mathcal{D}$ isomorfa a $\mathcal{C}$ (sendo $\mathcal{F}$ mesmo um isomorfismo), a qual é cheia se, e somente se, $\mathcal{F}$ é um mergulho cheio;
- um funtor é um isomorfismo de categorias se, e somente se, é um mergulho cheio e é sobrejetor também entre os objetos.

2.2.3. Morfismos de funtores e equivalência de categorias. Como os funtores ligam duas categorias, podemos ligar dois funtores entre duas categorias fixadas graças à seguinte noção.

Definição 2.2.16. Dados dois funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, um *morfismo de funtores* ou *transformação natural* ou *morfismo canônico* $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é definido por um morfismo

$$\varphi(X)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$$

para cada $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, de modo que o seguinte diagrama seja comutativo para todo morfismo $f\colon X \to Y$ em $\mathcal{C}$:

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\varphi(X)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\varphi(Y)"] & \mathcal{G}(Y). \end{tikzcd}$$

♢

Para todo funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, fica definido o *morfismo identidade* $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, associando ao objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ o morfismo $\mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$.

Definição 2.2.17. Dados dois morfismos de funtores $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, sendo $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, definimos a *composição* entre φ e ψ por $(\psi \circ \varphi)(X) := \psi(X) \circ \varphi(X)$ para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. ♢

Por causa da definição precedente, os funtores entre duas categorias fixadas se tornam eles mesmos objetos de uma categoria. Em particular, dois funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ são *isomorfos* quando existem dois morfismos $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ tais que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ e $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$. Um isomorfismo de funtores é dito também *isomorfismo canônico* ou *isomorfismo natural*.

Exemplo 2.2.18. Consideremos o funtor $**\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, que associa a um espaço V o bi-dual V^{**} e a uma função linear $f\colon V \to W$ a dupla transposta $f^{TT}\colon V^{**} \to W^{**}$. Lembramos que a função transposta $f^T\colon W^* \to V^*$ é definida por $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ para todo $\varphi \in W^*$, portanto a dupla transposta $f^{TT}\colon V^{**} \to W^{**}$ é definida por $\alpha \mapsto \alpha \circ f^T$ para todo $\alpha \in V^{**}$. Há um morfismo de funtores entre $\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}^f_{\mathbb{K}}}$ e $**$ definido da seguinte maneira: dado um objeto V, definimos $\varphi(V)\colon V \to V^{**}$ por $v \in V \mapsto \alpha_v \in V^{**}$, sendo $\alpha_v(\xi) := \xi(v)$ para todo $\xi \in V^*$. O leitor pode verificar que se trata efetivamente de um morfismo de funtores (v. seção 4.1.2). Restringindo esta transformação natural aos espaços de dimensão finita, obtemos o *isomorfismo* canônico $**\colon \mathrm{Vect}^f_{\mathbb{K}} \to \mathrm{Vect}^f_{\mathbb{K}}$. ♢

É claro que, se um morfismo de funtores $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, sendo $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, for um isomorfismo, então $\varphi(X)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$ para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. É fácil verificar que vale também a volta, como mostra o seguinte lema.

Lema 2.2.19. *Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dois funtores. Um morfismo de funtores $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é um isomorfismo se, e somente se, para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, o morfismo $\varphi(X)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ o inverso de φ. Temos que $\psi(X) \circ \varphi(X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$ e $\varphi(X) \circ \psi(X) = \mathrm{id}_{\mathcal{G}(X)}$, logo $\varphi(X)$ é um isomorfismo, sendo $\psi(X)$ seu inverso. ($\Leftarrow$) Devemos verificar que os morfismos $\varphi^{-1}(X)\colon \mathcal{G}(X) \to \mathcal{F}(X)$ tornam comutativos os diagramas correspondentes da forma (2). Sendo φ um morfismo de funtores, o diagrama (2) relativo a φ comuta, ou seja, $\mathcal{G}(f) \circ \varphi(X) = \varphi(Y) \circ \mathcal{F}(f)$. Compondo ambos os lados com $\varphi(X)^{-1}$ à direita e com $\varphi(Y)^{-1}$ à esquerda, obtemos que $\varphi(Y)^{-1} \circ \mathcal{G}(f) = \mathcal{F}(f) \circ \varphi(X)^{-1}$, logo o diagrama (2), relativo a φ^{-1}, comuta também. □

Definição 2.2.20. Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ditas *equivalentes* quando existem dois funtores $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. Os funtores $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são ditos *equivalências* de categorias. ♢

A definição de equivalência é bem mais útil que a de isomorfismo de categorias, pois é muito difícil que a composição de dois funtores coincida exatamente com a identidade, enquanto é muito mais comum que seja isomorfa à identidade.[2] Antes de mostrar um exemplo, vamos enunciar uma caracterização significativa das equivalências de categorias.

Definição 2.2.21. Um funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito:

- *fiel* se, para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, a função $\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ é injetora;
- *cheio* se, para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, a função $\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ é sobrejetora. ♢

Já vimos a definição de mergulho cheio, mas a mesma noção vale para qualquer funtor. É claro que um mergulho é fiel por definição. Ademais, o fato que um funtor seja fiel ou cheio é independente do fato que seja injetor ou sobrejetor entre os objetos, como mostram os seguintes exemplos.

Exemplo 2.2.22. Seja $\mathcal{F}\colon \mathrm{Grp} \to \mathrm{Sets}$ o funtor esquecedor do exemplo 2.2.2. Este funtor não é injetor entre os objetos, pois o mesmo conjunto pode admitir várias estruturas de grupo, porém é fiel, pois um morfismo de grupos é um caso particular de função entre conjuntos. Enfim, $\mathcal{F}$ não é cheio, pois nem toda função entre dois grupos fixados respeita o produto. ♢

Exemplo 2.2.23. Sejam Vect a categoria dos espaços vetoriais, definida no exemplo 2.1.7, Crp a categoria dos corpos e $\pi\colon \mathrm{Vect} \to \mathrm{Crp}$ o funtor que associa ao objeto $(V, \mathbb{K})$ o corpo $\mathbb{K}$ e ao morfismo (f, φ) o morfismo de corpos φ. Este funtor é cheio, pois, fixados dois objetos $(V, \mathbb{K})$ e $(W, \mathbb{K}')$, todo morfismo $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ em Crp é a imagem do morfismo $(0, \varphi)$ em Vect. Contudo, não se trata de um funtor fiel, pois, em geral, o mesmo morfismo de corpos φ pode ser completado de várias maneiras a um morfismo (f, φ) de espaços vetoriais. O funtor π é também sobrejetor entre os objetos, mas, se estendêssemos o contradomínio de π à categoria dos anéis unitários, π continuaria sendo cheio mas não seria mais sobrejetor entre os objetos. ♢

Teorema 2.2.24. *Um funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, valem as duas seguintes condições:*

(i) *$\mathcal{F}$ é fiel e cheio;*
(ii) *para todo objeto $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ existe $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tal que $Y \simeq \mathcal{F}(X)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ uma equivalência inversa a $\mathcal{F}$ e seja $\varphi\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ um isomorfismo de funtores. Para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, temos o

[2] Para o leitor mais experiente, a categoria das variedades afins sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado é equivalente, mas não isomorfa, à categoria das $\mathbb{K}$-álgebras finitamente geradas reduzidas. Analogamente, a categorias dos esquemas afins é equivalente, mas não isomorfa, à categorias dos anéis comutativos e unitários.

seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{G}\circ\mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(f)"] \arrow[ll, bend right, "\overset{\varphi(X)}{\simeq}"'] \\
Y & \mathcal{F}(Y) & \mathcal{G}\circ\mathcal{F}(Y). \arrow[ll, bend left, "\underset{\varphi(Y)}{\simeq}"]
\end{tikzcd}$$

Isso mostra que $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(f) = \varphi(Y)^{-1}\circ f\circ\varphi(X)$. A função $f \mapsto \varphi(Y)^{-1}\circ f\circ\varphi(X)$ é bijetora, dado que $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$ são isomorfismos, portanto $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(X), \mathcal{G}\circ\mathcal{F}(Y))$ é bijetora, logo $\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y))$ é injetora. Isso mostra que $\mathcal{F}$ é fiel.

Analogamente, seja $\psi\colon \mathcal{F}\circ\mathcal{G} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ um isomorfismo de funtores. Para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[d, "g"'] & \mathcal{G}\circ\mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}(g)"] & \mathcal{F}\circ\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathcal{F}\circ\mathcal{G}(g)"] \arrow[ll, bend right, "\overset{\psi(\mathcal{F}(X))}{\simeq}"'] \\
\mathcal{F}(Y) & \mathcal{G}\circ\mathcal{F}(Y) & \mathcal{F}\circ\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(Y). \arrow[ll, bend left, "\underset{\psi(\mathcal{F}(Y))}{\simeq}"]
\end{tikzcd}$$

Isso mostra que $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}(g) = \psi(\mathcal{F}(Y))^{-1}\circ g\circ\psi(\mathcal{F}(X))$. A função $g \mapsto \psi(\mathcal{F}(Y))^{-1}\circ g\circ \psi(\mathcal{F}(X))$ é bijetora, portanto $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\colon \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(X), \mathcal{F}\circ\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(Y))$ é bijetora, logo $\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}(\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(X),\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(Y)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(X), \mathcal{F}\circ\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(Y))$ é sobrejetora. Pelo lema 2.1.27, os isomorfismos $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$ induzem a bijeção $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(X),\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(Y)) \simeq \mathrm{Hom}(X,Y)$. Analogamente, os isomorfismos $\psi(\mathcal{F}(X))$ e $\psi(\mathcal{F}(Y))$ induzem a bijeção $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(X), \mathcal{F}\circ\mathcal{G}\circ\mathcal{F}(Y)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y))$, portanto $\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y))$ é sobrejetora. Isso mostra que $\mathcal{F}$ é cheio.

Enfim, fixado um objeto $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, seja $X := \mathcal{G}(Y)$. Fica definido o isomorfismo $\psi(Y)$ entre Y e $\mathcal{F}(X)$.

($\Leftarrow$) Vamos mostrar que existe um funtor $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{G}\circ\mathcal{F} \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{F}\circ\mathcal{G} \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. Para cada $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, fixamos $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tal que $Y \simeq \mathcal{F}(X)$ e definimos $\mathcal{G}(Y) := X$, fixando um isomorfismo $\eta_{X,Y}\colon \mathcal{F}(X) \to Y$. Dado um morfismo $\varphi\colon Y \to Y'$ em $\mathcal{D}$, sejam $X = \mathcal{G}(Y)$ e $X' = \mathcal{G}(Y')$. Definimos $\psi := \eta_{X',Y'}^{-1}\circ\varphi\circ\eta_{X,Y}\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X')$. Dado que $\mathcal{F}$ é fiel e cheio, existe um único morfismo $\xi\colon X \to X'$ tal que $\mathcal{F}(\xi) = \psi$. Definimos $\mathcal{G}(\varphi) := \xi$. $\square$

Observação 2.2.25. Seja $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor fiel e cheio. Seja $\mathcal{D}'$ a subcategoria cheia de $\mathcal{D}$ formada pelos objetos Y tais que existe $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tal que $Y \simeq \mathcal{F}(X)$. Por causa do teorema 2.2.24, $\mathcal{F}$ é uma equivalência entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}'$. Isso mostra que há uma ligação muito forte entre a noção de equivalência de categorias e a de funtor fiel e cheio: podemos afirmar que um funtor fiel e cheio é um “mergulho a menos de equivalência”. $\diamondsuit$

Exemplo 2.2.26. Seja $\overline{\mathrm{Vect}}^f_{\mathbb{K}}$ a subcategoria cheia de $\mathrm{Vect}^f_{\mathbb{K}}$ cujos objetos são somente os espaços vetoriais $\mathbb{K}^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue imediatamente do teorema 2.2.24 que o mergulho de $\overline{\mathrm{Vect}}^f_{\mathbb{K}}$ em $\mathrm{Vect}^f_{\mathbb{K}}$ é uma equivalência de categorias. Obviamente não é um isomorfismo, pois não é sobrejetor entre os objetos. $\diamondsuit$

2.3. Algumas construções naturais

Vamos mostrar algumas construções que seguem naturalmente das definições de categoria e de funtor.

2.3.1. Categoria produto.

Definição 2.3.1. Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, a *categoria produto* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é definida da seguinte maneira:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X,Y),(X',Y')) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,Y')$;
- dados $(f,g)\colon (X,Y) \to (X',Y')$ e $(f',g')\colon (X',Y') \to (X'',Y'')$, definimos $(f',g') \circ (f,g) := (f' \circ f, g' \circ g)$. $\diamondsuit$

Ficam definidos dois funtores naturais, ditos *projeções*, $\Pi_1\colon \mathcal{C}\times\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e $\Pi_2\colon \mathcal{C}\times\mathcal{D} \to \mathcal{D}$, que mandam o objeto (X,Y) respetivamente em X e em Y e o morfismo (f,g) respetivamente em f e em g.

Dadas n categorias $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_n$, podemos definir de modo análogo a categoria produto $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$ e os funtores $\Pi_i\colon \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_i$. Mais em geral, dada uma família (finita ou infinita) de categorias $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$, podemos definir a categoria produto $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ e as projeções $\Pi_i\colon \prod_{j\in I}\mathcal{C}_j \to \mathcal{C}_i$. O leitor pode elaborar facilmente os detalhes.

2.3.2. Categoria quociente. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e suponhamos que, para todo par de objetos $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, seja definida uma relação de equivalência no conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, que denotamos por '$\sim$'. Variando o par (X,Y) obtemos uma família de relações de equivalência, a qual é dita *compatível com a composição* se vale a seguinte condição. Sejam $f,f'\colon X \to Y$ e $g,g'\colon Y \to Z$. Suponhamos que $f \sim f'$ e $g \sim g'$. Então $g \circ f \sim g' \circ f'$.

Definição 2.3.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e suponhamos que seja definida em $\mathcal{C}$ uma família de relações de equivalência compatível com a composição, que denotamos por '$\sim$'. A *categoria quociente* $\mathcal{C}/\sim$ é definida da seguinte maneira:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/\sim) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\sim}(X,Y)$ é quociente do conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pela relação de equivalência $\sim$;
- dados $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ em $\mathcal{C}$, definimos $[g] \circ [f] := [g \circ f]$. $\diamondsuit$

Veremos um exemplo fundamental no volume de topologia algébrica, considerando a categoria Top e a relação de equivalência induzida pela existência de uma homotopia entre duas funções.

2.3.3. Funtores induzidos pelos morfismos. Consideremos uma categoria $\mathcal{C}$ e um objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ fixado. Fica definido o seguinte funtor:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A \colon \mathcal{C} &\to \mathrm{Sets}\\ X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X); &\quad f \mapsto (g \mapsto f \circ g).\end{aligned}$$

Isso significa o seguinte. Dado um objeto X, lhe associamos o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)$, pensado como objeto de Sets. Consideremos um morfismo $f \colon X \to Y$ em $\mathcal{C}$. Temos que associar-lhe uma função $\mathrm{Hom}_A(f) \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,Y)$, pensada como morfismo na categoria Sets. Associamos a f a função que manda $g \colon A \to X$ em $f \circ g \colon A \to Y$. Analogamente, fica definido o seguinte funtor:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}'_A \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{Sets}\\ X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A); &\quad f \mapsto (g \mapsto g \circ f).\end{aligned}$$

Se deixamos variar o domínio e o contradomínio ao mesmo tempo, então, para toda categoria $\mathcal{C}$, fica definido o seguinte funtor:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom} \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} &\to \mathrm{Sets}\\ (X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y); &\quad (f,g) \mapsto (h \mapsto g \circ h \circ f).\end{aligned}$$

Vamos explicar o comportamento em relação aos morfismos. Por definição, um morfismo $(f,g) \colon (X,Y) \to (X',Y')$ coincide com um par de morfismos $f \colon X' \to X$ e $g \colon Y \to Y'$. A função associada a (f,g), de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y')$, manda o morfismo $h \colon X \to Y$ no morfismo $g \circ h \circ f \colon X' \to Y'$.

2.3.4. Categorias de morfismos. Podemos também pensar nos morfismos de uma categoria como nos objetos de uma nova categoria, como mostra a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.3.3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A *categoria dos morfismos* de $\mathcal{C}$ é a categoria $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ definida da seguinte maneira:

- os objetos de $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ são os morfismos de $\mathcal{C}$, ou seja:
$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}(\mathcal{C})) := \bigsqcup_{(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y);$$
- dados dos objetos $f \colon X \to Y$ e $g \colon Z \to W$, um morfismo $(k,h) \colon f \to g$ é um par de morfismos $h \colon X \to Z$ e $k \colon Y \to W$ em $\mathcal{C}$ que torna o seguinte diagrama comutativo:[3]
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "k"] \\ Z \arrow[r, "g"] & W; \end{tikzcd}$$
- a composição é definida por $(k',h') \circ (k,h) := (k' \circ k, h' \circ h)$. ♢

[3]Usamos a notação (k,h), ao invés de (h,k), por motivos que ficarão claros em seguida.

Observação 2.3.4. Neste caso pode ser necessário aplicar a observação 2.1.2. Por exemplo, consideremos dois morfismos distintos $f, g\colon X \to Y$ em $\mathcal{C}$. Conforme a definição 2.3.3, na categoria $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ os dois morfismos $\mathrm{id}_f\colon f \to f$ e $\mathrm{id}_g\colon g \to g$ coincidem com o par $(\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_X)$, portanto $\mathrm{Hom}(f,f) \cap \mathrm{Hom}(g,g) \neq \emptyset$. Graças à observação 2.1.2 podemos resolver facilmente este problema. Esta consideração vale também para as outras categorias que definiremos nesta seção. $\diamondsuit$

Um funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induz o funtor $\mathrm{Hom}(\mathcal{F})\colon \mathrm{Hom}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{D})$, que manda um objeto $f\colon X \to Y$ no objeto $\mathcal{F}(f)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ e um morfismo (k,h) no morfismo $(\mathcal{F}(k), \mathcal{F}(h))$. Dados dois funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, um morfismo de funtores $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induz o morfismo de funtores $\mathrm{Hom}(\varphi)\colon \mathrm{Hom}(\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G})$, que associa ao objeto $f\colon X \to Y$ o morfismo $(\varphi(Y), \varphi(X))$.

Fixando um objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, podemos definir as sub-categorias $\mathcal{C} \downarrow A$ e $\mathcal{C} \uparrow A$ de $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ da seguinte maneira.

Definição 2.3.5. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. A categoria $\mathcal{C} \downarrow A$ é definida da seguinte maneira:

- os objetos de $\mathcal{C} \downarrow A$ são os morfismos de $\mathcal{C}$ cujo contradomínio é A, ou seja:
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \downarrow A) := \bigsqcup_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A);$$
- dados dos objetos $f\colon X \to A$ e $g\colon Y \to A$, um morfismo entre f e g é um morfismo $h\colon X \to Y$ tal que $g \circ h = f$, ou seja, tal que o seguinte diagrama é comutativo:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & A; & \end{tikzcd}$$
- a composição é a restrição da em $\mathcal{C}$. $\diamondsuit$

Definição 2.3.6. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. A categoria $\mathcal{C} \uparrow A$ é definida da seguinte maneira:

- os objetos de $\mathcal{C} \uparrow A$ são os morfismos de $\mathcal{C}$ cujo domínio é A, ou seja:
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \uparrow A) := \bigsqcup_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X);$$
- dados dos objetos $f\colon A \to X$ e $g\colon A \to Y$, um morfismo entre f e g é um morfismo $k\colon X \to Y$ tal que $k \circ f = g$, ou seja, tal que o seguinte diagrama é comutativo:
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, "k"] & & Y; \end{tikzcd}$$
- a composição é a restrição da em $\mathcal{C}$. $\diamondsuit$

As categorias $\mathcal{C} \downarrow A$ e $\mathcal{C} \uparrow A$ são subcategorias de $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$. De fato, os objetos das duas formam um subconjunto dos de $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ por definição. Ademais, temos a inclusão $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\downarrow A}(f, g) \subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C})}(f, g)$, $h \mapsto (\mathrm{id}_A, h)$, pois o morfismo $h\colon f \to g$ pode ser pensado das duas seguintes maneiras equivalentes:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\ Y \arrow[r, "g"] & A. \end{tikzcd}$$

Uma construção análoga vale para $\mathcal{C} \uparrow A$, sendo a inclusão entre os morfismos dada por $k \mapsto (k, \mathrm{id}_A)$. Não se trata de sub-categorias cheias, pois fica fixado id_A como morfismo de A a A.

Enfim, podemos definir a categoria $\mathrm{Hom}_n(\mathcal{C})$, para $n \geq 2$, cujos objetos são sequências:

$$X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} X_n$$

sendo $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_{i+1})$. Um morfismo em $\mathrm{Hom}_n(\mathcal{C})$ é uma sequência de morfismos $(g_n, \ldots, g_1)$ que torna o diagrama correspondente comutativo. Um funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induz o funtor $\mathrm{Hom}_n(\mathcal{F})\colon \mathrm{Hom}_n(\mathcal{C}) \to \mathrm{Hom}_n(\mathcal{D})$ e um morfismo de funtores $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induz o morfismo de funtores $\mathrm{Hom}_n(\varphi)\colon \mathrm{Hom}_n(\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_n(\mathcal{G})$. É claro que $\mathrm{Hom}_2(\mathcal{C}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ e podemos estabelecer por convenção que $\mathrm{Hom}_1(\mathcal{C}) := \mathcal{C}$. Poderíamos também considerar sequências infinitas, de um lado ou de ambos, de objetos e morfismos, definindo as categorias correspondentes.

2.4. Produtos e coprodutos

Acontece frequentemente de considerar o produto cartesiano de dois ou mais objetos, por exemplo de conjuntos, de espaços topológicos, de grupos e assim em diante. Vamos mostrar a construção categorial do produto e a sua dual, dita coproduto. Também discutiremos as respetivas versões *fibradas*.

2.4.1. Produto e coproduto.

DEFINIÇÃO 2.4.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Um *produto* em $\mathcal{C}$ entre X e Y é uma tripla $(X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$ tal que:

- $X \times Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\pi_X\colon X \times Y \to X$ e $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ são morfismos;
- dados um objeto $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e dois morfismos $f\colon Z \to X$ e $g\colon Z \to Y$, existe um *único* morfismo $f \times g\colon Z \to X \times Y$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "f\times g"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & X \times Y \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "\pi_Y"] & X \\ & Y. & \end{tikzcd}$$

$\diamondsuit$

Definição 2.4.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Um *coproduto* em $\mathcal{C}$ entre X e Y é uma tripla $(X \coprod Y, i_X, i_Y)$ tal que:

- $X \coprod Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $i_X : X \to X \coprod Y$ e $i_Y : Y \to X \coprod Y$ são morfismos;
- dados um objeto $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e dois morfismos $f : X \to Z$ e $g : Y \to Z$, existe um *único* morfismo $f \coprod g : X \coprod Y \to Z$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z & & \\
& X \coprod Y \arrow[ul, dotted, "f\coprod g"'] & X \arrow[l, "i_X"'] \arrow[ull, bend right, "f"'] \\
& Y. \arrow[u, "i_Y"'] \arrow[uul, bend left, "g"] &
\end{tikzcd}$$

♢

Exemplo 2.4.3. Na categoria Sets o produto cartesiano $X \times Y$, com as duas projeções naturais, é um produto entre X e Y, enquanto a união *disjunta* $X \sqcup Y$, com as inclusões naturais, é um coproduto. ♢

Exemplo 2.4.4. Na categoria Top o produto cartesiano $X \times Y$, dotado da topologia produto, com as duas projeções naturais, é um produto entre X e Y, enquanto a união *disjunta* $X \sqcup Y$, em que X e Y são componentes conexas distintas, com as inclusões naturais, é um coproduto. ♢

Exemplo 2.4.5. Na categoria $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, a soma direta de dois espaços, com as projeções naturais, é um produto e a mesma soma direta, com as inclusões naturais, é um coproduto. O produto tensor não é um produto nem um coproduto, pois não há morfismos naturais $V \otimes W \to V$ e $V \otimes W \to W$, nem $V \to V \otimes W$ e $W \to V \otimes W$. O produto tensor torna $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ uma *categoria monoidal simétrica*. Este tópico será discutido no apêndice A.3. ♢

Observação 2.4.6. Dados dois morfismos $f : Z \to X$ e $g : W \to Y$, se existirem os produtos $(Z \times W, \pi_Z, \pi_W)$ e $(X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$, fica definido o único morfismo $f \times g : Z \times W \to X \times Y$ tal que $\pi_X \circ (f \times g) = f \circ \pi_Z$ e $\pi_Y \circ (f \times g) = g \circ \pi_W$. De fato, sejam $f' := f \circ \pi_Z : Z \times W \to X$ e $g' := g \circ \pi_W : Z \times W \to Y$. Aplicando a definição de produto a $X \times Y$, fica definido de modo único $f \times g : Z \times W \to X \times Y$ tal que $\pi_X \circ (f \times g) = f'$ e $\pi_Y \circ (f \times g) = g'$. Analogamente, se existirem os coprodutos $(Z \coprod W, i_Z, i_W)$ e $(X \coprod Y, i_X, i_Y)$, fica definido o único morfismo $f \coprod g : Z \coprod W \to X \coprod Y$ tal que $(f \coprod g) \circ i_Z = i_X \circ f$ e $(f \coprod g) \circ i_W = i_Y \circ g$. ♢

Dada uma categoria genérica $\mathcal{C}$, nem sempre existem o produto e o coproduto de um par de objetos. Por exemplo, veremos que na categoria das variedades suaves com bordo o produto não existe em geral, enquanto na categoria dos espaços topológicos conexos o coproduto não existe em geral. Todavia, se existem, são únicos a menos de um *único* isomorfismo, como mostra o seguinte lema.

Lema 2.4.7. *Sejam $(X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$ e $(X \times' Y, \pi'_X, \pi'_Y)$ dois produtos dos objetos X e Y de uma categoria $\mathcal{C}$. Os morfismos $\pi_X \times' \pi_Y : X \times Y \to X \times' Y$ e $\pi'_X \times \pi'_Y : X \times' Y \to X \times Y$ são os únicos isomorfismos, inversos entre si, que comutam com as projeções. Vale também o resultado análogo em relação ao coproduto.*

Demonstração. Conforme a notação da definição 2.4.1, consideremos o objeto $Z = X \times' Y$ e os morfismos $f = \pi'_X$ e $g = \pi'_Y$. Por definição, existe um único morfismo $\pi'_X \times \pi'_Y \colon X \times' Y \to X \times Y$ tal que $\pi_X \circ (\pi'_X \times \pi'_Y) = \pi'_X$ e $\pi_Y \circ (\pi'_X \times \pi'_Y) = \pi'_Y$. Analogamente, trocando os papeis dos dois produtos, concluímos que existe um único morfismo $\pi_X \times' \pi_Y \colon X \times Y \to X \times' Y$ tal que $\pi'_X \circ (\pi_X \times' \pi_Y) = \pi_X$ e $\pi'_Y \circ (\pi_X \times' \pi_Y) = \pi_Y$. Obtemos os dois seguintes diagramas:

(3)
$$
\begin{tikzcd}
X \times' Y \arrow[dr, dotted, "\pi'_X \times \pi'_Y"] \arrow[drr, bend left, "\pi'_X"] \arrow[ddr, bend right, "\pi'_Y"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "\pi_Y"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[dr, dotted, "\pi_X \times' \pi_Y"] \arrow[drr, bend left, "\pi_X"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_Y"'] & & \\
& X \times' Y \arrow[r, "\pi'_X"] \arrow[d, "\pi'_Y"] & X \\
& Y. &
\end{tikzcd}
$$

Fica definida a composição $(\pi_X \times' \pi_Y) \circ (\pi'_X \times \pi'_Y) \colon X \times' Y \to X \times' Y$. Ademais:

$$
\begin{aligned}
\pi'_X \circ (\pi_X \times' \pi_Y) \circ (\pi'_X \times \pi'_Y) &= \pi_X \circ (\pi'_X \times \pi'_Y) = \pi'_X \\
\pi'_Y \circ (\pi_X \times' \pi_Y) \circ (\pi'_X \times \pi'_Y) &= \pi_Y \circ (\pi'_X \times \pi'_Y) = \pi'_Y.
\end{aligned}
$$

Analogamente, fica definida a composição $(\pi'_X \times \pi'_Y) \circ (\pi_X \times' \pi_Y) \colon X \times Y \to X \times Y$ tal que $\pi_X \circ (\pi'_X \times \pi'_Y) \circ (\pi_X \times' \pi_Y) = \pi_X$ e $\pi_Y \circ (\pi'_X \times \pi'_Y) \times (\pi_X \times' \pi_Y) = \pi_Y$. Por isso, obtemos os seguintes diagramas:

(4)
$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[dr, dotted, "(\pi'_X \times \pi'_Y) \circ (\pi_X \times' \pi_Y)"] \arrow[drr, bend left, "\pi_X"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_Y"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "\pi_Y"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times' Y \arrow[dr, dotted, "(\pi_X \times' \pi_Y) \circ (\pi'_X \times \pi'_Y)"] \arrow[drr, bend left, "\pi'_X"] \arrow[ddr, bend right, "\pi'_Y"'] & & \\
& X \times' Y \arrow[r, "\pi'_X"] \arrow[d, "\pi'_Y"] & X \\
& Y. &
\end{tikzcd}
$$

Conforme a notação da definição 2.4.1, consideremos o objeto $Z = X \times Y$ e os morfismos $f = \pi_X$ e $g = \pi_Y$. Por definição, o morfismo $\pi_X \times \pi_Y \colon X \times Y \to X \times Y$, que torna o diagrama comutativo, é único. Por causa do diagrama (4), $\pi_X \times \pi_Y = (\pi'_X \times \pi'_Y) \circ (\pi_X \times' \pi_Y)$. Também $\pi_X \times \pi_Y = \mathrm{id}_{X \times Y}$ torna o diagrama comutativo, portanto $(\pi'_X \times \pi'_Y) \circ (\pi_X \times' \pi_Y) = \mathrm{id}_{X \times Y}$. Analogamente, $(\pi_X \times' \pi_Y) \circ (\pi'_X \times \pi'_Y) = \mathrm{id}_{X \times' Y}$, portanto as duas composições são isomorfismos entre $X \times Y$ e $X \times' Y$, os quais comutam com as projeções, por causa do diagrama (3). Uma demonstração análoga vale para o coproduto. □

As definições 2.4.1 e 2.4.2 se estendem facilmente a uma família de objetos, mesmo se infinita.

Definição 2.4.8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $\{X_i\}_{i \in I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Um *produto* em $\mathcal{C}$ da família $\{X_i\}_{i \in I}$ é um objeto $X := \prod_{i \in I} X_i$, com uma família de morfismos $\pi_i \colon X \to X_i$, tais que, dados um objeto $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e uma família de morfismos $f_i \colon Z \to X_i$, existe um *único* morfismo $f \colon Z \to X$ tal que $\pi_i \circ f = f_i$. ♢

Definição 2.4.9. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $\{X_i\}_{i\in I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Um *coproduto* em $\mathcal{C}$ da família $\{X_i\}_{i\in I}$ é um objeto $X := \coprod_{i\in I} X_i$, com uma família de morfismos $\iota_i \colon X_i \to X$, tais que, dados um objeto $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e uma família de morfismos $f_i \colon X_i \to Z$, existe um *único* morfismo $f \colon X \to Z$ tal que $f \circ \iota_i = f_i$. ♢

Como no caso de dois objetos, o produto ou o coproduto de uma família de objetos pode não existir em geral, mas, se existe, é único a menos de um único isomorfismo. A demonstração da unicidade é análoga à do lema 2.4.7.

Exemplo 2.4.10. Na categoria $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, o produto de uma família $\{V_i\}_{i\in I}$ é o produto cartesiano $\prod_{i\in I} V_i$, com as operações definidas componente por componente e as projeções naturais, enquanto o coproduto é a soma direta $\bigoplus_{i\in I} V_i$, com as operações definidas componente por componente e as inclusões naturais. Se I for infinito, a soma direta $\bigoplus_{i\in I} V_i$ é um subespaço vetorial próprio de $\prod_{i\in I} V_i$, sendo formada pelos vetores $\{v_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$ tais que o conjunto $\{i \in I : v_i \neq 0\}$ é finito. Um resultado análogo vale na categoria dos grupos abelianos ou dos módulos sobre um anel comutativo fixado. ♢

2.4.2. Produto e coproduto fibrados. Por enquanto mostramos a definição de produto e coproduto. Agora vamos mostrar as noções de *produto fibrado* e *coproduto fibrado*, que são análogas, mas incluem algumas informações a mais. Em muitas categorias com que trabalharemos o produto e o coproduto são casos particulares das versões fibradas.

Definição 2.4.11. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $f \colon X \to Z$ e $g \colon Y \to Z$ dois morfismos em $\mathcal{C}$. Um *produto fibrado* em $\mathcal{C}$ entre f e g, dito também *pull-back* de f através de g, é uma tripla $(X \times_Z Y, \pi_X, \pi_Y)$ tal que:

- $X \times_Z Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\pi_X \colon X \times_Z Y \to X$ e $\pi_Y \colon X \times_Z Y \to Y$ são morfismos;
- dados um objeto $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e dois morfismos $h \colon W \to X$ e $k \colon W \to Y$ tais que $f \circ h = g \circ k$, existe um *único* morfismo $h \times_Z k \colon W \to X \times_Z Y$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dotted, "h\times_Z k"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "\pi_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z.
\end{tikzcd}$$

♢

Definição 2.4.12. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $f \colon Z \to X$ e $g \colon Z \to Y$ dois morfismos em $\mathcal{C}$. Um *coproduto fibrado* em $\mathcal{C}$ entre f e g, dito também *push-forward* ou *push-out* de f através de g, é uma tripla $(X \coprod_Z Y, i_X, i_Y)$ tal que:

- $X \coprod_Z Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $i_X \colon X \to X \coprod_Z Y$ e $i_Y \colon Y \to X \coprod_Z Y$ são morfismos;
- dados um objeto $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e dois morfismos $h \colon X \to W$ e $k \colon Y \to W$ tais que $h \circ f = k \circ g$, existe um *único* morfismo $h \coprod_Z k \colon X \coprod_Z Y \to W$

que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
W & & \\
& X \coprod_Z Y \arrow[ul, dotted, "h \coprod_Z k"'] & X \arrow[l, "i_X"'] \arrow[ull, bend right, "h"'] \\
& Y \arrow[u, "i_Y"] \arrow[uul, bend left, "k"] & Z. \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

$\diamondsuit$

OBSERVAÇÃO 2.4.13. As notações $X \times_Z Y$ e $X \coprod_Z Y$ não são precisas, pois o produto e o coproduto fibrados não dependem só de Z, e sim dos morfismos f e g. Todavia, trata-se da notação mais comum. $\diamondsuit$

EXEMPLO 2.4.14. Na categoria Sets, temos que $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$, com as projeções naturais, e $X \coprod_Z Y = (X \sqcup Y)/\sim$, sendo $f(z) \sim g(z)$ para todo $z \in Z$, com as inclusões naturais. Observamos que, se $Z = X \cap Y$ e f e g são as inclusões naturais, então $X \coprod_{X \cap Y} Y = X \cup Y$. Ademais, se Z for um conjunto de um único elemento, então o produto fibrado $X \times_Z Y$ coincide com o produto cartesiano $X \times Y$. Analogamente, se Z for o conjunto vazio, então o coproduto fibrado $X \coprod_Z Y$ coincide com o coproduto $X \sqcup Y$. $\diamondsuit$

EXEMPLO 2.4.15. Na categoria $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, temos que $V \times_Z W = \{(v, w) \in V \oplus W : f(v) = g(w)\}$, com as projeções naturais, e $V \coprod_Z W = (V \oplus W)/\mathrm{Im}(f, -g)$, com as inclusões naturais, dado que quocientar pela imagem de $(f, -g)$ equivale a declarar que $(f(z), 0) \sim (0, g(z))$ para todo $z \in Z$. Observamos que, se $Z = \{0\}$, então o produto e o coproduto fibrado coincidem com o produto e o coproduto. $\diamondsuit$

Dada uma categoria genérica $\mathcal{C}$, nem sempre existem o produto e o coproduto fibrados de um par de objetos. Todavia, se existem, são únicos a menos de um único isomorfismo. A demonstração é análoga à em relação aos produtos e aos coprodutos.

2.4.3. Produto e coproduto fibrados de uma família de objetos. As definições 2.4.11 e 2.4.12 se estendem a uma família genérica de objetos, mesmo se infinita. Podemos considerar a extensão natural definida da seguinte maneira: dada uma família $\{X_i\}_{i \in I}$, fixamos um objeto Z e uma família de morfismos $f_i \colon X_i \to Z$. O produto fibrado $X := \left(\prod_Z\right)_{i \in I} X_i$, com as projeções $\pi_i \colon X \to X_i$, verifica a seguinte propriedade universal. Dada uma família de morfismos $h_i \colon W \to X_i$, tal que $f_i \circ h_i = f_j \circ h_j$ para todo $i, j \in I$, existe um único morfismo $h \colon W \to X$ tal que $h_i = \pi_i \circ h$ para todo $i \in I$. Uma definição análoga vale em relação ao coproduto. Contudo, podemos encontrar uma extensão mais geral que a precedente. De fato, não é necessário fixar um único objeto Z, e sim podemos considerar um objeto Z_{ij} para todo par de índices $i, j \in I$, como mostra a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.4.16. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e I um conjunto. Uma *tripla cartesiana em $\mathcal{C}$ com índices em I* é formada por:

- uma família de objetos $\{X_i\}_{i \in I}$;
- uma família de objetos $\{X_{ij}\}_{i,j \in I}$, sendo $X_{ij} = X_{ji}$;
- uma família de morfismos $f_{ij} \colon X_i \to X_{ij}$. $\diamondsuit$

Isso significa que f_{ij} e f_{ji} têm o mesmo contradomínio, mas domínios diferentes. Poderíamos representar a tripla cartesiana da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}
 & & & X_{ik} & & & \\
\cdots & X_i \arrow[urr, "f_{ik}"] \arrow[dr, "f_{ij}"'] & & X_j \arrow[dl, "f_{ji}"] \arrow[dr, "f_{jk}"'] & & X_k \arrow[ull, "f_{ki}"'] \arrow[dl, "f_{kj}"] & \cdots \\
 & & X_{ij} & & X_{jk} & &
\end{tikzcd}$$

Definição 2.4.17. Seja $\mathcal{A} = (\{X_i\}, \{X_{ij}\}, \{f_{ij}\})$ uma tripla cartesiana em $\mathcal{C}$ com índices em I. O *produto fibrado* da tripla é formado por um objeto $X := \prod_{\mathcal{A}} X_i$ e por uma família de morfismos $\pi_i \colon X \to X_i$ que verificam a seguinte propriedade universal. Dados um objeto W e uma família de morfismos $\{h_i \colon W \to X_i\}$ tais que $f_{ij} \circ h_i = f_{ji} \circ h_j$, existe um único morfismo $h \colon W \to X$ tal que $\pi_i \circ h = h_i$ para todo $i \in I$. ♢

Exemplo 2.4.18. Na categoria Sets, o produto $\prod_{\mathcal{A}} X_i$ é o subconjunto do produto cartesiano $\prod_i X_i$ formado pelos elementos $\{x_i\}$ tais que $f_{ij}(x_i) = f_{ji}(x_j)$ para todos i e j. O mesmo resultado vale na categoria Top, dotando $\prod_{\mathcal{A}} X_i$ da topologia induzida por $\prod_i X_i$. ♢

Exemplo 2.4.19. Na categoria $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, o produto $\prod_{\mathcal{A}} V_i$ é o subespaço vetorial do produto direto $\prod_i V_i$ formado pelos elementos $\{v_i\}$ tais que $f_{ij}(v_i) = f_{ji}(v_j)$ para todos i e j. ♢

Agora podemos dar a definição dual de coproduto fibrado de uma família de objetos, "invertendo o sentido das flechas".

Definição 2.4.20. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e I um conjunto. Uma *tripla cocartesiana em $\mathcal{C}$ com índices em I* é formada por:

- uma família de objetos $\{X_i\}_{i \in I}$;
- uma família de objetos $\{X_{ij}\}_{i,j \in I}$, sendo $X_{ij} = X_{ji}$;
- uma família de morfismos $f_{ij} \colon X_{ij} \to X_i$. ♢

Isso significa que f_{ij} e f_{ji} têm o mesmo domínio, mas contradomínios diferentes. Poderíamos representar a tripla cocartesiana da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}
 & & & X_{ik} \arrow[dll, "f_{ik}"'] \arrow[drr, "f_{ki}"] & & & \\
\cdots & X_i & & X_j & & X_k & \cdots \\
 & & X_{ij} \arrow[ul, "f_{ij}"] \arrow[ur, "f_{ji}"'] & & X_{jk} \arrow[ul, "f_{jk}"] \arrow[ur, "f_{kj}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definição 2.4.21. Seja $\mathcal{A} = (\{X_i\}, \{X_{ij}\}, \{f_{ij}\})$ uma tripla cocartesiana em $\mathcal{C}$ com índices em I. O *coproduto fibrado* da tripla é formado por um objeto

$X := \coprod_{\mathcal{A}} X_i$ e por uma família de morfismos $\iota_i \colon X_i \to X$ que verificam a seguinte propriedade universal. Dados um objeto W e uma família de morfismos $\{h_i \colon X_i \to W\}$ tais que $h_i \circ f_{ij} = h_j \circ f_{ji}$, existe um único morfismo $h \colon X \to W$ tal que $h \circ \iota_i = h_i$ para todo $i \in I$. $\diamondsuit$

Exemplo 2.4.22. Na categoria Sets, o coproduto $\coprod_{\mathcal{A}} X_i$ é o quociente da união disjunta $\coprod_i X_i$ pela relação de equivalência $f_{ij}(x_{ij}) \sim f_{ji}(x_{ij})$ para todos $i, j \in I$ e $x_{ij} \in X_{ij}$. O mesmo resultado vale na categoria Top, dotando $\coprod_{\mathcal{A}} X_i$ da topologia quociente. $\diamondsuit$

Exemplo 2.4.23. Na categoria $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, o coproduto $\coprod_{\mathcal{A}} V_i$ é o quociente da soma direta $\bigoplus_i V_i$ pelo subespaço gerado pelos elementos $f_{ij}(v_{ij}) - f_{ji}(v_{ij})$ para todos $i, j \in I$ e $v_{ij} \in V_{ij}$. $\diamondsuit$

2.5. Adjunção

Consideremos o seguinte exemplo. Fixado um objeto V da categoria $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, ficam definidos os dois seguintes funtores:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V \colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} &\to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \\ W &\mapsto W \otimes_{\mathbb{K}} V \\ f &\mapsto f \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{id}_V \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathrm{Hom}_V \colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} &\to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \\ W &\mapsto \mathrm{Hom}(V, W) \\ f &\mapsto (g \mapsto f \circ g). \end{aligned}$$

Pela propriedade universal do produto tensor (v. teorema 4.2.7), temos o isomorfismo canônico $\mathrm{Hom}(W \otimes V, U) \simeq \mathrm{Hom}(W, \mathrm{Hom}(V, U))$, que podemos escrever da seguinte maneira:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{T}_V(W), U) \simeq \mathrm{Hom}(W, \mathrm{Hom}_V(U)).$$

Trata-se de um exemplo de *adjunção* entre os funtores $\mathcal{T}_V$ e Hom_V. Em geral, sejam $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dois funtores. Uma adjunção é uma bijeção canônica $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y))$ para todo par $(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Para definir a canonicidade da bijeção, temos que considerar dois funtores, cujo comportamento sobre os objetos é o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} &\to \mathrm{Sets} \\ (X, Y) &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y)). \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathcal{G}' \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} &\to \mathrm{Sets} \\ (X, Y) &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y)). \end{aligned}$$

Vamos descrever o comportamento sobre os morfismos. Seja $(f, g) \colon (X, Y) \to (X', Y')$ em $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$. Isso significa que $f \colon X' \to X$ e $g \colon Y \to Y'$. Temos que determinar a função $\mathcal{F}'(f, g) \colon \mathcal{F}'(X, Y) \to \mathcal{F}'(X', Y')$, ou seja, $\mathcal{F}'(f, g) \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X'), Y')$. Dado $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y)$, definimos $\mathcal{F}'(h) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X'), Y')$ da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, "h"] & Y \arrow[d, "g"] \\ \mathcal{F}(X') \arrow[u, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[r, dotted, "\mathcal{F}'(h)"] & Y'. \end{tikzcd}$$

Analogamente, dado $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y))$, definimos $\mathcal{G}'(k) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', \mathcal{G}(Y'))$ da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] & \mathcal{G}(Y) \arrow[d, "\mathcal{G}(g)"] \\ X' \arrow[u, "f"] \arrow[r, dotted, "\mathcal{G}'(k)"] & \mathcal{G}(Y'). \end{tikzcd}$$

Agora podemos dar a definição geral de adjunção.

Definição 2.5.1. Sejam $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dois funtores. Consideremos os seguintes funtores:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} &\to \mathrm{Sets} \\ (X,Y) &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y)) \\ (f,g) &\mapsto (h \mapsto (g \circ h \circ \mathcal{F}(f)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathcal{G}'\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} &\to \mathrm{Sets} \\ (X,Y) &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y)) \\ (f,g) &\mapsto (h \mapsto (\mathcal{G}(g) \circ h \circ f)). \end{aligned}$$

Uma *adjunção* entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ é um isomorfismo de funtores $\varphi\colon \mathcal{F}' \xrightarrow{\simeq} \mathcal{G}'$. Se existir uma adjunção, o funtor $\mathcal{F}$ é dito *adjunto à esquerda* a $\mathcal{G}$ e o funtor $\mathcal{G}$ é dito *adjunto à direita* a $\mathcal{F}$. $\diamondsuit$

Conforme a definição precedente, uma adjunção entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ consiste em uma bijeção $\varphi_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y))$ para todo par $(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D})$, de modo que o seguinte diagrama comute para todo morfismo $(f, g)\colon (X, Y) \to (X', Y')$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathcal{F}'(f,g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y)) \arrow[d, "\mathcal{G}'(f,g)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X'), Y') \arrow[r, "\varphi_{X',Y'}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y)). \end{tikzcd}$$

Veremos vários exemplos de adjunção. Na verdade, verificaremos que vale a bijeção $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y))$ para todo par $(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, deixando subentendida a canonicidade, que o leitor pode verificar se for necessário.

Exemplo 2.5.2. O produto é o coproduto entre dois objetos em uma categoria definem uma adjunção. De fato, seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produto. Consideremos os dois funtores

$$\mathcal{P}\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \qquad\qquad \mathcal{D}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$$

definidos da seguinte maneira. O funtor $\mathcal{P}$ associa ao objeto (X, Y) o objeto $X \times Y$ e ao morfismo $(f, g)\colon (X, Y) \to (X', Y')$ o morfismo $f \times g\colon X \times Y \to X' \times Y'$, sendo $f \times g$ definido aplicando a propriedade universal aos dois morfismos $f \circ \pi_X\colon X \times Y \to X'$ e $g \circ \pi_Y\colon X \times Y \to Y'$. O funtor $\mathcal{D}$ associa ao objeto X o produto $X \times X$ e ao morfismo $f\colon X \to Y$ o morfismo $f \times f\colon X \times X \to Y \times Y$. Um morfismo em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, entre $Z \times Z$ e $X \times Y$, é equivalente a um par de morfismos $f\colon Z \to X$ e $g\colon Z \to Y$, portanto, pela propriedade universal do produto, temos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}(\mathcal{D}(Z), (X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \mathcal{P}(X, Y))$$

canonicamente. Por isso, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ são funtores adjuntos. Analogamente, se $\mathcal{C}$ for uma categoria com coproduto, definimos o funtor $\mathcal{S}\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, que associa ao objeto (X, Y) o objeto $X \coprod Y$ e ao morfismo $(f, g)\colon (X, Y) \to (X', Y')$ o morfismo $f \coprod g\colon X \coprod Y \to X' \coprod Y'$, sendo $f \coprod g$ definido aplicando a propriedade universal aos dois morfismos $i_{X'} \circ$

$f\colon X \to X' \coprod Y'$ e $i_{Y'} \circ g\colon Y \to X' \times Y'$. Pela propriedade universal do coproduto, temos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}(X,Y),Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}}((X,Y),\mathcal{D}(Z))$$

canonicamente. Por isso, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{D}$ são funtores adjuntos. ♢

2.6. Exercícios

2.1. Demonstre que a terceira condição da definição 2.1.28 não é consequência das duas primeiras.

2.2. Demonstre que as duas condições $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X$ na definição 2.2.1 são independentes.

2.3. Sejam GrpAb a categoria dos grupos abelianos, MonAb a categoria dos monoides abelianos e SemiGrpAb a categoria dos semigrupos abelianos. Demonstre que em GrpAb, em MonAb e em SemiGrpAb existem o produto e o coproduto de uma família qualquer de objetos.

2.4. Seja Grp a categoria dos grupos. Demonstre que o produto cartesiano $G \times H$, com as projeções naturais, é o produto de G e H, enquanto o mesmo produto cartesiano $G \times H$, com as inclusões naturais, *não* é o coproduto de G e H (embora esteja bem definido).

2.7. Limites diretos e inversos

CAPíTULO 3

Construções livres

As *construções livres* constituem a maneira "minimal", no sentido que esclareceremos na próxima seção (v. observação 3.1.1), para construir uma estrutura algébrica a partir de um conjunto dado ou, mais em geral, a partir de outra estrutura algébrica a ser completada acrescentando algumas operações. Se trata de construções muito naturais, que aplicaremos em vários contextos. Por exemplo, a construção do *espaço vetorial livre* será o ponto de partida para definir o produto tensor; a construção do *grupo livre* servirá a definir a noção de *apresentação livre* de um grupo, a qual será relevante discutindo o grupo fundamental no vol. II; a noção de *produto livre de grupos* constituirá o coproduto na categoria Grp e assim em diante.

3.1. Semigrupos abelianos

Iniciemos pelo caso mais simples, na categoria dos semigrupos abelianos, que denotamos por SemiGrpAb. Lembramos que um semigrupo é um conjunto com uma operação associativa. Se a operação for também comutativa, o semigrupo é dito abeliano.

3.1.1. Construção intuitiva. Fixemos um conjunto A. Queremos construir um semigrupo abeliano, que contenha A como subconjunto, de modo "minimal" a partir de A.

Observação 3.1.1. A minimalidade *não* tem que ser entendida no sentido da inclusão (ou seja, não estamos procurando um semigrupo que esteja contido em todos os que contêm A), nem no sentido da cardinalidade (ou seja, não estamos procurando o semigrupo com o menor número possível de elementos entre os que contêm A), e sim no sentido que queremos obter um semigrupo *acrescentando o menor número possível de informações* ao conjunto A mesmo. $\diamondsuit$

Para obter um semigrupo abeliano que contenha A, precisamos somar os elementos de A (vamos usar a notação aditiva). Dado que queremos minimizar as informações a serem acrescentadas, não podemos impor nenhuma condição a estas somas, portanto chamamos de $\langle A\rangle_{sga}$ o conjunto das somas formais $n_1a_1+\cdots+n_ka_k$, sendo $k, n_i \in \mathbb{N}^*$ e $a_i \in A$, supondo que $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$. Agora podemos definir facilmente uma soma em $\langle A\rangle_{sga}$: por exemplo, $(2a_1+3a_2+3a_3)+(a_2+5a_3+9a_4) = 2a_1+4a_2+8a_3+9a_4$, sendo os elementos $a_1, \ldots, a_4$ distintos. Em geral, consideremos dois elementos $\alpha := n_1a_1+\cdots+n_ka_k$ e $\beta := m_1b_1+\cdots+m_hb_h$ de $\langle A\rangle_{sga}$. Seja $\{c_1, \ldots, c_l\} := \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b_1, \ldots, b_h\}$, sendo $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$. Estabelecendo por convenção que os termos da forma $0a$ podem ser cortados em uma soma formal, podemos escrever $\alpha = n'_1c_1+\cdots+n'_lc_l$, sendo $n'_i = n_j$ se $c_i = a_j$ e sendo

$n'_i = 0$ se $c_i \notin \{a_1, \dots, a_k\}$. Analogamente $\beta = m'_1 c_1 + \cdots + m'_l c_l$. Agora definimos $\alpha + \beta := (n'_1 + m'_1)c_1 + \cdots + (n'_l + m'_l)c_l$. Verificaremos na próxima seção que a soma assim definida é associativa e comutativa, portanto fica definido o semigrupo abeliano $(\langle A \rangle_{sga}, +)$.

3.1.2. Formalização. Podemos formalizar a construção precedente da seguinte maneira. Vamos pensar na soma formal $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k$ como em uma função de A a $\mathbb{N}$, que associa o coeficiente $n_i \in \mathbb{N}^*$ ao elemento $a_i \in A$ e que associa 0 a todos os elementos de $A \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$.

Notação 3.1.2. Seja A um conjunto não vazio. Denotamos por $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$ o conjunto das funções de A a $\mathbb{N}$. Dada $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{N})$, chamamos de *suporte* de f o conjunto $\mathrm{supp}(f) := \{a_i \in A : f(a_i) \neq 0\}$ e denotamos por $\langle A \rangle_{sga}$ o subconjunto de $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$ formado pelas funções com suporte *finito* e *não vazio*. ♢

Lema 3.1.3. *O conjunto $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$ se torna um semigrupo abeliano com a soma $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$. O subconjunto $\langle A \rangle_{sga}$ é um subsemigrupo (obviamente abeliano) de $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$.*

Demonstração. É imediato verificar que a soma em $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$ é associativa e comutativa, dado que a soma em $\mathbb{N}$ o é, portanto $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$ é um semigrupo abeliano. Sejam $f, g \in \langle A \rangle_{sga}$. Se $a \in A \setminus (\mathrm{supp}\, f \cup \mathrm{supp}\, g)$, então $(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0$, portanto $\mathrm{supp}(f + g) \subset \mathrm{supp}\, f \cup \mathrm{supp}\, g$. Se $a \in \mathrm{supp}\, f \cup \mathrm{supp}\, g$, então $(f + g)(a) = f(a) + g(a) > 0$, dado que $f(a) > 0$ ou $g(a) > 0$, portanto $\mathrm{supp}(f + g) = \mathrm{supp}\, f \cup \mathrm{supp}\, g$. Isso demonstra que $\mathrm{supp}(f + g)$ é a união de dois conjuntos finitos e não vazios, portanto é finito e não vazio, logo $f + g \in \langle A \rangle_{sga}$. □

Definição 3.1.4. Dado um conjunto não vazio A, o semigrupo $\langle A \rangle_{sga}$, definido no lema 3.1.3, é dito *semigrupo abeliano livre gerado por A.* ♢

Fica definida canonicamente a função injetora

$$\iota_A \colon A \hookrightarrow \langle A \rangle_{sga}, \tag{5}$$

que associa a $a \in A$ a função $f \colon A \to \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{supp}\, f = \{a\}$ e $f(a) = 1$. Desta maneira vemos que $A \subset \langle A \rangle_{sga}$, a menos de uma inclusão canônica. O fato que um elemento de $\langle A \rangle_{sga}$ possa ser descrito por uma soma formal dos elementos de A se torna rigoroso graças ao seguinte lema.

Lema 3.1.5. *Seja $f \in \langle A \rangle_{sga} \subset \mathcal{F}(A, \mathbb{N})$. Temos que:*

$$f = \sum_{a \in A} f(a) \iota_A(a), \tag{6}$$

onde a soma é a do semigrupo $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$.

Demonstração. Observamos que a soma (6) faz sentido, dado que, como $\mathrm{supp}\, f$ é finito e não vazio, se trata de uma soma com um número finito e não nulo de termos. Mais precisamente, definimos a soma sobre $a \in A$ como a soma sobre $a \in \mathrm{supp}\, f$, sendo $\mathrm{supp}\, f$ finito e não vazio por hipótese. Para verificar (6), definimos $g := \sum_{a \in \mathrm{supp}\, f} f(a) \iota_A(a)$ e vamos demonstrar que $g = f$. Por definição temos que $\iota_A(a)(b) = \delta_{ab}$, portanto:

- se $b \notin \operatorname{supp} f$, temos que $g(b) = \sum_{a \in \operatorname{supp} f} f(a)0 = 0$;
- se $b \in \operatorname{supp} f$, temos que $g(b) = \sum_{a \in \operatorname{supp} f} f(a)\delta_{ab} = f(b)$.

Isso demonstra que $g = f$. □

Se $\operatorname{supp} f = \{a_1, \ldots, a_k\}$, subentendendo o mergulho ι_A, a soma (6) equivale à $f = f(a_1)a_1 + \cdots + f(a_k)a_k = n_1a_1 + \cdots + n_ka_k$, sendo $n_i := f(a_i)$, portanto acabamos de mostrar que a definição 3.1.4 é a formalização correta da construção intuitiva mostrada na seção 3.1.1.

Exemplo 3.1.6. Seja $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ um conjunto finito. O semigrupo $\langle A \rangle_{sga}$ é formado por todas as funções de A a $\mathbb{N}$ diferentes da função nula. Equivalentemente, um elemento de $\langle A \rangle_{sga}$ pode ser representado por uma soma formal $n_1a_1 + \cdots + n_ka_k$, sendo os coeficientes n_i nem todos nulos e cortando por convenção os termos da forma $0a_i$. Fica definido o isomorfismo $\langle A \rangle_{sga} \simeq \mathbb{N}^{\oplus k} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, $n_1a_1 + \cdots + n_ka_k \mapsto (n_1, \ldots, n_k)$. Este isomorfismo *não* é canônico se $k > 1$, pois depende da ordem dos elementos de A. ♢

O exemplo precedente mostra claramente que $\langle A \rangle_{sga}$ não é minimal no sentido da cardinalidade ou da inclusão. De fato, seja $A = \{a_1\}$. Neste caso $\langle A \rangle_{sga} \simeq \mathbb{N}^*$. Se quiséssemos um semigrupo com poucos elementos, poderíamos considerar o grupo trivial formado por A mesmo, sendo a_1 o elemento neutro. Trata-se de um (semi)grupo abeliano que contém A, formado somente por um elemento, enquanto $\langle A \rangle_{sga}$ é infinito. Todavia, para construir este (semi)grupo, devemos declarar que $a_1 + a_1 = a_1$, sendo esta uma informação não necessária. Pelo contrario, para construir $\langle A \rangle_{sga} \simeq \mathbb{N}^*$, só admitimos a possibilidade (inevitável em um semigrupo) que a_1 possa ser somado a si mesmo, mas sem impor nenhuma condição sobre o resultado desta soma. Enfim, vale o seguinte teorema.

Teorema 3.1.7. *Dados dois conjuntos não vazios A e B, os semigrupos $\langle A \rangle_{sga}$ e $\langle B \rangle_{sga}$ são isomorfos se, e somente se, A e B têm a mesma cardinalidade.*

3.1.3. Interpretação categorial. Vamos inserir a noção de semigrupo abeliano livre na moldura proporcionada pela teoria das categorias. Sejam A um conjunto e S um semigrupo abeliano. Para definir um morfismo de semigrupos $\varphi \colon \langle A \rangle_{sga} \to S$, pelo menos temos que fixar a imagem de todo elemento de A. Isso vai ser suficiente, pois A gera $\langle A \rangle_{sga}$ por construção. Como não foi imposta nenhuma condição às somas dos elementos de A, estamos livres de escolher qualquer imagem para cada elemento de A, portanto podemos fixar qualquer função (entre conjuntos) $\varphi_0 \colon A \to S$ e construir o único morfismo $\varphi \colon \langle A \rangle_{sga} \to S$ tal que $\varphi|_A = \varphi_0$. Em particular, temos que $\varphi(n_1a_1 + \cdots + n_ka_k) = n_1\varphi(a_1) + \cdots + n_k\varphi(a_k) = n_1\varphi_0(a_1) + \cdots + n_k\varphi_0(a_k)$, a primeira igualdade sendo devida ao fato que φ é um morfismo de semigrupos e a segunda ao fato que $\varphi|_A = \varphi_0$. Formalmente, vale o seguinte lema.

Lema 3.1.8. *Sejam A um conjunto e S um semigrupo abeliano. Dada uma função $\varphi_0 \colon A \to S$, existe um único morfismo $\varphi \colon \langle A \rangle_{sga} \to S$ tal que:*

$$\varphi \circ \iota_A = \varphi_0. \tag{7}$$

Demonstração. Dadas uma função $\varphi_0 \colon A \to S$ e um elemento $f \in \langle A \rangle_{sga} \subset \mathcal{F}(A, \mathbb{N})$, observando a formula (6) vamos definir $\varphi(f) := \sum_{a \in A} f(a)\varphi_0(a)$. A soma faz sentido dado que, como $\operatorname{supp} f$ é finito e não vazio, se trata de uma soma com um número finito e não nulo de termos. Temos que

$$\begin{aligned} \varphi(f+g) &= \textstyle\sum_{a \in A} (f+g)(a)\varphi_0(a) = \sum_{a \in A} (f(a)+g(a))\varphi_0(a) \\ &= \textstyle\sum_{a \in A} f(a)\varphi_0(a) + \sum_{a \in A} g(a)\varphi_0(a) = \varphi(f) + \varphi(g), \end{aligned}$$

portanto φ um morfismo de semigrupos. É imediato verificar que $\varphi \circ \iota_A = \varphi_0$. Enfim, seja $\psi \colon \langle A \rangle_{sga} \to S$ outro morfismo tal que $\psi \circ \iota_A = \varphi_0$. Dada $f \in \langle A \rangle_{sga} \subset \mathcal{F}(A, \mathbb{N})$, segue da fórmula (6) que $\psi(f) = \sum_{a \in A} f(a)\psi(\iota_A(a)) = \sum_{a \in A} f(a)\varphi_0(a) = \varphi(f)$, portanto o morfismo φ é único. □

O lema precedente, afirma que, fixado um conjunto A, para todo par (S, φ_0) existe único o morfismo φ que torna comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, hook, "\iota_A"'] & S \\ \langle A \rangle_{sga}. \arrow[ur, dotted, "\exists!", "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Seja Sets* a subcategoria cheia de Sets obtida tirando o conjunto vazio dos objetos. Fica definido o seguinte functor:

$$\begin{gathered} \mathcal{L} \colon \mathrm{Sets}^* \to \mathrm{SemiGrpAb} \\ A \mapsto \langle A \rangle_{sga} \qquad f \mapsto \langle f \rangle_{sga}, \end{gathered}$$

sendo a ação sobre os morfismos definida da seguinte maneira. Seja $f \colon A \to B$ uma função. O morfismo $\langle f \rangle_{sga} \colon \langle A \rangle_{sga} \to \langle B \rangle_{sga}$ é o único morfismo induzido pela função $\varphi_0 := \iota_B \circ f \colon A \to \langle B \rangle$, conforme o lema 3.1.8, isto é:

$$\langle f \rangle_{sga}(n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k) = n_1 f(a_1) + \cdots + n_k f(a_k).$$

Também temos o seguinte functor esquecedor:[1]

$$\begin{gathered} \mathcal{E} \colon \mathrm{SemiGrpAb} \to \mathrm{Sets}^* \\ S \mapsto S \qquad \varphi \mapsto \varphi. \end{gathered}$$

O lema 3.1.8 implica o seguinte.

Lema 3.1.9. *O functor $\mathcal{L}$ é adjunto à esquerda ao functor $\mathcal{E}$, ou seja, temos a seguinte bijeção canônica:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}^*}(A, \mathcal{E}(S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{SemiGrpAb}}(\mathcal{L}(A), S). \tag{8}$$

Demonstração. Dada uma função $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}^*}(A, \mathcal{E}(S))$, associamos a φ_0 o morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{SemiGrpAb}}(\mathcal{L}(A), S)$ construído no lema 3.1.8. Obtemos a função $\alpha \colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}^*}(A, \mathcal{E}(S)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{SemiGrpAb}}(\mathcal{L}(A), S)$, $\varphi_0 \mapsto \varphi$. Reciprocamente, dado um morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{SemiGrpAb}}(\mathcal{L}(A), S)$, associamos a φ a função $\varphi_0 := \varphi \circ \iota_A \in$

[1] Observamos que o conjunto vazio com a operação vazia $+ \colon \emptyset \times \emptyset \to \emptyset$ é um semigrupo abeliano, portanto poderíamos incluir o conjunto vazio no contradomínio do functor $\mathcal{E}$, mas vamos exclui-lo por coerência com o functor $\mathcal{L}$.

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}^*}(A, \mathcal{E}(S))$. Obtemos a função $\beta\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{SemiGrpAb}}(\mathcal{L}(A), S) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}^*}(A, \mathcal{E}(S))$, $\varphi \mapsto \varphi_0$. Pela fórmula (7) temos que $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$. Ademais, fixado φ, seja $\psi := \alpha \circ \beta(\varphi)$. Temos que $\psi = \alpha(\varphi_0)$, portanto $\psi \circ \iota_A = \varphi_0 = \varphi \circ \iota_A$. Pela unicidade de φ enunciada no lema 3.1.8, temos que $\varphi = \psi$, logo $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$. Isso demonstra que (8) é uma bijeção. Em relação à canonicidade, dadas uma função $f\colon B \to A$ e um morfismo de semigrupos $\varphi\colon S \to T$, devemos demonstrar que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(A, \mathcal{E}(S)) \arrow[r, "(8)"] \arrow[d, "g \mapsto \mathcal{E}(\varphi) \circ g \circ f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{SemiGrpAb}}(\mathcal{L}(A), S) \arrow[d, "\psi \mapsto \varphi \circ \psi \circ \mathcal{L}(f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(B, \mathcal{E}(T)) \arrow[r, "(8)"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{SemiGrpAb}}(\mathcal{L}(B), T).
\end{tikzcd}$$

O leitor pode verificar que, partindo de $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}^*}(A, \mathcal{E}(S))$, os dois percursos possíveis no diagrama levam ao único morfismo $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{SemiGrpAb}}(\mathcal{L}(B), T)$ tal que $\eta \circ \iota_B = \varphi \circ g \circ f$. □

OBSERVAÇÃO 3.1.10. A adjunção (8) é consequência do fato que *qualquer* função $\varphi_0\colon A \to S$ pode ser estendida de modo único a um morfismo $\varphi\colon \langle A \rangle_{sga} \to S$. A liberdade na escolha de φ_0 depende do fato que não impusemos nenhuma condição às somas dos elementos de A, ou seja, depende da minimalidade do semigrupo $\langle A \rangle_{sga}$, conforme a observação 3.1.1. Por isso, a minimalidade da construção e a adjunção com o functor esquecedor são duas formulações de mesmo princípio. ♢

3.1.4. Soma direta vs semigrupo livre. Dado um conjunto não vazio A, temos que:

$$\langle A \rangle_{sga} = \bigoplus_{a \in A} \mathbb{N}^*. \tag{9}$$

Isso significa que o semigrupo livre gerado por um conjunto é a soma direta de uma cópia de $\mathbb{N}^*$ para cada elemento do conjunto, sendo $\mathbb{N}^*$ o semigrupo livre gerado por um elemento. Como há algumas questões sutis para entender a noção de soma direta na categoria SemiGrpAb, deixaremos os detalhes ao leitor como exercício.

3.2. Monoides e grupos abelianos

A construção do semigrupo abeliano livre pode ser facilmente adaptada aos monoides e aos grupos abelianos, como agora vamos mostrar.

3.2.1. Monoides abelianos. Lembramos que um monoide (abeliano) é um semigrupo (abeliano) com elemento neutro. A construção do monoide abeliano livre gerado por um conjunto A é análoga à do semigrupo abeliano livre, acrescentando o elemento neutro, que corresponde à soma formal vazia. Intuitivamente, fixado um conjunto A, chamamos de $\langle A \rangle_{ma}$ o conjunto das somas formais $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k$, sendo $k \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{N}^*$ e $a_i \in A$, supondo que $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$. Na construção do semigrupo livre valia a relação $k \in \mathbb{N}^*$, agora $k \in \mathbb{N}$, logo admitimos a existência da soma vazia, que denotamos por 0. Estabelecendo por convenção que os termos da forma $0a$ se cortem, definimos a soma entre duas somas formais como na seção

3.1.1, obtendo um monoide abeliano, cujo elemento neutro é a soma vazia. Vamos formalizar esta construção.

Notação 3.2.1. Seja A um conjunto. Denotamos por $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$ o conjunto das funções de A a $\mathbb{N}$. Dada $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{N})$, chamamos de *suporte* de f o conjunto $\mathrm{supp}(f) := \{a_i \in A : f(a_i) \neq 0\}$ e denotamos por $\langle A \rangle_{ma}$ o subconjunto de $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$ formado pelas funções com suporte *finito*. $\diamondsuit$

Na construção do semigrupo livre impusemos também que o suporte fosse não vazio, neste caso só impomos que seja finito.

Lema 3.2.2. *O conjunto $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$ se torna um monoide abeliano com a soma $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$. O subconjunto $\langle A \rangle_{ma}$ é um sub-monoide (obviamente abeliano) de $\mathcal{F}(A, \mathbb{N})$.*

Demonstração. Vale a mesma demonstração do lema 3.1.3, observando que a função nula (equivalentemente, a única com suporte vazio) é o elemento neutro. $\square$

Definição 3.2.3. Dado um conjunto A, o monoide $\langle A \rangle_{ma}$, definido no lema 3.2.2, é dito *monoide abeliano livre gerado por A.* $\diamondsuit$

Observação 3.2.4. Na notação 3.2.1 e na definição 3.2.2, contrariamente ao caso do semigrupo livre, não excluímos que A fosse vazio. De fato, se $A = \emptyset$, temos que $\mathcal{F}(\emptyset, \mathbb{N}) = \{\emptyset\}$ (portanto $\mathcal{F}(\emptyset, \mathbb{N}) \neq \emptyset$), logo $\langle \emptyset \rangle_{ma} = \{\emptyset\}$. Podemos escrever $\langle \emptyset \rangle_{ma} = \{0\}$, sendo $0 = \emptyset$ o elemento neutro. Trata-se do monoide (e grupo) trivial. Obviamente o monoide trivial é também um semigrupo, portanto poderíamos admitir esta possibilidade também no caso dos semigrupos; contudo, isso tornaria não válida a bijeção (8). De fato, sejam por exemplo $A = \emptyset$ e $S = \mathbb{N}^*$. Temos que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(\emptyset, \mathcal{E}(\mathbb{N})) = \{\emptyset\}$, enquanto $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SemiGrpAb}}(\{0\}, \mathbb{N}) = \emptyset$. Isso não pode ocorrer com os monoides, pois 0 pode (e deve) sempre ser mandado no elemento neutro do contradomínio. $\diamondsuit$

Fica definida canonicamente a função injetora (5) e continua valendo a fórmula (6), assumindo por convenção que a soma vazia seja o elemento neutro. Também o teorema 3.1.7 continua valendo em relação aos monoides abelianos.

Exemplo 3.2.5. Seja $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ um conjunto finito. Fica definido o isomorfismo não canônico $\langle A \rangle_{ma} \simeq \mathbb{N}^{\oplus k}$, $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k \mapsto (n_1, \ldots, n_k)$ (v. exemplo 3.1.6). $\diamondsuit$

As demonstrações dos seguintes lemas são análogas às da seção 3.1.3.

Lema 3.2.6. *Sejam A um conjunto e M um monoide abeliano. Dada uma função $\varphi_0 \colon A \to M$, existe um único morfismo $\varphi \colon \langle A \rangle_{ma} \to M$ tal que $\varphi \circ \iota_A = \varphi_0$.*

Fica definido o functor $\mathcal{L} \colon \mathrm{Sets} \to \mathrm{MonAb}$, $A \mapsto \langle A \rangle_{ma}$ e $f \mapsto \langle f \rangle_{ma}$. Temos também o functor esquecedor $\mathcal{E} \colon \mathrm{MonAb} \to \mathrm{Sets}$.

Lema 3.2.7. *O functor $\mathcal{L}$ é adjunto à esquerda ao functor $\mathcal{E}$, ou seja, temos a bijeção canônica* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(A, \mathcal{E}(M)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{MonAb}}(\mathcal{L}(A), M)$.

Observação 3.2.8. Como já afirmamos na observação 3.2.4, se $A = \emptyset$ temos que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(\emptyset, \mathcal{E}(M)) = \{\emptyset\}$ e $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MonAb}}(\{0\}, M) = \{0 \mapsto 0\}$, portanto a bijeção canônica vale também neste caso. Por isso podemos considerar toda a categoria Sets, ao invés de Sets*. $\diamondsuit$

Consideremos uma família de monoides abelianos $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i\in I}$. Conforme a definição 2.4.1, o produto $\prod_{i\in I} M_i$ é o produto cartesiano com a soma componente por componente. Um elemento $\{m_i\} \in \prod_{i\in I} M_i$ pode ser pensado como a função $f\colon I \to \bigsqcup_{i\in I} M_i$ tal que $f(i) = m_i$. Logo, como conjunto, o produto cartesiano $\prod_{i\in I} M_i$ contém as funções $f\colon I \to \bigsqcup_{i\in I} M_i$ tais que $f(i) \in M_i$ para todo $i \in I$, portanto a soma componente por componente fica definida por $(f+g)(i) := f(i) + g(i)$. Ademais, conforme a definição 2.4.2, o coproduto da família $\mathcal{M}$ é a *soma direta* $\bigoplus_{i\in I} M_i$, definida como o sub-monoide do produto direto formado pelas funções que se anulam no complementar de um subconjunto finito de I. Por isso, considerando a definição 3.2.3, temos que:

$$\langle A\rangle_{ma} = \bigoplus_{a\in A} \mathbb{N}. \tag{10}$$

Isso significa que o monoide livre gerado por um conjunto é a soma direta de uma cópia de $\mathbb{N}$ para cada elemento do conjunto, sendo $\mathbb{N}$ o semigrupo livre gerado por um elemento. O exemplo 3.2.5 é um caso particular da fórmula (10).

3.2.2. Grupo abeliano livre. A construção do grupo abeliano livre gerado por um conjunto A é análoga à do monoide abeliano livre, acrescentando os opostos dos elementos de A, ou seja, considerando somas formais com coeficientes em $\mathbb{Z}$ ao invés de $\mathbb{N}$. Intuitivamente, fixado um conjunto A, chamamos de $\langle A\rangle_{ga}$ o conjunto das somas formais $n_1a_1 + \cdots + n_ka_k$, sendo $k \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in A$, supondo que $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$. Estabelecendo por convenção que os termos da forma $0a$ se cortem, definimos a soma entre duas somas formais como nas seções 3.1.1 e 3.2.1, obtendo um grupo abeliano, cujo elemento neutro é a soma vazia e tal que $-(n_1a_1+\cdots+n_ka_k) = (-n_1)a_1+\cdots+(-n_k)a_k$. Vamos formalizar esta construção.

Notação 3.2.9. Seja A um conjunto. Denotamos por $\mathcal{F}(A,\mathbb{Z})$ o conjunto das funções de A a $\mathbb{Z}$. Dada $f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{Z})$, chamamos de *suporte* de f o conjunto $\mathrm{supp}(f) := \{a_i \in A : f(a_i) \neq 0\}$ e denotamos por $\langle A\rangle_{ga}$ o subconjunto de $\mathcal{F}(A,\mathbb{Z})$ formado pelas funções com suporte *finito*. $\diamondsuit$

Lema 3.2.10. *O conjunto $\mathcal{F}(A,\mathbb{Z})$ se torna um grupo abeliano com a soma $(f+g)(a) := f(a) + g(a)$. O subconjunto $\langle A\rangle_{ga}$ é um subgrupo (obviamente abeliano) de $\mathcal{F}(A,\mathbb{Z})$.*

Demonstração. Vale a mesma demonstração do lema 3.2.2, observando que a função $-f$ é a oposta da função f. $\square$

Definição 3.2.11. Dado um conjunto A, o grupo $\langle A\rangle_{ga}$, definido no lema 3.2.10, é dito *grupo abeliano livre gerado por A*. $\diamondsuit$

Fica definida canonicamente a função injetora (5) e continua valendo a expressão (6). Também o teorema 3.1.7 continua valendo em relação aos grupos abelianos.

EXEMPLO 3.2.12. Seja $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ um conjunto finito. Fica definido o isomorfismo não canônico $\langle A \rangle_{ga} \simeq \mathbb{Z}^{\oplus k}$, $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k \mapsto (n_1, \ldots, n_k)$ (v. exemplo 3.2.5). $\diamondsuit$

As demonstrações dos seguintes lemas são análogas às das seções 3.1.3 e 3.2.1.

LEMA 3.2.13. *Sejam A um conjunto e G um grupo abeliano. Dada uma função $\varphi_0 \colon A \to G$, existe um único morfismo $\varphi \colon \langle A \rangle_{ga} \to G$ tal que $\varphi \circ \iota_A = \varphi_0$.*

Fica definido o functor $\mathcal{L} \colon \text{Sets} \to \text{GrpAb}$, $A \mapsto \langle A \rangle_{ga}$ e $f \mapsto \langle f \rangle_{ga}$. Temos também o functor esquecedor $\mathcal{E} \colon \text{GrpAb} \to \text{Sets}$.

LEMA 3.2.14. *O functor $\mathcal{L}$ é adjunto à esquerda ao functor $\mathcal{E}$, ou seja, temos a bijeção canônica* $\text{Hom}_{\text{Sets}}(A, \mathcal{E}(G)) \simeq \text{Hom}_{\text{GrpAb}}(\mathcal{L}(A), G)$.

O mesmo argumento do último parágrafo da seção 3.2.1, aplicado à categoria dos grupos abelianos, leva à seguinte igualdade (ou isomorfismo canônico, dependendo do representante escolhido para a soma direta):

$$\langle A \rangle_{ga} = \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z},$$

sendo $\mathbb{Z}$ o grupo livre gerado por um elemento.

3.3. Módulo unitário livre

Seja R um anel comutativo com unidade. A construção do módulo unitário livre sobre R, gerado por um conjunto A, é análoga à do grupo abeliano livre, acrescentando o produto externo, ou seja, considerando combinações lineares formais com coeficientes em R ao invés de $\mathbb{Z}$. Se R for um corpo, que normalmente denotamos por $\mathbb{K}$, obtemos o espaço vetorial livre sobre $\mathbb{K}$. Intuitivamente, fixado um conjunto A, chamamos de $R\langle A \rangle$ o conjunto das combinações lineares formais de A com coeficientes em R. Mais precisamente, chamamos de $R\langle A \rangle$ o conjunto das combinações lineares formais $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$, sendo $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in R$ e $a_i \in A$, supondo que $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$. Com esta notação, é natural definir a soma e o produto externo da seguinte maneira.

- Dados dois elementos da forma $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ e $\beta = \sum_{i=1}^{h} \mu_i b_i$, seja $\{c_1, \ldots, c_l\} := \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b_1, \ldots, b_h\}$, sendo $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$. Podemos escrever α e β da forma $\alpha = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i$ e $\beta = \sum_{i=1}^{l} \mu_i c_i$, igualando a 0 os coeficientes dos vetores acrescentados às duas somas originais. Desta maneira temos que $\alpha + \beta := \sum_{i=1}^{l} (\lambda_i + \mu_i) c_i$, tirando os elementos tais que $\lambda_i + \mu_i = 0$. Claramente a soma vazia é o elemento neutro.
- Sejam $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ e $\lambda \in R$. Definimos $\lambda(\sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i) := \sum_{i=1}^{k} (\lambda \mu_i) a_i$.

Vamos formalizar esta construção.

NOTAÇÃO 3.3.1. Sejam A um conjunto e R um anel comutativo com unidade. Denotamos por $\mathcal{F}(A, R)$ o conjunto das funções de A a R. Dada $f \in \mathcal{F}(A, R)$, chamamos de *suporte* de f o conjunto $\text{supp}(f) := \{a_i \in A : f(a_i) \neq 0\}$ e denotamos por $R\langle A \rangle$ o subconjunto de $\mathcal{F}(A, R)$ formado pelas funções com suporte *finito*. $\diamondsuit$

Lema 3.3.2. *O conjunto $\mathcal{F}(A, R)$ se torna um R-módulo unitário com a soma $(f+g)(a) := f(a)+g(a)$ e o produto externo $(\lambda f)(a) := \lambda \cdot f(a)$. O subconjunto $R\langle A \rangle$ é um submódulo unitário de $\mathcal{F}(A, R)$.*

Demonstração. É imediato verificar que a soma e o produto externo em $\mathcal{F}(A, R)$ verificam os axiomas de R-módulo unitário. Sejam $f, g \in R\langle A \rangle$ e $\lambda, \mu \in R$. Se $a \in A \setminus (\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g)$, então $(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \cdot f(a) + \mu \cdot g(a) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$, portanto $\operatorname{supp}(\lambda f + \mu g) \subset \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$. Isso demonstra que $\operatorname{supp}(\lambda f + \mu g)$ está contido na união de dois conjuntos finitos, portanto é finito, logo $\lambda f + \mu g \in R\langle A \rangle$. □

Definição 3.3.3. Dado um conjunto A, o R-módulo unitário $R\langle A \rangle$, definido no lema 3.3.2, é dito *R-módulo unitário livre gerado por A.* ♢

Fica definida canonicamente a função injetora

$$\iota_A : A \hookrightarrow R\langle A \rangle, \tag{11}$$

que associa a $a \in A$ a função $f : A \to R$ tal que $\operatorname{supp} f = \{a\}$ e $f(a) = 1$. Desta maneira vemos que $A \subset R\langle A \rangle$, a menos de uma inclusão canônica. O fato que um elemento de $R\langle A \rangle$ possa ser descrito por uma combinação linear formal se torna rigoroso graças à seguinte fórmula, cuja demonstração é análoga à do lema 6:

$$f = \sum_{a \in A} f(a) \iota_A(a), \quad \forall f \in R\langle A \rangle \subset \mathcal{F}(A, R). \tag{12}$$

Lema 3.3.4. *O conjunto A (mais precisamente, $\iota_A(A)$) é uma base de $R\langle A \rangle$.*

Demonstração. Segue da fórmula (12) que todo elemento de $R\langle A \rangle$ é uma combinação linear de A, portanto A gera $R\langle A \rangle$. Os coeficientes $f(a)$, para $a \in \operatorname{supp} f$, determinam completamente f, portanto a combinação linear correspondente é única, logo A é uma base. □

Exemplo 3.3.5. Seja $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ um conjunto finito. Fica definido o isomorfismo não canônico $R\langle A \rangle \simeq R^{\oplus k}$, $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ (v. exemplo 3.2.12). ♢

O teorema 3.1.7 continua valendo em relação aos módulos unitários. As demonstrações dos seguintes lemas são análogas às das seções 3.1.3, 3.2.1 e 3.2.2.

Lema 3.3.6. *Sejam A um conjunto e M um R-módulo unitário livre. Dada uma função $\varphi_0 : A \to M$, existe uma única função linear $\varphi : R\langle A \rangle \to M$ tal que $\varphi \circ \iota_A = \varphi_0$.*

Fica definido o functor $\mathcal{L} : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Mod}_R$, $A \mapsto R\langle A \rangle$ e $f \mapsto R\langle f \rangle$. Temos também o functor esquecedor $\mathcal{E} : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Sets}$.

Lema 3.3.7. *O functor $\mathcal{L}$ é adjunto à esquerda ao functor $\mathcal{E}$, ou seja, temos a bijeção canônica* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(A, \mathcal{E}(M)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_R}(\mathcal{L}(M), V)$.

Demonstração. Segue imediatamente do lema 3.3.4 que se trata de uma bijeção. A canonicidade pode ser demonstrada como no lema 3.1.9. □

O mesmo argumento das seções 3.2.1 e 3.2.2, aplicado à categoria dos R-módulos unitários, leva à seguinte igualdade (ou isomorfismo canônico, dependendo do representante escolhido para a soma direta):

$$R\langle A\rangle = \bigoplus_{a\in A} R,$$

sendo R mesmo o módulo unitário livre gerado por um elemento (a menos de isomorfismo canônico).

3.4. Definição geral de construção livre

Vimos nas seções precedentes (e veremos nas sucessivas) que *todas as construções livres são functores adjuntos à esquerda a um functor esquecedor*. Podemos considerar esta propriedade uma "definição" de construção livre. Não se trata de uma definição rigorosa, pois não definimos de modo preciso a noção de functor esquecedor, mas é suficiente saber que se trata de um functor que "se esquece" de algumas estruturas envolvidas. Em todos os exemplos precedentes se trata de functores cujo contradomínio é a categoria Sets, portanto associam a uma estrutura o conjunto subjacente. Não se trata dos únicos casos interessantes; veremos alguns exemplos significativos ao respeito no capítulo 4.

3.5. Semigrupo, monoide e grupo livres

Nesta seção vamos definir as versões não abelianas de algumas das construções livres que vimos nas seções precedentes. Neste caso não vamos mostrar uma formalização completa das definições correspondentes, pois seriam necessários alguns detalhes técnicos que não trariam nenhuma vantagem à compreensão da matéria destes volumes. Em todo caso, as construções que vamos mostrar são suficientemente precisas.

3.5.1. Semigrupo livre. Como no caso abeliano, o semigrupo livre gerado por um conjunto A consiste na maneira minimal de construir um semigrupo a partir de A. Por isso, devemos admitir a possibilidade de multiplicar os elementos de A entre si, sem acrescentar nenhuma informação a mais. Logo, denotamos por $\langle A\rangle_{sg}$ o conjunto das "palavras" que se obtêm justapondo os elementos de A, como se fossem letras de um alfabeto (não necessariamente finito). Quando a mesma letra $a \in A$ se repetir k vezes em sequência, podemos denotar por a^k a palavra correspondente. O produto de duas palavras, isto é, o produto no semigrupo livre, vai ser definido também por justaposição, impondo que duas letras consecutivas coincidentes, com exponentes k_1 e k_2 respetivamente, equivalham à mesma letra com exponente k_1+k_2.

Definição 3.5.1. Seja A um conjunto. O *semigrupo livre* gerado por A é definido da seguinte maneira.

- Como conjunto contém as sequências $a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$ genérico, onde $a_i \in A$, $a_i \neq a_{i+1}$ e $k_i \in \mathbb{N}^*$.

- O produto $a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} \cdot b_1^{h_1} \cdots b_m^{h_m}$ é definido da seguinte maneira. Consideremos a sequência $a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} b_1^{h_1} \cdots b_m^{h_m}$. Se $a_n \neq b_1$, então este é o produto. Em caso contrário, substituímos $a_n^{k_n} b_1^{h_1}$ por $a_n^{k_n+h_1}$.

Denotamos esse semigrupo por $\langle A \rangle_{sg}$. Os elementos de A são ditos *geradores livres* de $\langle A \rangle_{sg}$. $\diamondsuit$

Podemos também dar a seguinte definição equivalente, sem considerar os expoentes inteiros, e sim somente justapondo as letras de A, admitindo as repetições. Por exemplo, a palavra $a^3 b^2$ vai ser denotada por $aaabb$. Neste caso, o produto de duas palavras é simplesmente a justaposição delas.

Definição 3.5.2. Seja A um conjunto. O *semigrupo livre* gerado por A é definido da seguinte maneira.

- Como conjunto contém as sequências $a_1 \cdots a_n$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$ genérico, onde $a_i \in A$.
- O produto $a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_m$ é a palavra $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$.

Denotamos esse semigrupo por $\langle A \rangle_{sg}$. Os elementos de A são ditos *geradores livres* de $\langle A \rangle_{sg}$. $\diamondsuit$

O seguinte teorema é análogo ao 3.1.7.

Teorema 3.5.3. *Dados dois conjuntos não vazios A e B, os semigrupos $\langle A \rangle_{sg}$ e $\langle B \rangle_{sg}$ são isomorfos se, e somente se, A e B têm a mesma cardinalidade.*

Existe um mergulho natural $\iota_A \colon A \hookrightarrow \langle A \rangle_{sg}$, que identifica $a \in A$ com a palavra a^1. Sejam A um conjunto e S um semigrupo. Para definir um morfismo $\varphi \colon \langle A \rangle_{sg} \to S$, pelo menos temos que fixar a imagem de todo elemento de A. Como não foi imposta nenhuma condição a respeito dos produtos dos elementos de A, estamos livres de escolher qualquer imagem para qualquer elemento, portanto podemos fixar qualquer função (entre conjuntos) $\varphi|_A \colon A \to S$. Esta função determina completamente o morfismo, pois, necessariamente, $\varphi(a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}) = \varphi(a_1)^{k_1} \cdots \varphi(a_n)^{k_n}$. Formalmente, vale o seguinte lema, cuja demonstração será deixada ao leitor como exercício.

Lema 3.5.4. *Sejam A um conjunto e S um semigrupo. Dada uma função $\varphi_0 \colon A \to S$, existe um único morfismo $\varphi \colon \langle A \rangle_{sg} \to S$ tal que $\varphi \circ \iota_A = \varphi_0$.*

Seja Sets^* a subcategoria cheia de Sets obtida tirando o conjunto vazio dos objetos. Fica definido o seguinte functor:

$$\mathcal{L} \colon \mathrm{Sets}^* \to \mathrm{SemiGrp}$$
$$A \mapsto \langle A \rangle_{sg} \qquad f \mapsto \langle f \rangle_{sg},$$

sendo a ação sobre os morfismos definida da seguinte maneira. Seja $f \colon A \to B$ uma função. O morfismo $\langle f \rangle_{sg} \colon \langle A \rangle_{sg} \to \langle B \rangle_{sg}$ é o único morfismo induzido pela função $\varphi_0 := \iota_B \circ f \colon A \to \langle B \rangle$, conforme o lema 3.5.4, isto é $\langle f \rangle_{sg}(a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}) = f(a_1)^{k_1} \cdots f(a_n)^{k_n}$. Também temos o functor esquecedor $\mathcal{E} \colon \mathrm{SemiGrp} \to \mathrm{Sets}^*$. O lema 3.5.4 implica que o functor $\mathcal{L}$ é adjunto à esquerda ao functor $\mathcal{E}$, ou seja, temos a bijeção canônica $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}^*}(A, \mathcal{E}(S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{SemiGrp}}(\mathcal{L}(A), S)$. Enfim, quando teremos estudado o coproduto na categoria SemiGrp, veremos que vale uma fórmula análoga à (9).

3.5.2. Monoide livre. A construção do monoide livre é análoga à do semigrupo, mas incluindo a palavra vazia, que atua como elemento neutro.

Definição 3.5.5. Seja A um conjunto. O *monoide livre* gerado por A é definido da seguinte maneira.

- Como conjunto contém as sequências $a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}$, sendo $n \in \mathbb{N}$ genérico, onde $a_i \in A$, $a_i \neq a_{i+1}$ e $k_i \in \mathbb{N}^*$. Para $n = 0$, obtemos a sequência vazia, que denotamos por 1.
- O produto $a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} \cdot b_1^{h_1} \cdots b_m^{h_m}$ é definido da seguinte maneira. Consideremos a sequência $a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} b_1^{h_1} \cdots b_m^{h_m}$. Se $a_n \neq b_1$, então este é o produto. Em caso contrário, substituímos $a_n^{k_n} b_1^{h_1}$ por $a_n^{k_n+h_1}$.

Denotamos esse monoide por $\langle A \rangle_m$. Os elementos de A são ditos *geradores livres* de $\langle A \rangle_m$. $\diamondsuit$

Podemos também dar a seguinte definição equivalente, sem considerar os expoentes inteiros, e sim somente justapondo as letras de A, admitindo as repetições.

Definição 3.5.6. Seja A um conjunto. O *monoide livre* gerado por A é definido da seguinte maneira.

- Como conjunto contém as sequências $a_1 \cdots a_n$, sendo $n \in \mathbb{N}$ genérico, onde $a_i \in A$. Para $n = 0$, obtemos a sequência vazia, que denotamos por 1.
- O produto $a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_m$ é a palavra $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$.

Denotamos esse monoide por $\langle A \rangle_m$. Os elementos de A são ditos *geradores livres* de $\langle A \rangle_m$. $\diamondsuit$

Valem as mesmas considerações que fizemos após a definição 3.5.1, adaptadas ao caso dos monoides. Em particular, temos o teorema análogo ao 3.5.3 e a bijeção canônica $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(A, \mathcal{E}(S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathcal{L}(A), S)$.

3.5.3. Grupo livre. Para definir o grupo livre, devemos admitir a possibilidade de inverter os elementos de A, portanto, para cada $a \in A$, temos que acrescentar a letra a^{-1}, definida formalmente como um elemento a mais do alfabeto. Definindo $a^{-k} := (a^{-1})^k$, em uma palavra genérica cada letra pode ter exponente positivo ou negativo. Estabelecemos por convenção que $a^0 = 1$. Observamos que, multiplicando duas palavras, pode acontecer que o último termo da primeira e o primeiro da segunda sejam formados pela mesma letra com exponentes opostos. Neste caso se cortam e isso pode acontecer iterativamente, até que fique uma palavra com letras consecutivas distintas.

Definição 3.5.7. Seja A um conjunto. O *grupo livre* gerado por A é definido da seguinte maneira.

- Como conjunto contém as sequências $a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}$, sendo $n \in \mathbb{N}$ genérico, onde $a_i \in A$, $a_i \neq a_{i+1}$ e $k_i \in \mathbb{Z}^*$. Para $n = 0$, obtemos a sequência vazia, que denotamos por 1.

- O produto $a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \cdot b_1^{h_1} \dots b_m^{h_m}$ é definido da seguinte maneira. Consideremos a sequência $a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} b_1^{h_1} \dots b_m^{h_m}$. Se $a_n \neq b_1$, então este é o produto. Em caso contrário, substituímos $a_n^{k_n} b_1^{h_1}$ por $a_n^{k_n+h_1}$, tirando-o se $k_n + h_1 = 0$. Continuamos assim até obtermos uma sequência que respeita a definição precedente ou a sequência vazia.

Denotamos esse grupo por $\langle A \rangle_g$. Os elementos de A são ditos *geradores livres* de $\langle A \rangle_g$. ♢

Podemos também definir o grupo livre considerando somente exponentes $k_i = \pm 1$. Por exemplo, a palavra $a^3 b^{-2}$ vai ser escrita na forma $aaab^{-1}b^{-1}$. Neste caso pode acontecer que duas letras consecutivas coincidam, mas, multiplicando duas palavras, temos que cortar os termos da forma $a_i a_i^{-1}$ ou $a_i^{-1} a_i$.

Definição 3.5.8. Seja A um conjunto. O *grupo livre* gerado por A é definido da seguinte maneira.

- Como conjunto contém as sequências $a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n}$, sendo $n \in \mathbb{N}$ genérico, onde $a_i \in A$, $\epsilon_i = \pm 1$ e, se $a_i = a_{i+1}$, então $\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$. Para $n = 0$, obtemos a sequência vazia, que denotamos por 1.
- O produto $a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n} \cdot b_1^{\tau_1} \cdots b_m^{\tau_m}$ é definido da seguinte maneira. Consideremos a sequência $a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n} b_1^{\tau_1} \cdots b_m^{\tau_m}$. Se $a_n \neq b_1$ ou $\epsilon_n = \tau_1$, então este é o produto. Em caso contrário, tiramos $a_n^{\epsilon_n} b_1^{\tau_1}$. Continuamos assim até obtermos uma sequência que respeita a definição precedente ou a sequência vazia.

Denotamos esse grupo por $\langle A \rangle_g$. Os elementos de A são ditos *geradores livres* de $\langle A \rangle_g$. ♢

Valem as mesmas considerações que fizemos após as definições 3.5.1 e 3.5.5, adaptadas ao caso dos grupos. Em particular, temos o teorema análogo ao 3.5.3 e a bijeção canônica $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(A, \mathcal{E}(S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathcal{L}(A), S)$.

3.6. Apresentação livre de um grupo

Sejam A um conjunto e $R \subset \langle A \rangle_g$ um subconjunto. Denotamos por $\langle A | R \rangle$ o grupo obtido quocientando $\langle A \rangle_g$ pelo subgrupo normal gerado por R.

Definição 3.6.1. Dado um grupo G e dois conjuntos A e $R \subset \langle A \rangle_g$, um isomorfismo $G \simeq \langle A | R \rangle$ é dito *apresentação livre* do grupo G. Os elementos de A são ditos *geradores* e os de R *relações* da apresentação. Se A for um conjunto finito, a apresentação livre $G \simeq \langle A | R \rangle$ é dita *finitamente gerada*; se também R for finito, a apresentação é dita *finita*. Um grupo é dito *finitamente apresentável* se admite uma apresentação livre finita. ♢

Verificaremos facilmente que um grupo é finitamente gerado se, e somente se, admite uma apresentação livre finitamente gerada, mas o fato de ser finitamente apresentável é mais forte. O fato fundamental é que qualquer grupo admite uma apresentação livre, isto é, qualquer grupo é um quociente de um grupo livre. De fato, dado um grupo G genérico, existe sempre uma família A de geradores de

G, por exemplo é sempre possível escolher $A = G$. Existe um morfismo natural $\varphi\colon \langle A\rangle_g \to G$, ou seja, o morfismo (único pela propriedade universal) que estende a inclusão $A \hookrightarrow G$. Obviamente φ é sobrejetor, portanto $G \simeq \langle A\rangle_g/\mathrm{Ker}\,\varphi$. Por isso podemos escolher uma família R de geradores de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ e obtemos que $G \simeq \langle A|R\rangle$. Em geral A e R são infinitos, portanto o fato de serem finitamente gerados ou finitamente apresentáveis é uma característica específica de alguns grupos. Ademais, o mesmo grupo pode ter infinitas apresentações livres equivalentes e pode ser muito complicado estabelecer se duas apresentações dadas definem grupos isomorfos. Alguns exemplos simples de apresentações livres são os seguintes:

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a\rangle \qquad \mathbb{Z}_n \simeq \langle a|a^n\rangle \qquad \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \simeq \langle a,b|aba^{-1}b^{-1}\rangle.$$

3.7. Produto livre e produto amalgamado de grupos

Vamos analisar o coproduto (fibrado) na categoria dos grupos (não necessariamente abelianos). Veremos que o coproduto (fibrado) de uma família de elementos está sempre definido, mas, mesmo para uma família finita, é um objeto bem diferente do produto. Deixaremos ao leitor como exercício a mesma construção no caso dos semigrupos e dos monoides.

3.7.1. Produto e coproduto de uma família de grupos. Consideremos categoria dos grupos *abelianos*. Dada uma família de grupos abelianos $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$, podemos definir o produto direto $\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ e a soma direta $\bigoplus_{\alpha\in I} G_\alpha$, que coincidem com o produto e o coproduto na categoria GrpAb. Um elemento do produto direto é uma família $\{g_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tal que $g_\alpha \in G_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. A soma do grupo é definida por $\{g_\alpha\} + \{h_\alpha\} := \{g_\alpha + h_\alpha\}$. A soma direta é o subgrupo do produto direto formato pelas famílias $\{g_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tais que o conjunto $\{\alpha \in I : g_\alpha \neq 0\}$ é finito. Por definição de produto e coproduto, valem as seguintes propriedades universais. Sejam $\pi_\alpha\colon (\prod_\beta G_\beta) \to G_\alpha$ e $i_\alpha\colon G_\alpha \to (\bigoplus_\beta G_\beta)$ as projeções e os mergulhos naturais.

- Dado um grupo abeliano H e uma família de morfismos $\{\varphi_\alpha\colon H \to G_\alpha\}$, existe um único morfismo $\varphi\colon H \to \prod_\alpha G_\alpha$ tal que $\pi_\alpha \circ \varphi = \varphi_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. O morfismo que satisfaz a definição é $\varphi(h) := \{\varphi_\alpha(h)\}$.
- Dado um grupo abeliano H e uma família de morfismos $\{\varphi_\alpha\colon G_\alpha \to H\}$, existe um único morfismo $\varphi\colon \bigoplus_\alpha G_\alpha \to H$ tal que $\varphi \circ i_\alpha = \varphi_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. O morfismo que satisfaz a definição é $\varphi(\{g_\alpha\}) := \sum_\alpha \varphi_\alpha(g_\alpha)$.

No caso da soma direta, a soma $\sum_\alpha \varphi_\alpha(g_\alpha)$ está bem definida em H pois só uma quantidade finita de elementos é diferente de 0. É claro que, quando a família de índices I for finita, a soma e o produto direto coincidem como objetos.

Consideremos agora a categoria de todos os grupos, não necessariamente abelianos. As definições de soma e produto direto que demos no caso abeliano podem ser aplicadas também a grupos genéricos. No caso do produto direto a propriedade universal continua a valer, mas no caso da soma direta isso não acontece, nem para famílias finitas (estamos falando da propriedade universal na categoria Grp, portanto os grupos envolvidos, inclusive H, não são necessariamente abelianos). De fato, o morfismo $\varphi(\{g_\alpha\}) := \sum_\alpha \varphi_\alpha(g_\alpha)$ não está bem definido, pois a soma a respeito de α (que se torna um produto, dado que usamos a notação multiplicativa para grupos genéricos) depende da ordem dos elementos $\varphi_\alpha(g_\alpha)$. Em princípio, poderíamos acrescentar uma ordem total ao conjunto I, como quando, no caso de dois grupos, escolhemos entre $G_1 \times G_2$ e $G_2 \times G_1$, que são canonicamente isomorfos a $\prod_{\alpha\in\{1,2\}} G_\alpha$. Desta maneira, poderíamos definir $\varphi(\{g_\alpha\}) := \prod_\alpha \varphi_\alpha(g_\alpha)$, ordenando os elementos conforme o índice α. Todavia, em geral, não existe nenhum morfismo $\varphi\colon \bigoplus_\alpha G_\alpha \to H$ que satisfaz a propriedade universal do coproduto. O problema está no fato que, em $\bigoplus_\alpha G_\alpha$, se $g_\alpha \in G_\alpha$ e $g_\beta \in G_\beta$, com $\alpha \neq \beta$, temos que $i_\alpha(g_\alpha)i_\beta(g_\beta) = i_\beta(g_\beta)i_\alpha(g_\alpha)$, independentemente da ordem de I (de fato, ambos os elementos $i_\alpha(g_\alpha)i_\beta(g_\beta)$ e $i_\beta(g_\beta)i_\alpha(g_\alpha)$ coincidem com a família cuja entrada de índice α é g_α e cuja entrada de índice β é g_β). Se existisse um morfismo φ, que satisfaz a propriedade universal, teríamos que, no grupo H,

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(g_\alpha)\varphi_\beta(g_\beta) &= \varphi(i_\alpha(g_\alpha))\varphi(i_\beta(g_\beta)) = \varphi(i_\alpha(g_\alpha)i_\beta(g_\beta)) = \varphi(i_\beta(g_\beta)i_\alpha(g_\alpha))\\ &= \varphi(i_\beta(g_\beta))\varphi(i_\alpha(g_\alpha)) = \varphi_\beta(g_\beta)\varphi_\alpha(g_\alpha),\end{aligned}$$

enquanto, em geral, $\varphi_\alpha(g_\alpha)\varphi_\beta(g_\beta) \neq \varphi_\beta(g_\beta)\varphi_\alpha(g_\alpha)$ em H.

Exemplo 3.7.1. Sejam $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}_2$ e $H = S_3$, sendo S_3 o grupo das permutações de três elementos. Consideremos os morfismos $\varphi_1\colon G_1 \to H$ e $\varphi_2\colon G_2 \to H$ tais que $\varphi_1(1) = (12)$ e $\varphi_2(1) = (13)$. Seja $\varphi\colon \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \to S_3$ um morfismo tal que $\varphi \circ i_1 = \varphi_1$ e $\varphi \circ i_2 = \varphi_2$. Como, em $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, temos que $(1,0) + (0,1) = (0,1) + (1,0) = (1,1)$, temos que $\varphi_1(1)\varphi_2(1) = (\varphi \circ i_1)(1) \cdot (\varphi \circ i_2)(1) = \varphi(1,0)\varphi(0,1) = \varphi(1,1)$ e $\varphi_2(1)\varphi_1(1) = (\varphi \circ i_2)(1) \cdot (\varphi \circ i_1)(1) = \varphi(0,1)\varphi(1,0) = \varphi(1,1)$. Por isso, $\varphi_1(1)\varphi_2(1) = \varphi_2(1)\varphi_1(1)$, ou seja, $(12)(13) = (13)(12)$, o que é absurdo. $\diamondsuit$

Vamos mostrar que também na categoria Grp existe um coproduto, mas definido de modo diferente. Precisamos de uma definição que não imponha a comutatividade entre $i_\alpha(g_\alpha)$ e $i_\beta(g_\beta)$, para $\alpha \neq \beta$.

Definição 3.7.2. Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma família de grupos. O *produto livre* $*_\alpha G_\alpha$ é definido da seguinte maneira:

- como conjunto, contém as sequências finitas $g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_n}$ (para n genérico) tais que $g_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ e $g_{\alpha_i} \neq 1$; ademais, contém a sequência vazia, que denotamos por 1;
- o produto $g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_n} \cdot h_{\beta_1} \cdots h_{\beta_n}$ é definido da seguinte maneira. Consideremos a sequência $g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_n} h_{\beta_1} \cdots h_{\beta_n}$. Se $\alpha_n \neq \beta_1$, então este é o produto; em caso contrário, substituímos $g_{\alpha_n} h_{\beta_1}$ pelo produto no grupo correspondente, tirando-o se for igual a 1. Continuamos desta maneira até obtermos uma sequência que respeita a definição precedente ou a sequência vazia. Enfim, a palavra vazia atua como elemento neutro. $\diamondsuit$

Pode-se verificar que $*_\alpha G_\alpha$ é um grupo, sendo $(g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_n})^{-1} = g_{\alpha_n}^{-1} \cdots g_{\alpha_1}^{-1}$.

Observação 3.7.3. Também considerando o produto livre de dois grupos $G * H$, temos que considerar sequências de qualquer número de elementos, pois uma sequência do tipo $g_1 h_1 \dots g_n h_n$, com $g_i \in G$ e $h_i \in H$, não pode ser reduzida de modo nenhum. Por isso, na categoria Grp, o produto e o coproduto são diferentes como objetos também para um par de elementos. $\diamondsuit$

Observação 3.7.4. No produto livre de um grupo consigo mesmo, isto é, $G * G$, os elementos de G como primeiro fator *não* comutam com os elementos de G como segundo fator, nem quando forem iguais. Portanto, por exemplo, dado $g \in G$, temos duas sequências gg não equivalentes, que denotamos por $(g, 0)(g, 1)$ e $(g, 1)(g, 0)$, sendo $G \times \{0\}$ a primeira componente de $G * G$ e $G \times \{1\}$ a segunda. As duas sequências são diferentes de $(g^2, 0)$ e $(g^2, 1)$, as quais são sequências de um elemento. Se consideramos dois elementos distintos g e g' de G, as quatro sequências $(g, 0)(g', 1)$, $(g', 0)(g, 1)$, $(g, 1)(g', 0)$ e $(g', 1)(g, 0)$ são distintas. Entre $(gg', 0)$, $(g'g, 0)$, $(gg', 1)$ e $(g'g, 1)$, as primeiras duas e as últimas duas coincidem entre si se, e somente se, g e g' comutam em G, não sendo possível nenhuma outra identificação. ♢

Observação 3.7.5. Como elementos de fatores diferentes não comutam, o produto livre é diferente da soma direta também para uma família de grupos abelianos. Isso é natural pois, na propriedade universal, mesmo quando todo G_α for abeliano, o grupo H pode não sê-lo. Por isso, na categoria Grp, a soma direta não satisfaz a propriedade universal do coproduto nem sequer quando for aplicada a uma família de grupos abelianos. ♢

A propriedade universal do coproduto é satisfeita pelo morfismo:

$$
\begin{aligned}
\varphi\colon\ *_\alpha G_\alpha &\to H \\
g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_n} &\mapsto \varphi_{\alpha_1}(g_{\alpha_1}) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_{\alpha_n}).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Observação 3.7.6. É claro pela definição 3.5.7 que um grupo livre é o produto livre de uma cópia de $\mathbb{Z}$ para cada gerador, ou seja $\langle A \rangle_g \simeq *_{\alpha \in A}\mathbb{Z}$, sendo $\mathbb{Z}$ o grupo livre gerado por um elemento. ♢

3.7.2. Produto amalgamado. Vamos considerar o coproduto fibrado na categoria dos grupos. Conforme a definição 2.4.20, uma tripla cocartesiana na categoria Grp, com índices no conjunto I, é formada pelos seguintes dados:

- uma família de grupos $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$;
- uma família de grupos $\{G_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in I}$, sendo $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$;
- uma família de morfismos $\varphi_{\alpha\beta}\colon G_{\alpha\beta} \to G_\alpha$.

Isso significa que $\varphi_{\alpha\beta}$ e $\varphi_{\beta\alpha}$ têm o mesmo domínio mas contradomínios diferentes. Poderíamos representar este dado da seguinte maneira:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & G_{\alpha\gamma} \arrow[dll, "\varphi_{\alpha\gamma}"'] \arrow[drr, "\varphi_{\gamma\alpha}"] & & & \\
\cdots & G_\alpha & & G_\beta & & G_\gamma & \cdots \\
 & & G_{\alpha\beta} \arrow[ul, "\varphi_{\alpha\beta}"] \arrow[ur, "\varphi_{\beta\alpha}"'] & & G_{\beta\gamma} \arrow[ul, "\varphi_{\beta\gamma}"] \arrow[ur, "\varphi_{\gamma\beta}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Definição 3.7.7. A partir da tripla cocartesiana que acabamos de descrever, seja N o subgrupo normal de $*_\alpha G_\alpha$ gerado pelos elementos da forma $(i_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta})(g) \cdot$

$(i_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}(g))^{-1}$, sendo $g \in G_{\alpha\beta}$. O *produto amalgamado* $*_\alpha G_\alpha/\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ é o quociente de $*_\alpha G_\alpha$ por N:

$$*_\alpha G_\alpha/\{\varphi_{\alpha\beta}\} := (*_\alpha G_\alpha)/N. \tag{14}$$ ♢

Isso significa que, para definir o produto amalgamado, consideramos o produto livre $*_\alpha G_\alpha$ e identificamos $i_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}(g)$ com $i_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}(g)$ para todos g, α e β. Portanto, trata-se do quociente do produto livre, no qual as imagens de $\varphi_{\alpha\beta}$ e $\varphi_{\beta\alpha}$, a primeira contida em G_α e a segunda em G_β, são identificadas. Como no caso do produto ordinário, o produto amalgamado não consiste somente no objeto que acabamos de definir; mais precisamente, trata-se do objeto $*_\alpha G_\alpha/\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ e dos morfismos naturais $j_\alpha\colon G_\alpha \to *_\beta G_\beta/\{\varphi_{\beta\gamma}\}$, os quais satisfazem a relação $j_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta} = j_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$ para todos $\alpha, \beta \in I$. O morfismo j_α é a composição entre $i_\alpha\colon G_\alpha \to *_\beta G_\beta$ e a projeção ao quociente. Vamos verificar que o produto amalgamado é o coproduto fibrado na categoria Grp, isto é, satisfaz a seguinte propriedade universal:

- dados um grupo H e uma família de morfismos $\{\varphi_\alpha\colon G_\alpha \to H\}$, tais que $\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$, existe um único morfismo $\bar{\varphi}\colon (*_\alpha G_\alpha/\{\varphi_{\alpha\beta}\}) \to H$ tal que $\bar{\varphi} \circ j_\alpha = \varphi_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.

O morfismo que satisfaz a propriedade universal é

$$\bar{\varphi}([g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_n}]) := \varphi_{\alpha_1}(g_{\alpha_1}) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_{\alpha_n}). \tag{15}$$

Em particular, considerando o morfismo (13) e a definição (14), a condição $\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$ implica que

$$N \subset \mathrm{Ker}(\varphi), \tag{16}$$

sendo $\bar{\varphi}$ a função induzida por φ quocientando o domínio por N. Para provar (16), é suficiente observar que

$$\begin{aligned} \varphi(i_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}(g) \cdot i_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}(g)^{-1}) &= \varphi \circ i_\alpha(\varphi_{\alpha\beta}(g)) \cdot \varphi \circ i_\beta(\varphi_{\beta\alpha}(g))^{-1} \\ &= \varphi_\alpha(\varphi_{\alpha\beta}(g)) \cdot \varphi_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(g))^{-1} = 1. \end{aligned}$$

3.7.3. Produto livre, produto amalgamado e apresentações livres. Podemos agora descrever o produto livre através das apresentações livres. Temos que:

$$*_\alpha \langle A_\alpha | R_\alpha \rangle \simeq \langle \sqcup_\alpha A_\alpha | \sqcup_\alpha R_\alpha \rangle. \tag{17}$$

Vamos dar uma ideia da demonstração. Há uma função natural $\sqcup_\alpha A_\alpha \to *_\beta \langle A_\beta | R_\beta \rangle$, que consiste na inclusão $\sqcup_\alpha A_\alpha \hookrightarrow *_\beta A_\beta$ composta com o quociente pelas relações. Pela propriedade universal, esta função se estende de modo único a um morfismo $\varphi\colon \langle \sqcup_\alpha A_\alpha \rangle_g \to *_\beta \langle A_\beta | R_\beta \rangle$, que atua tomando uma palavra em $\langle \sqcup_\alpha A_\alpha \rangle_g$, projetando cada letra $a \in A_\alpha$ ao quociente pelas relações R_α e multiplicando elementos adjacentes que pertencem ao mesmo grupo $\langle A_\alpha | R_\alpha \rangle$, tirando as unidades. Este morfismo é claramente sobrejetor. Ademais, uma palavra da forma $\alpha^{-1}\beta\alpha$, onde β é formada por letras pertencentes ao conjunto $\sqcup_\alpha R_\alpha$, pertence ao kernel de φ, pois, quocientando pelas relações, temos que $[\alpha^{-1}][\beta][\alpha] = [\alpha]^{-1}[\alpha] = 1$. Pode-se demonstrar que, se uma palavra pertencer ao kernel de φ, então é o produto de trechos desta forma, ou seja, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ é o subgrupo normal gerado por $\sqcup_\alpha R_\alpha$, portanto φ induz o isomorfismo (17).

Consideremos agora o produto amalgamado. A partir dos dados da definição 3.7.7, sejam $G_\alpha \simeq \langle A_\alpha | R_\alpha \rangle$ e $G_{\alpha\beta} \simeq \langle A_{\alpha\beta} | R_{\alpha\beta} \rangle$. Dado um elemento $a \in A_{\alpha\beta}$, fica definido o elemento $\varphi_{\alpha\beta}[a] \in G_\alpha$. Escolhemos um representante de $\varphi_{\alpha\beta}[a]$ no grupo livre $\langle A_\alpha \rangle_g$, que denotamos por $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(a)$. Temos que:

$$(18) \qquad *_\alpha G_\alpha / \{\varphi_{\alpha\beta}\} \simeq \langle \sqcup_\alpha A_\alpha | (\sqcup_\alpha R_\alpha) \sqcup (\sqcup_{\alpha\beta} \{\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(a) \tilde{\varphi}_{\beta\alpha}(a)^{-1} : a \in A_{\alpha\beta}\}) \rangle.$$

Isso significa que unimos os geradores e as relações dos grupos, acrescentando entre as relações o fato que as imagens dos geradores de $G_{\alpha\beta}$ através de $\varphi_{\alpha\beta}$ e $\varphi_{\beta\alpha}$ são iguais. As relações de $G_{\alpha\beta}$ não desempenham nenhum papel.

3.7.4. Algumas observações complementares. Vamos acrescentar algumas observações que serão úteis na demonstração do teorema de Seifert-Van Kampen no vol. II. Seja $G_\alpha \simeq \langle A_\alpha | R_\alpha \rangle$ e consideremos a fórmula (17), a qual descreve o produto livre $*_\alpha G_\alpha$ como quociente do grupo livre gerado por $\sqcup_\alpha A_\alpha$. Podemos descrever $*_\alpha G_\alpha$ de modo análogo, partindo do grupo livre gerado por $\sqcup_\alpha G_\alpha$ (na verdade, será suficiente o monoide livre, dado que a inversão já está definida em cada G_α). Isso significa que quocientamos pelas relações em cada grupo *antes* de aplicar a construção do grupo (ou monoide) livre à união disjunta. Dessa maneira nem precisamos escolher uma apresentação livre de G_α.

Vamos considerar a definição de produto livre: os elementos de $*_\alpha G_\alpha$ são palavras da forma $g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_n}$, sendo $g_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$, ou seja, são elementos do monoide livre $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m$, que satisfazem as duas condições $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ e $g_{\alpha_i} \neq 1$. Chamamos de *reduzidas* as sequências que satisfazem esta condição. Vamos ver que uma palavra reduzida pode ser pensada como o único representante reduzido de uma classe de equivalência de palavras genéricas. Em particular, vamos considerar o monoide livre $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m$ conforme a definição 3.5.6, ou seja, sem considerar os exponentes, e sim admitindo repetições da mesma letra. Vamos introduzir em $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m$ a relação de equivalência, compatível com o produto, *gerada* pelas seguintes relações:

(i) se $g_\alpha = g'_\alpha \cdot g''_\alpha$ em G_α, a letra g_α é equivalente à palavra $g'_\alpha g''_\alpha$;
(ii) denotando por 1_α a unidade do grupo G_α, a letra 1_α é equivalente à palavra vazia 1.

Dada uma palavra genérica em $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m$, aplicando (i) e (ii) podemos achar uma palavra reduzida equivalente; além disso, dada uma palavra reduzida, não é possível aplicar (i) ou (ii), portanto duas palavras reduzidas não podem ser equivalentes. Isso mostra que cada classe de equivalência em $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m$ possui um único representante reduzido, portanto podemos identificar o subconjunto de $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m$, formado pelas sequências reduzidas, com o quociente de $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m$ pela relação de equivalência gerada por (i) e (ii). Denotando por $\sim_{(i),(ii)}$ esta relação, obtemos o seguinte isomorfismo de monoides:

$$(19) \qquad *_\alpha G_\alpha \simeq \langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m / \sim_{(i),(ii)} .$$

Como $*_\alpha G_\alpha$ é um grupo e (19) é um isomorfismo de monoides, também o quociente $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m / \sim_{(i),(ii)}$ é um grupo.

Uma consideração análoga vale para o produto amalgamado. De fato, a partir dos dados da definição 3.7.7, vamos introduzir em $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m$ a relação de equivalência, compatível com o produto, gerada por (i), (ii) e pela seguinte condição:

(iii) para todo $g \in G_{\alpha\beta}$, se $g_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}(g)$ e $g_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(g)$, as letras g_α e g_β são equivalentes.

Denotando por $\sim_{(i),(ii),(iii)}$ esta relação, obtemos o seguinte isomorfismo de monoides, logo de grupos:

$$*_\alpha G_\alpha / \{\varphi_{\alpha\beta}\} \simeq \langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m / \sim_{(i),(ii),(iii)} . \tag{20}$$

Observação 3.7.8. Ao invés de partir do monoide livre $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m$, podemos partir do grupo livre $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_g$. De fato, dado $g_\alpha \in G_\alpha$, sejam g_α^{-1} o inverso de g_α em G_α e $g_\alpha^{(-1)}$ a letra inversa a g_α no grupo livre $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_g$. Por causa da condição (i), temos que a palavra $g_\alpha^{-1} g_\alpha$ equivale à 1_α, logo, pela condição (ii), à palavra vazia 1. Por isso, $g_\alpha^{-1} = g_\alpha^{(-1)}$, isto é, a inversão formal de uma letra coincide (ao quociente) com a inversão no grupo correspondente. Ademais, impor a condição (i) equivale a quocientar pelo subgrupo normal gerado por palavras da forma $g_\alpha^{(-1)} g'_\alpha g''_\alpha$, sendo g_α o produto de g'_α e g''_α em G_α, e a condição (ii) equivale a quocientar pelas letras 1_α. Logo, se R for o subconjunto de $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_g$ formado pelas palavras $g_\alpha^{(-1)} g'_\alpha g''_\alpha$ e pelas letras 1_α, temos que:

$$*_\alpha G_\alpha \simeq \langle \sqcup_\alpha G_\alpha | R \rangle. \tag{21}$$

Desta maneira encontramos uma apresentação livre do produto amalgamado cujos geradores são os elementos dos grupos G_α. Analogamente, se R' for a união entre R e as palavras da forma $g_\alpha^{(-1)} g_\beta$, sendo $g_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}(g)$ e $g_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(g)$, temos que:

$$*_\alpha G_\alpha / \{\varphi_{\alpha\beta}\} \simeq \langle \sqcup_\alpha G_\alpha | R' \rangle. \tag{22}$$

$\diamondsuit$

3.7.5. Exercícios.

3.1. Demonstre de outra maneira os isomorfismos (19) e (21), verificando que os grupos $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m / \sim_{(i),(ii)}$ e $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha | R \rangle$ satisfazem a propriedade universal do coproduto. Analogamente, demonstre de outra maneira os isomorfismos (20) e (22), verificando que os grupos $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha \rangle_m / \sim_{(i),(ii),(iii)}$ e $\langle \sqcup_\alpha G_\alpha | R' \rangle$ satisfazem a propriedade universal do coproduto fibrado.

CAPíTULO 4

Álgebra Multilinear

Vamos introduzir as noções fundamentais de Álgebra Multilinear, que serão essenciais no volume de Topologia Diferencial.

4.1. Dualidade

Dados dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V e W, sendo $\mathbb{K}$ um corpo, o conjunto das funções lineares de V a W possui uma estrutura natural de $\mathbb{K}$-espaço vetorial, definida por $(f+g)(v) := f(v)+g(v)$ e $(\lambda f)(v) := \lambda \cdot f(v)$. Isso vale em particular para $W = \mathbb{K}$, portanto podemos dar a seguinte definição.

Definição 4.1.1. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. O *espaço vetorial dual* de V é o seguinte $\mathbb{K}$-espaço vetorial:

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}).$$

Os elementos de V^* são ditos *funcionais lineares*. ♢

Como $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$, em particular $\dim V^* = \dim V$.

Definição 4.1.2. Seja $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ uma base de V. A *base dual* de $\mathcal{A}$ é a família de funcionais lineares $\mathcal{A}^* := \{a_1^*, \dots, a_n^*\}$ definida por $a_i^*(a_j) = \delta_{ij}$. ♢

Isso significa que o funcional a_i^* é a única função linear de V a $\mathbb{K}$ que vale 1 em a_i e 0 nos demais elementos da base $\mathcal{A}$, logo:

$$a_i^*(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) = \lambda_i, \tag{23}$$

ou seja, o funcional a_i^* seleciona a i-ésima coordenada de um vetor em relação à base $\mathcal{A}$. O nome "base dual" é motivado pela seguinte proposição.

Proposição 4.1.3. *Se $\mathcal{A}$ for uma base de V, então $\mathcal{A}^*$ é uma base de V^*.*

Demonstração. Seja $\varphi = \lambda_1 a_1^* + \cdots + \lambda_n a_n^* \in V^*$. Como $a_i^*(a_j) = \delta_{ij}$ por definição, temos que $\varphi(a_i) = \lambda_i$, portanto, se $\varphi = 0$, então $\lambda_i = 0$ para todo i. Isso demonstra que $\mathcal{A}^*$ é independente. Como $\dim V^* = \dim V$, isso é suficiente, mas vamos demonstrar também que $\mathcal{A}^*$ gera V^*. Suponhamos que $\varphi \in V^*$ seja um elemento genérico. Seja $\lambda_i := \varphi(a_i)$. Como também $(\lambda_1 a_1^* + \cdots + \lambda_n a_n^*)(a_i) = \lambda_i$ e $\mathcal{A}$ é uma base, temos que $\varphi = \lambda_1 a_1^* + \cdots + \lambda_n a_n^*$, logo todo elemento de V^* é uma combinação linear de $\mathcal{A}^*$. □

Observação 4.1.4. Por causa da proposição precedente, fixando uma base $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ de V, fica definido o isomorfismo $\varphi_{\mathcal{A}} \colon V \to V^*$, $a_i \mapsto a_i^*$. ♢

4.1.1. Transposição. Por enquanto vimos como a dualidade age em um espaço vetorial, associando-lhe o espaço dual. Podemos estender esta ação também às funções lineares da seguinte maneira. Consideremos uma função linear $f\colon V \to W$. Dado um funcional linear $\varphi\colon W \to \mathbb{K}$, podemos considerar a composição $\varphi \circ f\colon V \to \mathbb{K}$, que é também um funcional linear:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{K} \\ V. \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dotted, "\varphi\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

Por isso damos a seguinte definição.

Definição 4.1.5. Seja $f\colon V \to W$ uma função $\mathbb{K}$-linear. A *função transposta* $f^T\colon W^* \to V^*$ é definida por $f^T(\varphi) := \varphi \circ f$. $\diamondsuit$

Observamos que o domínio e o contradomínio ficam invertidos. É imediato verificar que f^* é linear, portanto acabamos de definir um functor contravariante $*\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, cuja ação nos objetos é definida por $V \mapsto V^*$ e cuja ação nos morfismos é definida por $f \mapsto f^T$.

Notação 4.1.6. Dadas uma função linear $f\colon V \to W$, uma base $\mathcal{A}$ de V e uma base $\mathcal{B}$ de W, denotamos por $\mu_{\mathcal{AB}}(f)$ a matriz representativa de f em relação às bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. $\diamondsuit$

Proposição 4.1.7. *Utilizando a Notação 4.1.6, temos que:*

$$\mu_{\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*}(f^*) = (\mu_{\mathcal{AB}}(f))^T.$$

Demonstração. Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ e $\mu_{\mathcal{AB}}(f) = [\alpha_{ij}]$. Por definição de matriz representativa temos que $f(a_i) = \alpha^j{}_i b_j$. Ademais:

$$(f^T(b_i^*))(a_j) = (b_i^* \circ f)(a_j) = b_i^*(f(a_j)) = b_i^*(\alpha^k{}_j b_k) = \alpha^k{}_j \delta_{ik} = \alpha^i{}_j = (\alpha^T)^j{}_i,$$

portanto $f^T(b_i^*) = (\alpha^T)^j{}_i a_j^*$. $\square$

A proposição precedente pode ser formulada afirmando que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(V,W) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mu_{\mathcal{AB}}"'] & \mathrm{Hom}(W^*,V^*) \arrow[d, "\mu_{\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*}"] \\ M(m,n;\mathbb{K}) \arrow[r, "T"] & M(n,m;\mathbb{K}). \end{tikzcd}$$

4.1.2. Bidualidade. Vimos que V e V^* são isomorfos, mas não canonicamente. Em oposição a isto, vamos mostrar que o bidual V^{**} (ou seja, o dual do dual) é canonicamente isomorfo a V. Um elemento de V^{**} é um funcional linear de V^* a $\mathbb{K}$. Dado um vetor $v \in V$, fica definido o funcional que associa a $\varphi \in V^*$ o escalar $\varphi(v) \in \mathbb{K}$, portanto obtemos a seguinte função:

$$\begin{aligned} \Phi\colon V &\xrightarrow{\simeq} V^{**} \\ v &\mapsto \big(\varphi \mapsto \varphi(v)\big). \end{aligned} \tag{24}$$

Proposição 4.1.8. *A função (24) é um isomorfismo.*

Demonstração. É imediato verificar que Φ é linear. Como $\dim V = \dim V^{**}$, é suficiente verificar que é injetora. Seja $v \neq 0$. Podemos estender $\{v\}$ a uma base $\mathcal{A} = \{v, a_2, \dots, a_n\}$ de V. Consideremos o funcional $\varphi \in V^*$ tal que $\varphi(v) = 1$ e $\varphi(a_i) = 0$: temos que $(\Phi(v))(\varphi) = \varphi(v) \neq 0$, logo $\Phi(v) \neq 0$. Isso demonstra que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$. □

Iterando o isomorfismo, obtemos que $V^{***} \simeq V^*$ e assim por diante. Em geral, uma potência dual par de V é canonicamente isomorfa a V e uma potência dual ímpar de V é canonicamente isomorfa a V^*.

Observação 4.1.9. Daqui em diante subentenderemos o isomorfismo (24) e identificaremos V com V^{**}, portanto um elemento de V será pensado indiferentemente como um vetor ou como um funcional de V^*. ♢

Proposição 4.1.10. *Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ uma base de V e $\mathcal{A}^{**} = \{a_1^{**}, \dots, a_n^{**}\}$ a base bidual. Temos que $a_i^{**} = a_i$ para todo i, portanto $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$.*

Demonstração. Por definição $a_i^{**}(a_j^*) = \delta_{ij}$. Também $a_j^*(a_i) = \delta_{ij}$, ou seja, pelo isomorfismo (24), $a_i(a_j^*) = \delta_{ij}$. Isso demonstra que os funcionais a_i^{**} e a_i assumem o mesmo valor em todo elemento da base $\mathcal{A}^*$, logo $a_i^{**} = a_i$. □

Vamos agora considerar o comportamento do isomorfismo (24) em relação às funções lineares. Seja $f\colon V \to W$. Ficam definidas a transposta $f^T\colon W^* \to V^*$ e a bi-transposta $f^{TT}\colon V \to W$.

Proposição 4.1.11. *Dada uma função linear $f\colon V \to W$, temos que $f^{TT} = f$.*

Demonstração. Devemos demonstrar que $f^{TT}(v) = f(v)$ para todo $v \in V$, isto é, explicitando o isomorfismo (24), $f^{TT}(\Phi(v)) = \Phi(f(v))$. Isso equivale ao fato que $f^{TT} \circ \Phi = \Phi \circ f$, ou seja, à comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{TT}"] \\ W \arrow[r, "\Phi"] & W^{**}. \end{tikzcd}$$

De fato, para todo $\psi \in W^*$, temos que:

$$\begin{aligned} \big(f^{TT}(\Phi(v))\big)(\psi) &= (\Phi(v) \circ f^T)(\psi) = \Phi(v)(f^T(\psi)) \\ &= \Phi(v)(\psi \circ f) = (\psi \circ f)(v) = \psi(f(v)) = (\Phi(f(v)))(\psi). \end{aligned}$$ □

Acabamos de demonstrar que o functor bidualidade $**\colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ é isomorfo ao functor identidade, ou seja, o isomorfismo (24) é canônico.

4.1.3. Formas bilineares não degeneradas e dualidade. Suponhamos que V seja dotado de uma forma bilinear não degenerada $\langle \cdot\,, \cdot \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$. Fica definido o seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned} \Psi\colon V &\to V^* \\ v &\mapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle). \end{aligned} \tag{25}$$

Por isso, uma forma bilinear não degenerada em V induz um isomorfismo entre V e V^*. Este isomorfismo é canônico. De fato, dada uma função linear $f\colon V \to W$, podemos associar-lhe a função linear $\Psi(f)\colon V^* \to W^*$ definida por $(\Psi(f))(\Psi(v)) := \Psi(f(v))$. Por construção obtemos um isomorfismo de functores entre Ψ e a identidade de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, logo (25) é um isomorfismo canônico.

4.2. Produto tensor

O produto tensor é uma operação que representa a maneira natural de "multiplicar" dois espaços vetoriais, tão como a soma direta é a maneira natural de "somá-los". Contudo, já observamos no Exemplo 2.4.5 que não se trata do produto na categoria $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, mas sim de uma operação que a torna uma categoria monoidal simétrica (v. Apêndice A.3).

4.2.1. Espaço vetorial livre. Dados um corpo $\mathbb{K}$ e um conjunto A, vamos introduzir a noção de $\mathbb{K}$-*espaço vetorial livre* gerado por A. Trata-se do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}\langle A\rangle$, único a menos de isomorfismo canônico, do qual A é uma base. Como cada elemento de $\mathbb{K}\langle A\rangle$ tem que ser combinação linear de A de modo único, podemos definir $\mathbb{K}\langle A\rangle$ como o conjunto das combinações lineares formais de A com coeficientes em $\mathbb{K}$. Mais precisamente, podemos defini-lo da seguinte maneira.

O conjunto das funções de A a $\mathbb{K}$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, definida por $(f+g)(a) := f(a) + g(a)$ e $(\lambda f)(a) := \lambda \cdot f(a)$. Denotamos este espaço vetorial por $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

Definição 4.2.1. Sejam A um conjunto e $\mathbb{K}$ um corpo. O $\mathbb{K}$-*espaço vetorial livre* gerado por A é o subespaço vetorial de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, que denotamos por $\mathbb{K}\langle A\rangle$, formado pelas funções $f\colon A \to \mathbb{K}$ tais que existe um subconjunto *finito* $B \subset A$ tal que $f|_{A\setminus B} = 0$. ♢

Definição 4.2.2. Seja $f \in \mathbb{K}\langle A\rangle$. O *suporte* de f é o conjunto finito $\mathrm{supp}(f) := \{a \in A : f(a) \neq 0\}$. ♢

Seja $f \in \mathbb{K}\langle A\rangle$. Se $f \neq 0$, seja $\mathrm{supp}(f) = \{a_1, \dots, a_k\}$, sendo $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, e seja $\lambda_i := f(a_i)$. Podemos denotar f pela combinação linear formal $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$. Vamos ver como ficam representandos a soma e o produto externo com esta notação.

- Dados dois elementos não nulos da forma $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ e $\beta = \sum_{i=1}^{h} \mu_i b_i$, seja $\{c_1, \dots, c_l\} := \{a_1, \dots, a_k\} \cup \{b_1, \dots, b_h\}$, sendo $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$. Podemos escrever α e β da forma $\alpha = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i c_i$ e $\beta = \sum_{i=1}^{l} \mu_i c_i$, igualando a 0 os coeficientes dos vetores acrescentados às duas somas originais. Desta maneira temos que $\alpha + \beta := \sum_{i=1}^{l} (\lambda_i + \mu_i) c_i$, tirando os elementos tais que $\lambda_i + \mu_i = 0$. Se todos os coeficientes forem nulos, claramente $\alpha + \beta = 0$.
- Dados um elemento da forma $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, sendo $\alpha \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, temos que $\lambda(\sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda \mu_i) a_i$.

Se A for finito e contiver n elementos, então $\mathbb{K}\langle A\rangle \simeq \mathbb{K}^n$. O isomorfismo não é canônico, pois é necessário fixar uma ordem em A para mandar o elemento i-ésimo de A no elemento i-ésimo da base canônica de $\mathbb{K}^n$.

Definição 4.2.3. Dados um conjunto A e um corpo $\mathbb{K}$, um $(A,\mathbb{K})$-par é um um par (V,i) formado por um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V e por uma função $i\colon A \to V$. Um *isomorfismo de* $(A,\mathbb{K})$*-pares* de (V,i) a (V',i') é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $\varphi\colon V \to V'$ tal que $\varphi \circ i = i'$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:

(26)
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] & \\ V \arrow[rr, "\varphi"] & & V'. \end{tikzcd}$$
♢

Proposição 4.2.4. *Sejam A um conjunto, W um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\iota\colon A \to \mathbb{K}\langle A\rangle$ a inclusão canônica. O par $(\mathbb{K}\langle A\rangle, \iota)$ é o único $(A,\mathbb{K})$-par, a menos de um único isomorfismo de $(A,\mathbb{K})$-pares, que satisfaz a seguinte propriedade universal. Dada uma função $f\colon A \to W$, existe uma* única *função linear $\tilde{f}\colon \mathbb{K}\langle A\rangle \to W$ tal que $f = \tilde{f} \circ \iota$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:*

(27)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & W \\ \mathbb{K}\langle A\rangle. \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Começamos verificando que o par $(\mathbb{K}\langle A\rangle, \iota)$ satisfaz a propriedade enunciada. Seja $f\colon A \to W$. Fica definida a função $\tilde{f}(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) := \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_k f(a_k)$. O leitor pode verificar que $\tilde{f}$ é linear e trivialmente $\tilde{f} \circ \iota = f$. A unicidade segue imediatamente do fato que $\iota(A)$ é uma base de $\mathbb{K}\langle A\rangle$ por construção.

Para verificar a unicidade, suponhamos que (V,i) seja outro $(A,\mathbb{K})$-par que verifica a propriedade universal enunciada. Considerando o diagrama (27) em relação a $(\mathbb{K}\langle A\rangle, \iota)$, com $W = V$ e $f = i$, e o mesmo diagrama em relação a (V,i), com $W = \mathbb{K}\langle A\rangle$ e $f = \iota$, obtemos os seguintes diagramas:

($\star$)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\iota"'] & V \\ \mathbb{K}\langle A\rangle \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{i}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{K}\langle A\rangle \\ V. \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{\iota}"'] & \end{tikzcd}$$

Vamos verificar que $\tilde{i}$ e $\tilde{\iota}$ são isomorfismos inversos entre si. De fato, ficam definidas as composições $\tilde{\iota} \circ \tilde{i}\colon \mathbb{K}\langle A\rangle \to \mathbb{K}\langle A\rangle$ e $\tilde{i} \circ \tilde{\iota}\colon V \to V$, as quais tornam os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathbb{K}\langle A\rangle \\ \mathbb{K}\langle A\rangle \arrow[ur, dotted, "\tilde{\iota}\circ\tilde{i}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "i"'] & V \\ V. \arrow[ur, dotted, "\tilde{i}\circ\tilde{\iota}"'] & \end{tikzcd}$$

Observamos que, substituindo $\tilde{\iota} \circ \tilde{i}$ por $\mathrm{id}_{\mathbb{K}\langle A\rangle}$ e $\tilde{i} \circ \tilde{\iota}$ por id_V, os dois diagramas continuam comutando, portanto, por causa da unicidade do morfismo induzido (válida por hipótese), necessariamente $\tilde{\iota} \circ \tilde{i} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}\langle A\rangle}$ e $\tilde{i} \circ \tilde{\iota} = \mathrm{id}_V$, logo $\tilde{\iota}$ e $\tilde{i}$ são isomorfismos inversos entre si. Por causa dos diagramas ($\star$), são isomorfismos de $(A, \mathbb{K})$-pares e são únicos. $\square$

4.2.2. Definição de produto tensor e propriedade universal. A partir da noção de espaço vetorial livre, podemos definir o conceito de produto tensor.

Definição 4.2.5. Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Consideremos o espaço vetorial livre $\mathbb{K}\langle V \times W\rangle$. Seja $I \subset \mathbb{K}\langle V \times W\rangle$ o subespaço vetorial gerado pelos elementos de uma das duas seguintes formas:

- $(\lambda v + \mu v', w) - \lambda(v, w) - \mu(v', w)$
- $(v, \lambda w + \mu w') - \lambda(v, w) - \mu(v, w')$,

sendo $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. O *produto tensor* entre V e W é o seguinte espaço vetorial:

$$V \otimes W := \frac{\mathbb{K}\langle V \times W\rangle}{I}. \tag{28}$$ $\diamondsuit$

Fica definida a projeção ao quociente

$$\Pi\colon \mathbb{K}\langle V \times W\rangle \twoheadrightarrow V \otimes W. \tag{29}$$

Denotamos o elemento $\Pi(v, w)$ por $v \otimes w$. Segue da definição de I que $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$, portanto podemos escrever $\lambda v \otimes w$ sem risco de confusão. Como Π é sobrejetora (sendo uma projeção), o elemento genérico de $V \otimes W$ pode ser escrito da forma $\sum_{i=1}^{k} v_i \otimes w_i$, sendo $k \in \mathbb{N}$.

Agora vamos caracterizar o produto tensor através de uma propriedade universal adequada. Definindo a projeção (29), estamos pensando em $V \times W$ como em um conjunto. Esta projeção se restringe à função $\Pi\colon V \times W \to V \otimes W$, a qual, voltando a pensar em $V \times W$ com em um produto de dois espaços vetoriais, é bilinear.

Definição 4.2.6. Dados dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V e W, um *(V, W)-par* é um par (A, Ξ) formado por um $\mathbb{K}$-espaço vetorial A e por uma função bilinear $\Xi\colon V \times W \to A$. Um *isomorfismo de (V, W)-pares* de (A, Ξ) a (A', Ξ') é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $\varphi\colon A \to A'$ tal que $\varphi \circ \Xi = \Xi'$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & V \times W \arrow[dl, "\Xi"'] \arrow[dr, "\Xi'"] & \\ A \arrow[rr, "\varphi"] & & A'. \end{tikzcd} \tag{30}$$ $\diamondsuit$

Teorema 4.2.7. *O par $(V \otimes W, \Pi)$ é o único (V, W)-par, a menos de um único isomorfismo, que satisfaz a seguinte propriedade universal. Dados um $\mathbb{K}$-espaço vetorial Z e uma função bilinear $B\colon V \times W \to Z$, existe uma única função linear $\tilde{B}\colon V \otimes W \to Z$ tal que $B = \tilde{B} \circ \Pi$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\Pi"'] & Z \\ V \otimes W. \arrow[ur, dotted, "\exists! \tilde{B}"'] & \end{tikzcd} \tag{31}$$

A função $\tilde{B}$ é definida por $\tilde{B}(v \otimes w) := B(v, w)$, estendendo-a por linearidade.

DEMONSTRAÇÃO. Começamos demonstrando que o par $(V \otimes W, \Pi)$ satisfaz a propriedade universal enunciada. Pedindo que $B = \tilde{B} \circ \Pi$, necessariamente $B(v, w) = \tilde{B}(\Pi(v, w)) = \tilde{B}(v \otimes w)$, portanto, se $\tilde{B}$ existir, então é única e está definida como no enunciado. Para verificar que $\tilde{B}$ está bem definida, pensamos em B como em uma função do conjunto $V \times W$ a Z e a estendemos por linearidade à função $B' \colon \mathbb{K}\langle V \times W\rangle \to Z$. Agora é suficiente verificar que a restrição de B' ao ideal I na Definição 4.2.5 é nula. Desta maneira, fica definida a função linear $\tilde{B} \colon \mathbb{K}\langle V \times W\rangle / I \to Z$, como projeção ao quociente de B'. O fato que $B'|_I = 0$ segue imediatamente da definição de I e da bilinearidade de B, portanto obtemos a tese.

Para verificar a unicidade, suponhamos que (A, Ξ) seja outro (V, W)-par que verifica a propriedade universal enunciada. Considerando o diagrama (31) em relação a $V \otimes W$, com $Z = A$ e $B = \Xi$, e o mesmo diagrama em relação a A, com $Z = V \otimes W$ e $B = \Pi$, obtemos os seguintes diagramas:

$$(\star\star) \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Xi"] \arrow[d, "\Pi"'] & A \\ V \otimes W \arrow[ur, dotted, "\exists ! \tilde{B}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\Xi"'] & V \otimes W \\ A. \arrow[ur, dotted, "\exists ! \tilde{B}'"'] & \end{tikzcd}$$

Vamos verificar que $\tilde{B}$ e $\tilde{B}'$ são isomorfismos inversos entre si. De fato, ficam definidas as composições $\tilde{B}' \circ \tilde{B} \colon V \otimes W \to V \otimes W$ e $\tilde{B} \circ \tilde{B}' \colon A \to A$, as quais tornam os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\Pi"'] & V \otimes W \\ V \otimes W \arrow[ur, dotted, "\exists ! \tilde{B}' \circ \tilde{B}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Xi"] \arrow[d, "\Xi"'] & A \\ A. \arrow[ur, dotted, "\exists ! \tilde{B} \circ \tilde{B}'"'] & \end{tikzcd}$$

Observamos que, substituindo $\tilde{B}' \circ \tilde{B}$ por $\mathrm{id}_{V \otimes W}$ e $\tilde{B} \circ \tilde{B}'$ por id_A, os dois diagramas continuam comutando, portanto, por causa da unicidade do morfismo induzido (válida por hipótese), necessariamente $\tilde{B}' \circ \tilde{B} = \mathrm{id}_{V \otimes W}$ e $\tilde{B} \circ \tilde{B}' = \mathrm{id}_A$, logo $\tilde{B}$ e $\tilde{B}'$ são isomorfismos inversos entre si. Por causa dos diagramas $(\star\star)$, são isomorfismos de (V, W)-pares e são únicos. $\square$

Denotamos por $L(V, W; Z)$ o espaço das funções bilineares de $V \times W$ a Z e por $L(V; Z)$ o espaço das funções lineares de V a Z (logo $L(V; Z) = \mathrm{Hom}(V, Z)$).

COROLÁRIO 4.2.8. *Temos o seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{aligned} L(V, W; Z) &\xrightarrow{\simeq} L(V \otimes W; Z) \\ B &\mapsto \big(v \otimes w \mapsto B(v, w)\big). \end{aligned} \tag{32}$$

DEMONSTRAÇÃO. A função (32) está bem definida por causa da propriedade universal do produto tensor, dado que, utilizando a notação do Teorema 4.2.7, coincide com a função $B \mapsto \tilde{B}$. É imediato verificar que a função $\tilde{B} \mapsto B := \tilde{B} \circ \Pi$ é a inversa da função (32), logo se trata de um isomorfismo. $\square$

4.2.3. Base do produto tensor. Por enquanto definimos o produto tensor e mostramos a propriedade universal correspondente. A seguinte proposição ajuda a entender mais concretamente sua estrutura.

PROPOSIÇÃO 4.2.9. *Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ uma base de V e $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ uma base de W. Então $\mathcal{AB} := \{a_i \otimes b_j\}$ é uma base de $V \otimes W$, logo* $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\alpha \in V \otimes W$. Sabemos que α pode ser escrito da forma $\alpha = \sum_{i=1}^{k} v_i \otimes w_i$. Como $v_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} a_j$ e $w_i = \sum_{l=1}^{m} \mu_{i,l} b_l$, temos que $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} (\sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,j}\mu_{i,l}) a_j \otimes b_l$, portanto $\mathcal{AB}$ gera $V \otimes W$. Vamos demonstrar que é independente. Seja $\alpha = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_i \otimes b_j$. Fixando $\tilde{i}$ e $\tilde{j}$, consideremos a função bilinear $B \colon V \times W \to \mathbb{K}$ tal que $B(a_i, b_j) = \delta_{\tilde{i}i}\delta_{j\tilde{j}}$. Seja $\tilde{B} \colon V \otimes W \to \mathbb{K}$ a função linear induzida pela propriedade universal. Temos que $\tilde{B}(\alpha) = \lambda_{\tilde{i},\tilde{j}}$. Se $\alpha = 0$, então obviamente $\tilde{B}(\alpha) = 0$, logo $\lambda_{\tilde{i},\tilde{j}} = 0$. Como isso vale para quaisquer $\tilde{i}$ e $\tilde{j}$ fixados, $\mathcal{AB}$ é independente. □

A proposição precedente implica em particular que $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m \simeq \mathbb{K}^{nm}$. Contudo, é mais natural considerar o isomorfismo descrito no seguinte exercício, que implica facilmente no anterior.

EXERCÍCIO 4.2.10. *Seja $M(n, m; \mathbb{K})$ o espaço vetorial das matrizes de n linhas e m colunas com entradas em $\mathbb{K}$. Encontre um isomorfismo explícito $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m \simeq M(n, m; \mathbb{K})$.*

RESOLUÇÃO. Sejam $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ e $w = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{K}^m$. Associamos a $v \otimes w$ a matriz cuja entrada (i, j) é o produto $v_i w_j$. ♢

4.2.4. Produto tensor de matrizes. Pode-se definir também o produto tensor entre matrizes, que denotamos por '$\bar{\otimes}$'. Sejam:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m'} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n'1} & \cdots & b_{n'm'} \end{bmatrix}.$$

Definimos:

$$A \bar{\otimes} B := \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m'} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n'1} & \cdots & b_{n'm'} \end{bmatrix} & \cdots & a_{1m} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m'} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n'1} & \cdots & b_{n'm'} \end{bmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m'} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n'1} & \cdots & b_{n'm'} \end{bmatrix} & \cdots & a_{nm} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m'} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n'1} & \cdots & b_{n'm'} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Formalmente, a definição é a seguinte.

DEFINIÇÃO 4.2.11. Sejam $A = [a_{i,j}] \in M(n, m; \mathbb{K})$ e $B = [b_{i',j'}] \in M(n', m'; \mathbb{K})$. Definimos $A \bar{\otimes} B := [c_{(i,i'),(j,j')}] \in M(nn', mm'; \mathbb{K})$, sendo $c_{(i,i'),(j,j')} = a_{ij} b_{i'j'}$. ♢

PROPOSIÇÃO 4.2.12. *Temos o seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{aligned} M(n,m;\mathbb{K}) \otimes M(n',m',\mathbb{K}) &\xrightarrow{\simeq} M(nn',mm',\mathbb{K}) \\ A\otimes B &\mapsto A\bar{\otimes}B. \end{aligned} \tag{33}$$

DEMONSTRAÇÃO. A função (33) está bem definida e linear, sendo induzida pela propriedade universal a partir da função bilinear $M(n,m;\mathbb{K}) \times M(n',m',\mathbb{K}) \to M(nn',mm',\mathbb{K})$, $(A,B) \mapsto A\bar{\otimes}B$. Uma base de $M(n,m;\mathbb{K})$ é formada pelas matrizes elementares E_{ij}, sendo E_{ij} a matriz cuja entrada (i,j) é igual a 1 e cujas demais entradas são nulas. É fácil verificar que a função linear (33) verifica $E_{ij} \otimes E_{hk} \mapsto E_{(i,h),(j,k)}$, portanto, pela Proposição 4.2.9, manda uma base em uma base. □

Observamos que o Exercício 4.2.10 é um caso particular do isomorfismo (33), para $m = m' = 1$. A seguinte proposição mostra como ligar a noção de produto tensor entre espaços vetoriais genéricos à de produto tensor de matrizes. Deixamos a demonstração ao leitor.

PROPOSIÇÃO 4.2.13. *Sejam V_1, W_1, V_2 e W_2 espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Temos o seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V_1,W_1) \otimes \mathrm{Hom}(V_2,W_2) &\xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(V_1\otimes V_2, W_1\otimes W_2) \\ f\otimes g &\mapsto \big(v_1\otimes v_2 \mapsto f(v_1)\otimes g(v_2)\big). \end{aligned} \tag{34}$$

Fixadas as bases $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{B}_2$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(V_1,W_1) \otimes \mathrm{Hom}(V_2,W_2) \arrow[r, "(34)"] \arrow[d, "\mu_{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1}\otimes\mu_{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}"'] & \mathrm{Hom}(V_1\otimes V_2, W_1\otimes W_2) \arrow[d, "\mu_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}"] \\ M(m_1,n_1)\otimes M(m_2,n_2) \arrow[r, "(33)"] & M(m_1m_2,n_1n_2). \end{tikzcd}$$

4.2.5. Associatividade, comutatividade e distributividade – Parte I. Vamos mostrar que a soma direta e o produto tensor entre espaços vetoriais satisfazem propriedades análogas às da soma e do produto entre números naturais. Enunciaremos de modo mais natural estas propriedades na Seção 4.2.8.

PROPOSIÇÃO 4.2.14. *A soma direta e o produto tensor são associativos a menos dos seguintes isomorfismos canônicos:*

$$\begin{aligned} (V\oplus W)\oplus Z &\xrightarrow{\simeq} V\oplus(W\oplus Z) \\ ((v,w),z) &\mapsto (v,(w,z)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (V\otimes W)\otimes Z &\xrightarrow{\simeq} V\otimes(W\otimes Z) \\ (v\otimes w)\otimes z &\mapsto v\otimes(w\otimes z). \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Em relação à soma direta, é imediato verificar que a função $((v,w),z) \mapsto (v,(w,z))$ é linear e bijetora, portanto é um isomorfismo. Em relação ao produto tensor,[1] sejam $\mathcal{A} = \{a_1,\dots,a_n\}$ uma base de V, $\mathcal{B} = \{b_1,\dots,b_m\}$ uma

[1] Lembramos que, no caso da soma direta, todo elemento de $(V\oplus W)\oplus Z$ é da forma $((v,w),z)$, enquanto, no caso do produto tensor, o genérico elemento de $(V\otimes W)\otimes Z$ é uma *combinação linear* de produtos elementares da forma $(v\otimes w)\otimes z$. A mesma observação vale para as próximas demonstrações.

base de W e $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_l\}$ uma base de Z. Pela Proposição 4.2.9, uma base de $(V \otimes W) \otimes Z$ é $(\mathcal{AB})\mathcal{C} := \{(a_i \otimes b_j) \otimes c_k\}$ e uma base de $V \otimes (W \otimes Z)$ é $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) := \{a_i \otimes (b_j \otimes c_k)\}$. A única função linear que manda $(\mathcal{AB})\mathcal{C}$ em $\mathcal{A}(\mathcal{BC})$ é um isomorfismo, dado que manda uma base em uma base. É imediato verificar que esta função coincide com a do enunciado, que portanto está bem definida e é um isomorfismo. □

Proposição 4.2.15. *A soma direta e o produto tensor são comutativos a menos dos seguintes isomorfismos canônicos:*

$$\begin{array}{ll} V \oplus W \xrightarrow{\simeq} W \oplus V & \qquad V \otimes W \xrightarrow{\simeq} W \otimes V \\ (v, w) \mapsto (w, v) & \qquad v \otimes w \mapsto w \otimes v. \end{array}$$

Demonstração. Análoga à anterior. □

Proposição 4.2.16. *A soma direta e o produto tensor admitem um elemento neutro a menos dos seguintes isomorfismos canônicos:*

$$\begin{array}{ll} V \oplus 0 \xrightarrow{\simeq} V & \qquad V \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\simeq} V \\ (v, 0) \mapsto v & \qquad v \otimes 1 \mapsto v. \end{array}$$

Demonstração. Análoga às anteriores. □

Proposição 4.2.17. *O produto tensor é distributivo em relação à soma direta a menos do seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{array}{l} (V \oplus W) \otimes Z \xrightarrow{\simeq} (V \otimes Z) \oplus (W \otimes Z) \\ (v, w) \otimes z \mapsto (v \otimes z, w \otimes z). \end{array}$$

Demonstração. Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ uma base de V, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ uma base de W e $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_l\}$ uma base de Z. Pela Proposição 4.2.9, uma base de $(V \oplus W) \otimes Z$ é $(\mathcal{A} * \mathcal{B})\mathcal{C} := \{(a_i, 0) \otimes c_k, (0, b_j) \otimes c_k\}$ e uma base de $(V \otimes Z) \oplus (W \otimes Z)$ é $(\mathcal{A} * \mathcal{C})(\mathcal{B} * \mathcal{C}) := \{(a_i \otimes c_k, 0), (0, b_j \otimes c_k)\}$. A única função linear que manda $(\mathcal{A} * \mathcal{B})\mathcal{C}$ em $(\mathcal{A} * \mathcal{C})(\mathcal{B} * \mathcal{C})$ é um isomorfismo, dado que manda uma base em uma base. É imediato verificar que esta função coincide com a do enunciado, que portanto está bem definida e é um isomorfismo. □

Enfim, a seguinte proposição mostra que a soma direta e o produto tensor são compatíveis com a noção de isomorfismo.

Proposição 4.2.18. *Se $V_1 \simeq V_2$ e $W_1 \simeq W_2$, então $V_1 \oplus W_1 \simeq V_2 \oplus W_2$ e $V_1 \otimes W_1 \simeq V_2 \otimes W_2$.*

Demonstração. Sejam $\Phi \colon V_1 \xrightarrow{\simeq} V_2$ e $\Psi \colon W_1 \xrightarrow{\simeq} W_2$ isomorfismos. Ficam definidos os isomorfismos $\Theta \colon V_1 \oplus W_1 \xrightarrow{\simeq} V_2 \oplus W_2$, $(v, w) \mapsto (\Phi(v), \Psi(w))$ e $\Xi \colon V_1 \otimes W_1 \xrightarrow{\simeq} V_2 \otimes W_2$, $v \otimes w \mapsto \Phi(v) \otimes \Psi(w)$. □

As cinco proposições anteriores implicam que, se $\mathrm{Vect}'_{\mathbb{K}}$ for o conjunto das classes de isomorfismo de espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, então as operações de soma direta e produto tensor tornam $(\mathrm{Vect}'_{\mathbb{K}}, \oplus, \otimes)$ um semi-anel isomorfo a

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$, sendo o isomorfismo dado pela dimensão. Na verdade, os mesmos enunciados valem também em dimensão infinita. Isso pode ser provado como fizemos, considerando bases de qualquer cardinalidade, ou verificando que os isomorfismos canônicos enunciados e seus inversos estão bem definidos a partir da propriedade universal, sem fixar bases.

4.2.6. Outras propriedades significativas. O corolário da seguinte proposição mostra uma caracterização significativa do produto tensor.

PROPOSIÇÃO 4.2.19. *Temos o seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{aligned} V^* \otimes W^* &\xrightarrow{\simeq} (V \otimes W)^* \\ \varphi \otimes \psi &\mapsto \big(v \otimes w \mapsto \varphi(v)\psi(w)\big). \end{aligned} \tag{35}$$

DEMONSTRAÇÃO. Dados $\varphi \in V^*$ e $\psi \in W^*$, fica definida a função bilinear $V \times W \to \mathbb{K}$, $(v, w) \mapsto \varphi(v)\psi(w)$. Pela propriedade universal do produto tensor, fica definida a função linear $V \otimes W \to \mathbb{K}$, $v \otimes w \mapsto \varphi(v)\psi(w)$. Como isso vale para todos φ e ψ, a função $V^* \times W^* \to (V \otimes W)^*$, $(\varphi, \psi) \mapsto (v \otimes w \mapsto \varphi(v)\psi(w))$, está bem definida. Como esta função é bilinear, pela propriedade universal fica bem definida a função linear (35). Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base de V e $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ uma base de W. Sejam $\mathcal{A}^* = \{a_1^*, \ldots, a_n^*\}$ e $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \ldots, b_m^*\}$ as bases duais. A função (35) manda a base $\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*$ na base $(\mathcal{A}\mathcal{B})^*$, portanto é um isomorfismo. □

COROLÁRIO 4.2.20. *Temos o seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{aligned} V \otimes W &\xrightarrow{\simeq} L(V^*, W^*; \mathbb{K}) \\ v \otimes w &\mapsto \big((\varphi, \psi) \mapsto \varphi(v)\psi(w)\big). \end{aligned} \tag{36}$$

DEMONSTRAÇÃO. Trata-se da composição dos isomorfismos $L(V^*, W^*; \mathbb{K}) \simeq L(V^* \otimes W^*; \mathbb{K}) \simeq L((V \otimes W)^*; \mathbb{K}) = (V \otimes W)^{**} \simeq V \otimes W$. □

Enfim, também a seguinte proposição é muito significativa e será aplicada várias vezes.

PROPOSIÇÃO 4.2.21. *Temos o seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{aligned} V^* \otimes W &\xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(V, W) \\ \varphi \otimes w &\mapsto \big(v \mapsto \varphi(v)w\big). \end{aligned} \tag{37}$$

DEMONSTRAÇÃO. A função (37) está bem definida e é linear, pois é induzida pela propriedade universal a partir da função bilinear $V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, $(\varphi, w) \mapsto (v \mapsto \varphi(v)w)$. Sejam $\mathcal{A}$ uma base de V e $\mathcal{B}$ uma base de W. A função (37) manda a base $\mathcal{A}^*\mathcal{B}$ do domínio na base de $\mathrm{Hom}(V, W)$ formada pelas funções lineares ψ_{ij} tais que $\mu_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\psi_{ij}) = E_{ij}$, portanto é um isomorfismo. □

4.2.7. Produto tensor de uma família finita. Podemos estender facilmente a definição de produto tensor a uma família finita de espaços vetoriais. Todos os resultados desta seção são análogos aos que vimos nas seções anteriores e se demonstram da mesma maneira.

Definição 4.2.22. Sejam $V_1, \dots, V_k$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Consideremos o espaço vetorial livre $\mathbb{K}\langle V_1 \times \cdots \times V_k \rangle$. Seja $I \subset \mathbb{K}\langle V_1 \times \cdots \times V_k \rangle$ o subespaço vetorial gerado pelos elementos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i + \mu v_i', v_{i+1}, \dots, v_k)\\ &\qquad - \lambda(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) - \mu(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \dots, v_k).\end{aligned}$$

O *produto tensor* da família $\{V_1, \dots, V_k\}$ é o seguinte espaço vetorial:

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k := \frac{\mathbb{K}\langle V_1 \times \cdots \times V_k \rangle}{I}. \tag{38}$$ ♢

Fica definida a projeção ao quociente $\Pi\colon \mathbb{K}\langle V_1 \times \cdots \times V_k \rangle \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$. Denotamos o elemento $\Pi(v_1, \dots, v_k)$ por $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$. Observamos que, para $k = 1$, o produto tensor da família $\{V\}$ é canonicamente isomorfo a V mesmo.

Definição 4.2.23. Dada uma família de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $V_1, \dots, V_k$, um $(V_1, \dots, V_k)$-*par* é um par (A, Ξ) formado por um $\mathbb{K}$-espaço vetorial A e por uma função multilinear $\Xi\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to A$. Um *isomorfismo de* $(V_1, \dots, V_k)$-*pares* de (A, Ξ) a (A', Ξ') é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $\varphi\colon A \to A'$ tal que $\varphi \circ \Xi = \Xi'$. ♢

Teorema 4.2.24. *O par $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k, \Pi)$ é o único $(V_1, \dots, V_k)$-par, a menos de um único isomorfismo, que satisfaz a seguinte propriedade universal. Dados um $\mathbb{K}$-espaço vetorial Z e uma função multilinear $B\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to Z$, existe uma única função linear $\tilde{B}\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to Z$ tal que $B = \tilde{B} \circ \Pi$. A função $\tilde{B}$ é definida por $\tilde{B}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) := B(v_1, \dots, v_k)$, estendendo-a por linearidade.*

Denotamos por $L(V_1, \dots, V_k; Z)$ o espaço vetorial das funções multilineares de $V_1 \times \cdots \times V_k$ a Z.

Corolário 4.2.25. *Temos o seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{aligned}L(V_1, \dots, V_k; Z) &\xrightarrow{\simeq} L(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k; Z)\\ B &\mapsto \big(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto B(v_1, \dots, v_k)\big).\end{aligned} \tag{39}$$

Teorema 4.2.26. *Seja $\mathcal{A}_i = \{a_{i,1}, \dots, a_{i,n_i}\}$ uma base de V_i, sendo $i \in \{1, \dots, k\}$. Então $\mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_k := \{a_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes a_{k,j_k}\}$ é uma base do produto tensor $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, logo* $\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k) = \dim V_1 \cdots \dim V_k$.

Proposição 4.2.27. *Temos o seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{aligned}V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* &\xrightarrow{\simeq} (V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)^*\\ \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k &\mapsto \big(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_k(v_k)\big).\end{aligned} \tag{40}$$

Proposição 4.2.28. *Temos o seguinte isomorfismo canônico:*

$$\begin{aligned}V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \otimes W &\xrightarrow{\simeq} L(V_1, \dots, V_k; W)\\ \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k \otimes w &\mapsto \big((v_1, \dots, v_k) \mapsto \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_k(v_k) w\big).\end{aligned} \tag{41}$$

Demonstração. Segue imediatamente dos isomorfismos (34), (39) e (40), sendo $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \otimes W \simeq (V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)^* \otimes W \simeq \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k, W) \simeq L(V_1, \ldots, V_k; W)$. O leitor pode verificar que a composição destes isomorfismos coincide com (37). $\square$

É claro que $(V \otimes W) \otimes Z$ e $V \otimes (W \otimes Z)$ são canonicamente isomorfos a $V \otimes W \otimes Z$, sendo os isomorfismos dados respectivamente por $(v \otimes w) \otimes z \mapsto v \otimes w \otimes z$ e $v \otimes (w \otimes z) \mapsto v \otimes w \otimes z$. A mesma consideração se estende a produtos de mais de três espaços.

4.2.8. Associatividade, comutatividade e distributividade – Parte II. Dados n espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_n$ sobre $\mathbb{K}$, o produto tensor na categoria correspondente não é formado somente pelo espaço vetorial $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, mas sim, conforme a propriedade universal 4.2.24, pelo $(V_1, \ldots, V_n)$-par $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \Pi)$, o qual é essencialmente único.

Em geral, seja (A, Ξ) um produto tensor de $V_1, \ldots, V_n$ e seja (B, Θ) um produto tensor de $W_1, \ldots, W_m$. Definimos:

$$(A, \Xi) \otimes (B, \Theta) := (A \otimes B, \Xi \cdot \Theta)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Xi \cdot \Theta \colon V_1 \times \cdots \times V_n \times W_1 \times \cdots \times W_m &\to A \otimes B \\ (v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m) &\mapsto \Xi(v_1, \ldots, v_n) \otimes \Theta(w_1, \ldots, w_m). \end{aligned}$$

Observamos que $\Xi \cdot \Theta$ é a composição entre $\Xi \times \Theta \colon V_1 \times \cdots \times V_n \times W_1 \times \cdots \times W_m \to A \times B$ e a projeção $A \times B \to A \otimes B$. É fácil verificar que $(A \otimes B, \Xi \cdot \Theta)$ é um produto tensor de $V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_m$.

Dado um espaço vetorial V, podemos pensá-lo como um produto tensor de si mesmo, identificando-o com o V-par (V, id_V). Desta maneira, considerando a Definição 4.2.5, temos que $(V \otimes W, \Pi) = (V, \mathrm{id}_V) \otimes (W, \mathrm{id}_W)$. Em geral, considerando a Definição 4.2.22, $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \Pi) = (V_1, \mathrm{id}_{V_1}) \otimes \cdots \otimes (V_n, \mathrm{id}_{V_n})$, portanto podemos somente considerar produtos tensores de pares. A vantagem desta abordagem está no fato que podemos enunciar as propriedades associativa, comutativa a distributiva de modo muito natural. De fato, por exemplo em relação à associatividade, é suficiente afirmar que que $((V, \mathrm{id}_W) \otimes (W, \mathrm{id}_W)) \otimes (Z, \mathrm{id}_Z)$ e $(V, \mathrm{id}_W) \otimes ((W, \mathrm{id}_W)) \otimes (Z, \mathrm{id}_Z)$ são ambos produtos tensores de V, W, Z. Segue imediatamente da propriedade universal 4.2.24 que existe um único isomorfismo de (V, W, Z)-pares entre os dois e o leitor pode verificar que coincide com o isomorfismo enunciado na Proposição 4.2.14. A mesma construção pode ser aplicada à soma direta, considerando que é o coproduto da categoria dos espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, portanto podemos enunciar da mesma maneira todas as propriedades consideradas na Seção 4.2.5.

4.3. Notação de Einstein

Daqui em diante usaremos frequentemente a convenção de Einstein sobre os índices repetidos. Isso significa o seguinte. Dada uma base $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de um espaço vetorial V, denotaremos por $\mathcal{A}^* = \{a^1, \ldots, a^n\}$ a base dual e, quando o mesmo índice aparecer acima e abaixo, ficará subentendida a soma correspondente. Por exemplo:

$$\lambda^i a_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \qquad\qquad \lambda_i a^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (a_i)^*.$$

Para um escalar a posição do índice não é significativa, ou seja, $\lambda_i = \lambda^i$. Para um vetor, se $v_i \in V$, então $v^i \in V^*$ e vice-versa. Obviamente isso faz sentido somente quando v_i for um elemento de uma base fixada ou quando V for dotado de uma forma bilinear não degenerada, pois, em caso contrário, não há uma maneira canônica de associar a v_i um funcional v^i.

Observação 4.3.1. Esta notação não pode ser usada sempre sem ambiguidade (por isso não a introduzimos desde o começo). Por exemplo, dada uma base $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de um espaço V, não temos uma maneira de indicar que $a^i(a_i) = 1$ para todo i fixado, pois, conforme a convenção de Einstein, $a^i(a_i) = n$. Quando ocorrer uma situação deste tipo, diremos explicitamente quais índices estão fixados. $\diamondsuit$

4.4. Tensores

Nesta seção vamos introduzir a noção de tensor, que será fundamental no volume de Topologia Diferencial.

Notação 4.4.1. Dado um espaço vetorial V, denotamos por $V^{\times p}$ o produto cartesiano $V \times \cdots \times V$ aplicado p vezes, o qual, como espaço vetorial, coincide com a soma direta $V^{\oplus p} := V \oplus \cdots \oplus V$. Analogamente, denotamos por $V^{\otimes p}$ o produto tensor $V \otimes \cdots \otimes V$ aplicado p vezes. $\diamondsuit$

Definição 4.4.2. Sejam V e W espaço vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um (p,q)-*tensor* sobre V com valores em W é uma função multilinear:

$$T\colon (V^*)^{\times p} \times V^{\times q} \to W.$$

Denotamos por $\mathfrak{T}^{p,q}(V;W)$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial dos (p,q)-tensores sobre V com valores em W. $\diamondsuit$

Utilizando a notação da Seção 4.2.2, temos que $\mathfrak{T}^{p,q}(V;W) = L((V^*)^{\times p} \times V^{\times q}; W)$, portanto, neste caso, o isomorfismo (37) se torna o seguinte:

$$\begin{aligned}
&V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} \otimes W \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{T}^{p,q}(V;W) \\
&v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_q \otimes w \mapsto \\
&\qquad \big((\varphi'_1, \ldots, \varphi'_p, v'_1, \ldots, v'_q) \mapsto \varphi'_1(v_1) \cdots \varphi'_p(v_p) \varphi_1(v'_1) \cdots \varphi_q(v'_q) w\big).
\end{aligned} \tag{42}$$

Proposição 4.4.3. *O seguinte produto está bem definido e é bilinear:*

$$\begin{aligned}
&\cdot : \mathfrak{T}^{p,q}(V;W) \times \mathfrak{T}^{r,s}(V;Z) \to \mathfrak{T}^{p+r,q+s}(V;W \otimes Z) \\
&T \cdot T'(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p+r}, v_1, \ldots, v_{q+s}) := \\
&\qquad T(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, v_1, \ldots, v_q) \otimes T'(\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_{p+r}, v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}).
\end{aligned} \tag{43}$$

Demonstração. Podemos verificar diretamente que $T \cdot T'$ é um tensor bem definido. Equivalentemente, observamos que, compondo o domínio e o contradomínio com o isomorfismo (42), o produto (43) equivale ao seguinte, que pode ser usado também como definição:

$$\begin{aligned}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_q \otimes w) \cdot (v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_r \otimes \varphi'_1 \otimes \cdots \otimes \varphi'_s \otimes z) \\ = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_r \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_q \otimes \varphi'_1 \otimes \cdots \otimes \varphi'_s \otimes w \otimes z.\end{aligned} \tag{44}$$

A associatividade de (44) segue imediatamente da do produto tensor. □

Observação 4.4.4. Aplicando a propriedade universal ao produto (43), que é bilinear, obtemos o *isomorfismo*

$$\mathfrak{T}^{p,q}(V;W) \otimes \mathfrak{T}^{r,s}(V;Z) \simeq \mathfrak{T}^{p+r,q+s}(V;W \otimes Z).$$ ♢

Observação 4.4.5. Por causa da Fórmula (44), é natural denotar o produto (43) por '$\otimes$' em vez que por '$\cdot$' e chamá-lo de *produto tensorial.* Nós também faremos isso frequentemente. ♢

Denotamos $\mathfrak{T}^{p,q}(V;\mathbb{K})$ também por $\mathfrak{T}^{p,q}(V)$. Definimos:

$$\mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V;W) := \bigoplus_{p,q\in\mathbb{N}} \mathfrak{T}^{p,q}(V;W) \qquad \mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V) := \bigoplus_{p,q\in\mathbb{N}} \mathfrak{T}^{p,q}(V).$$

Estabelecemos por convenção que $\mathfrak{T}^{0,0}(V;W) = W$, logo $\mathfrak{T}^{0,0}(V) = \mathbb{K}$. A Proposição 4.4.3 implica imediatamente que:

- o espaço vetorial bi-graduado $\mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V)$ se torna uma álgebra unitária associativa, com o produto bilinear $\cdot : \mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V) \times \mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V) \to \mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V)$ definido por (43);
- o espaço vetorial $\mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V;W)$ se torna um módulo bi-graduado esquerdo sobre o anel $\mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V)$, com o produto bilinear $\cdot : \mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V) \times \mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V;W) \to \mathfrak{T}^{\bullet,\bullet}(V;W)$ definido por (43).

Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base de V e $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ uma base de W. Pelo Teorema 4.2.26 e aplicando o isomorfismo (42), uma base de $\mathfrak{T}^{p,q}(V;W)$ é dada por:

$$\{a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \cdots \otimes a^{j_q} \otimes b_k\}. \tag{45}$$

Por isso, o genérico elemento de $\mathfrak{T}^{p,q}(V;W)$ pode ser representado de modo único da seguinte forma:

$$\lambda^{i_1 \cdots i_p k}_{j_1 \cdots j_q}\, a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \cdots \otimes a^{j_q} \otimes b_k.$$

4.4.1. Álgebra tensorial. Observamos que, trocando V por V^*, um (p,q)-tensor se torna um (q,p)-tensor, portanto todas as propriedades dos tensores ficam invariadas trocando p e q. Daqui em diante consideraremos $(p,0)$-tensores (equivalentemente, poderíamos considerar $(0,p)$-tensores), que chamamos também de p-tensores.

Notação 4.4.6. Denotamos $\mathfrak{T}^{p,0}(V;W)$ também por $\mathfrak{T}^p(V;W)$, logo $\mathfrak{T}^p(V;W) \simeq V^{\otimes p} \otimes W$ canonicamente pelo isomorfismo (42). Denotamos $\mathfrak{T}^p(V;\mathbb{K})$ também por $\mathfrak{T}^p(V)$, logo $\mathfrak{T}^p(V) \simeq V^{\otimes p}$ canonicamente. ♢

Definição 4.4.7. A *álgebra tensorial* de V é a álgebra:

$$\mathfrak{T}^{\bullet}V := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \mathfrak{T}^{p}V \overset{(42)}{\simeq} \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} V^{\otimes p}$$

com o produto (43). ♢

Dado que $V^{\otimes 1} = V$, temos o mergulho natural

$$\iota\colon V \hookrightarrow \mathfrak{T}^{\bullet}V, \tag{46}$$

que identifica V com o subespaço vetorial de grau 1 de $\mathfrak{T}^{\bullet}V$. Ademais, o produto (43), através do isomorfismo (42), se torna $(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)\cdot(v'_1\otimes\cdots\otimes v'_h) = v_1\otimes\cdots\otimes v_k\otimes v'_1\otimes\cdots\otimes v'_h$, portanto é imediato verificar que $\mathfrak{T}^{\bullet}V$ é uma álgebra associativa. Enfim, sendo $\mathfrak{T}^{0}V = \mathbb{K}$ e sendo $\lambda\cdot(v_1\otimes\cdots\otimes v_k) = \lambda v_1\otimes\cdots\otimes v_k$, é claro que a álgebra $\mathfrak{T}^{\bullet}V$ é também unitária, sendo $1 \in \mathbb{K}$ a unidade. *Daqui em diante subentenderemos o isomorfismo* (42), *aplicando-o toda vez que for necessário ou conveniente. Em particular, o mergulho* (46) *será escrito na forma $\iota(v) = v$, como se fosse a inclusão de um subespaço vetorial.*

A álgebra tensorial é chamada também de *álgebra livre com base o espaço vetorial* V (a não ser confundida com a álgebra livre com base o *conjunto* V), dado que satisfaz a seguinte propriedade universal.

Definição 4.4.8. Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$, um *V-par algébrico* é um par (T, j) formado por uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária associativa T e por uma função linear $j\colon V \to T$. Um *isomorfismo de V-pares algébricos* de (T, j) a (T', j') é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras unitárias $\varphi\colon T \to T'$ tal que $\varphi\circ j = j'$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "j'"] & \\ T \arrow[rr, "\varphi"] & & T'. \end{tikzcd} \tag{47}$$

♢

Teorema 4.4.9. *O par $(\mathfrak{T}^{\bullet}V, \iota)$, sendo ι o mergulho* (46), *é o único V-par algébrico, a menos de um único isomorfismo, que satisfaz a seguinte propriedade universal. Dadas um $\mathbb{K}$-álgebra unitária associativa A e uma função linear $f\colon V \to A$, existe um único morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras unitárias $\tilde{f}\colon \mathfrak{T}^{\bullet}V \to A$ tal que $f = \tilde{f}\circ\iota$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & A \\ \mathfrak{T}^{\bullet}V. \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{f}"'] & \end{tikzcd} \tag{48}$$

A função $\tilde{f}$ é definida por $\tilde{f}(v_1\otimes\cdots\otimes v_k) := f(v_1)\cdots f(v_k)$ e $\tilde{f}(1) = 1$, estendendo-a por linearidade.

Demonstração. Começamos verificando que o par $(\mathfrak{T}^{\bullet}V, \iota)$ satisfaz a propriedade enunciada. Pedindo que $\tilde{f}$ seja um morfismo de álgebras unitárias e que $f = \tilde{f}\circ\iota$, necessariamente $\tilde{f}(v_1\otimes\cdots\otimes v_k) = \tilde{f}(v_1)\cdots\tilde{f}(v_k) = \tilde{f}(\iota(v_1))\cdots\tilde{f}(\iota(v_k)) =$

$f(v_1)\cdots f(v_k)$, logo, se $\tilde{f}$ existir, então é única e está definida como no enunciado. Portanto, só falta verificar que $\tilde{f}$ está bem definida e é efetivamente um morfismo de álgebras unitárias. Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, definimos a função $\bar{f}_k \colon V^{\times k} \to A$, $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto f(v_1)\cdots f(v_k)$. Sendo A uma álgebra, o produto em A é $\mathbb{K}$-bilinear, portanto $\bar{f}_k$ é uma função multilinear. Pela propriedade universal do produto tensor, induz a função $\tilde{f}_k \colon V^{\otimes k} \to A$, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto f(v_1)\cdots f(v_k)$. A função $\tilde{f}$ consiste na aplicação de $\tilde{f}_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, portanto está bem definida. Enfim, $\tilde{f}\big((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \cdot (v_1' \otimes \cdots \otimes v_h')\big) = \tilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes v_1' \otimes \cdots \otimes v_h') = f(v_1)\cdots f(v_k) \cdot f(v_1')\cdots f(v_h') = \tilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \cdot \tilde{f}(v_1' \otimes \cdots \otimes v_h')$. Como $\tilde{f}(1) = 1$ por definição, se trata de um morfismo de álgebras unitárias.

Para verificar a unicidade, suponhamos que (T, j) seja outro V-par algébrico que verifica a propriedade universal enunciada. Considerando o diagrama (48) em relação a $\mathfrak{T}^\bullet V$, com $A = T$ e $f = j$, e o mesmo diagrama em relação a T, com $A = \mathfrak{T}^\bullet V$ e $f = \iota$, obtemos os seguintes diagramas:

(#)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\iota"'] & T \\ \mathfrak{T}^\bullet V \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{j}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "j"'] & \mathfrak{T}^\bullet V \\ T. \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{\iota}"'] & \end{tikzcd}$$

Vamos verificar que $\tilde{j}$ e $\tilde{\iota}$ são isomorfismos inversos entre si. De fato, ficam definidas as composições $\tilde{\iota} \circ \tilde{j} \colon \mathfrak{T}^\bullet V \to \mathfrak{T}^\bullet V$ e $\tilde{j} \circ \tilde{\iota} \colon T \to T$, as quais tornam os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathfrak{T}^\bullet V \\ \mathfrak{T}^\bullet V \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{\iota}\circ\tilde{j}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & T \\ T. \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{j}\circ\tilde{\iota}"'] & \end{tikzcd}$$

Observamos que, substituindo $\tilde{\iota} \circ \tilde{j}$ por $\mathrm{id}_{\mathfrak{T}^\bullet V}$ e $\tilde{j} \circ \tilde{\iota}$ por id_T, os dois diagramas continuam comutando, portanto, por causa da unicidade do morfismo induzido (válida por hipótese), necessariamente $\tilde{\iota} \circ \tilde{j} = \mathrm{id}_{\mathfrak{T}^\bullet V}$ e $\tilde{j} \circ \tilde{\iota} = \mathrm{id}_T$, logo $\tilde{\iota}$ e $\tilde{j}$ são isomorfismos inversos entre si. Por causa dos diagramas (#), são isomorfismos de V-pares algébricos e são únicos. $\square$

Observação 4.4.10. Dado um conjunto X, a $\mathbb{K}$-álgebra livre gerada por X é o $\mathbb{K}$-espaço vetorial livre gerado pelo monoide livre gerado por X. Quocientando a $\mathbb{K}$-álgebra livre gerada por V pelas relações que tornam o produto $\mathbb{K}$-multilinear nas entradas, obtemos a álgebra tensorial de V. $\diamondsuit$

4.4.2. Tensores simétricos e antissimétricos. Agora vamos estudar duas classes particularmente significativas de tensores, conforme a seguinte definição.

Definição 4.4.11. Seja $T \in \mathfrak{T}^p(V; W)$. O tensor T é dito:
- *simétrico* se $T(\varphi_{\sigma(1)}, \ldots, \varphi_{\sigma(p)}) = T(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ para toda permutação $\sigma \in S_p$;
- *antissimétrico* se $T(\varphi_{\sigma(1)}, \ldots, \varphi_{\sigma(p)}) = (-1)^\sigma T(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ para toda permutação $\sigma \in S_p$.

Um p-tensor antissimétrico é dito também *p-forma* em V com valores em W. $\diamondsuit$

É imediato verificar que os tensores (antis)simétricos formam um subespaço vetorial de $\mathfrak{T}^p(V;W)$.

NOTAÇÃO 4.4.12. Denotamos por $\mathfrak{S}^p(V;W)$ e $\bigwedge^p(V;W)$ os subespaços vetoriais de $\mathfrak{T}^p(V;W)$ formados respectivamente pelos tensores simétricos e antissimétricos. Denotamos $\mathfrak{S}^p(V;\mathbb{K})$ e $\bigwedge^p(V;\mathbb{K})$ também por $\mathfrak{S}^p V$ e $\bigwedge^p V$. $\diamondsuit$

Daqui em diante assumiremos que o corpo $\mathbb{K}$ seja de característica 0. Temos as duas seguintes projeções naturais, ditas respectivamente *simetrização* e *antissimetrização*:

$$\mathcal{S}\colon \mathfrak{T}^p(V;W) \twoheadrightarrow \mathfrak{S}^p(V;W) \qquad\qquad \mathcal{A}\colon \mathfrak{T}^p(V;W) \twoheadrightarrow \textstyle\bigwedge^p(V;W)$$

definidas por:

$$\mathcal{S}(T)(\varphi_1,\ldots,\varphi_p) := \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} T(\varphi_{\sigma(1)},\ldots,\varphi_{\sigma(p)}) \tag{49}$$

$$\mathcal{A}(T)(\varphi_1,\ldots,\varphi_p) := \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} (-1)^\sigma T(\varphi_{\sigma(1)},\ldots,\varphi_{\sigma(p)}). \tag{50}$$

Equivalentemente, aplicando o isomorfismo (42):

$$\mathcal{S}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes w) := \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(p)}\otimes w \tag{51}$$

$$\mathcal{A}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes w) := \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} (-1)^\sigma v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(p)}\otimes w. \tag{52}$$

É claro que $\mathcal{S}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes w) = \mathcal{S}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)\otimes w$ e, analogamente, $\mathcal{A}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes w) = \mathcal{A}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)\otimes w$, portanto ficam (antis)simetrizadas somente as componentes relativas a V.

PROPOSIÇÃO 4.4.13. *Temos que:*

- *se $T\in\mathfrak{S}^p(V;W)$, então $\mathcal{S}(T)=T$ e, para $p\geq 2$, $\mathcal{A}(T)=0$;*
- *se $T\in\bigwedge^p(V;W)$, então $\mathcal{A}(T)=T$ e, para $p\geq 2$, $\mathcal{S}(T)=0$.*

Isso implica em particular que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ são efetivamente duas projeções.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos demonstrar o seguindo item, sendo a demonstração do primeiro análoga. Seja $T\in\bigwedge^p(V;W)$. Temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(T)(\varphi_1,\ldots,\varphi_p) &= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^\sigma T(\varphi_{\sigma(1)},\ldots,\varphi_{\sigma(p)}) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^\sigma(-1)^\sigma T(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)\\ &= \frac{1}{p!}\Big(\sum_{\sigma\in S_p}1\Big)T(\varphi_1,\ldots,\varphi_p) = T(\varphi_1,\ldots,\varphi_p).\end{aligned}$$

Analogamente, para $p\geq 2$:

$$S(T)(\varphi_1,\ldots,\varphi_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}T(\varphi_{\sigma(1)},\ldots,\varphi_{\sigma(p)}) = \frac{1}{p!}\Big(\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^\sigma\Big)T(\varphi_1,\ldots,\varphi_p) = 0.$$

É necessário impor $p \geq 2$, pois $S_1 = \{1\}$ é o único grupo simétrico de ordem ímpar. $\square$

Observamos que, aplicando o produto (43) a dois tensores (antis)simétricos, em geral o resultado não será antis(simétrico), mas podemos (antis)simetrizar o resultado. Isso pode ser feito mesmo sem partir de dois tensores (antis)simétricos, portanto ficam definidos os seguintes produtos:

$$\begin{aligned} &\odot\colon \mathfrak{T}^p(V;W) \times \mathfrak{T}^r(V;Z) \to \mathfrak{S}^{p+r}(V;W\otimes Z) && (53)\\ &T \odot T' := \frac{(p+r)!}{p!\,r!}\,\mathcal{S}(T\cdot T') \\ &\wedge\colon \mathfrak{T}^p(V;W) \times \mathfrak{T}^r(V;Z) \to \textstyle\bigwedge^{p+r}(V;W\otimes Z) && (54)\\ &T \wedge T' := \frac{(p+r)!}{p!\,r!}\,\mathcal{A}(T\cdot T'). \end{aligned}$$

Observamos que o numerador do fator de normalização $\frac{(p+r)!}{p!\,r!}$ se corta com o termo $\frac{1}{p!}$ nas definições (49) e (50), portanto:

$$T \odot T'(\varphi_1,\ldots,\varphi_{p+r}) = \frac{1}{p!\,r!}\sum_{\sigma\in S_{p+r}} T(\varphi_{\sigma(1)},\ldots,\varphi_{\sigma(p)}) \otimes T'(\varphi_{\sigma(p+1)},\ldots,\varphi_{\sigma(p+r)}) \tag{55}$$

$$T \wedge T'(\varphi_1,\ldots,\varphi_{p+r}) = \frac{1}{p!\,r!}\sum_{\sigma\in S_{p+r}} (-1)^{\sigma} T(\varphi_{\sigma(1)},\ldots,\varphi_{\sigma(p)}) \otimes T'(\varphi_{\sigma(p+1)},\ldots,\varphi_{\sigma(p+r)}). \tag{56}$$

Equivalentemente, aplicando o isomorfismo (42):

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes w)\odot(v_{p+1}\otimes\cdots\otimes v_{p+r}\otimes z) = \frac{1}{p!\,r!}\sum_{\sigma\in S_{p+r}} v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(p+r)}\otimes w\otimes z \tag{57}$$

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes w)\wedge(v_{p+1}\otimes\cdots\otimes v_{p+r}\otimes z) = \frac{1}{p!\,r!}\sum_{\sigma\in S_{p+r}} (-1)^{\sigma} v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(p+r)}\otimes w\otimes z. \tag{58}$$

Restringindo os produtos (53) e (54) aos tensores (antis)simétricos, obtemos os seguintes produtos:

$$\odot\colon \mathfrak{S}^p(V;W)\times\mathfrak{S}^r(V;Z)\to\mathfrak{S}^{p+r}(V;W\otimes Z) \tag{59}$$

$$\wedge\colon \textstyle\bigwedge^p(V;W)\times\bigwedge^r(V;Z)\to\bigwedge^{p+r}(V;W\otimes Z). \tag{60}$$

A seguinte proposição mostra que estes dois produtos são os realmente significativos.

Proposição 4.4.14. *Para todos tensores T e T' temos que:*

$$T\odot T' = \mathcal{S}(T)\odot\mathcal{S}(T') \qquad\qquad T\wedge T' = \mathcal{A}(T)\wedge\mathcal{A}(T').$$

Demonstração. Vamos demonstrar o enunciado no caso antissimétrico. A prova no caso simétrico é análoga, desconsiderando os sinais das permutações. Nas seguintes fórmulas, vamos denotar por $S_r^{(p)}$ o grupo simétrico de r elementos pensado como grupo de permutações do conjunto $\{p+1,\ldots,p+r\}$ em vez que do conjunto $\{1,\ldots,r\}$. Dadas $\sigma\in S_p$ e $\tau\in S_r^{(p)}$, fica definida a composição $\sigma\tau = \tau\sigma \in S_{p+r}$. Temos que:

$$\mathcal{A}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes w)\wedge\mathcal{A}(v_{p+1}\otimes\cdots\otimes v_{p+r}\otimes z)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(52)}{=} \frac{1}{p!r!} \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{\tau \in S_r^{(p)}} (-1)^{\sigma}(-1)^{\tau} (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \otimes w) \wedge (v_{\tau(p+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(p+r)} \otimes z) \\
&= \frac{1}{p!r!} \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{\tau \in S_r^{(p)}} (-1)^{\sigma\tau} (v_{\sigma\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma\tau(p)} \otimes w) \wedge (v_{\sigma\tau(p+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma\tau(p+r)} \otimes z) \\
&\overset{(58)}{=} \frac{1}{(p!r!)^2} \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{\tau \in S_r^{(p)}} \sum_{\eta \in S_{p+r}} (-1)^{\sigma\tau\eta} v_{\sigma\tau\eta(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma\tau\eta(p)} \otimes v_{\sigma\tau\eta(p+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma\tau\eta(p+r)} \otimes w \otimes z \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{1}{(p!r!)^2} \Big(\sum_{\sigma \in S_p} 1 \Big) \Big(\sum_{\tau \in S_r} 1 \Big) \sum_{\eta \in S_{p+r}} (-1)^{\eta} v_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\eta(p+r)} \otimes w \otimes z \\
&= \frac{1}{p!r!} \sum_{\eta \in S_{p+r}} (-1)^{\eta} v_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\eta(p+r)} \otimes w \otimes z \\
&\overset{(58)}{=} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w) \wedge (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+r} \otimes z).
\end{aligned}
$$

Para justificar a igualdade $(\star)$, observamos que, para todas permutações σ e τ fixadas, a função $\tau \mapsto \sigma\tau\eta$ é uma bijeção de S_{p+r} em si, portanto a soma a respeito de η coincide com a soma a respeito de $\sigma\tau\eta$, mas o sinal de cada termo fica multiplicado por $(-1)^{\sigma\tau}$. □

Corolário 4.4.15. *Para todos tensores T e T' temos que:*

$$
\begin{aligned}
T \odot T' &= \mathcal{S}(T) \odot T' = T \odot \mathcal{S}(T') = \mathcal{S}(T) \odot \mathcal{S}(T') \\
T \wedge T' &= \mathcal{A}(T) \wedge T' = T \wedge \mathcal{A}(T') = \mathcal{A}(T) \wedge \mathcal{A}(T').
\end{aligned}
$$

Demonstração. Aplicando as Proposições 4.4.14 e 4.4.13, temos que $\mathcal{A}(T) \wedge T' = \mathcal{A}(\mathcal{A}(T)) \wedge \mathcal{A}(T') = \mathcal{A}(T) \wedge \mathcal{A}(T') = T \wedge T'$. Um argumento análogo vale partindo de $T \wedge \mathcal{A}(T')$ e no caso simétrico. □

Notação 4.4.16. Seja $T \in \mathfrak{T}^{\bullet}(V; W)$ (em particular, pode ser simétrico ou antissimétrico). Se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $T \in \mathfrak{T}^p(V; W)$, então $|T| := p$. Neste caso dizemos que T é *puro* de grau p (logo um tensor genérico é uma soma de tensores puros). ♢

Proposição 4.4.17. *Os produtos* (53) *e* (54) *são associativos, pois, assumindo que T, T' e T'' sejam puros e estendendo o resultado por linearidade, temos que:*

$$
\begin{aligned}
(T \odot T') \odot T'' &= T \odot (T' \odot T'') = \frac{(|T| + |T'| + |T''|)!}{|T|!\,|T'|!\,|T''|!} \mathcal{S}(T \otimes T' \otimes T'') \\
(T \wedge T') \wedge T'' &= T \wedge (T' \wedge T'') = \frac{(|T| + |T'| + |T''|)!}{|T|!\,|T'|!\,|T''|!} \mathcal{A}(T \otimes T' \otimes T'').
\end{aligned}
$$

Ademais, (53) *é comutativo em V, enquanto* (54) *é anticomutativo graduado em V, ou seja, considerando o isomorfismo $\epsilon \colon W \otimes Z \xrightarrow{\simeq} Z \otimes W$, $w \otimes z \mapsto z \otimes w$, valem as seguintes identidades:*

$$
T \odot T' = \epsilon \circ T' \odot T \qquad\qquad T \wedge T' = \epsilon \circ (-1)^{|T| \cdot |T'|} T' \wedge T.
$$

Demonstração. Vamos demonstrar o enunciado em relação ao produto antissimétrico, sendo análoga a demonstração no caso simétrico. Sejam $p := |T|$, $q := |T'|$

e $r := |T''|$. Nas seguintes igualdades, o símbolo '$*$' indica que estamos aplicando o Corolário 4.4.15:

$$(T \wedge T') \wedge T'' \overset{(54)}{=} \tfrac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\mathcal{A}(T \cdot T') \wedge T'' \overset{*}{=} \tfrac{(p+q)!}{p!\,q!}\,(T \cdot T') \wedge T'' \overset{(54)}{=} \tfrac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}\,\mathcal{A}(T \cdot T' \cdot T'').$$

Partindo de $T \wedge (T' \wedge T'')$ obtemos o mesmo resultado, portanto o produto (antis)simétrico é associativo. Enfim, e relação à (anti)comutatividade, temos que:

$$\begin{aligned}(61)\qquad &(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w) \wedge (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+r} \otimes z)\\ &\overset{(58)}{=} \frac{1}{p!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+r}} (-1)^{\sigma} (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p+r)} \otimes w \otimes z).\end{aligned}$$

Seja $\tau \in S_{p+r}$ a permutação definida por $\tau(1) = p+1, \ldots, \tau(r) = p+r, \tau(r+1) = 1, \ldots, \tau(r+p) = p$. Temos que:

$$\begin{aligned}(62)\qquad &(v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+r} \otimes z) \wedge (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w)\\ &= (v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(r)} \otimes z) \wedge (v_{\tau(r+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(r+p)} \otimes w)\\ &\overset{(58)}{=} \frac{1}{p!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+r}} (-1)^{\sigma} (v_{\tau\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau\sigma(r)} \otimes v_{\tau\sigma(r+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau\sigma(r+p)} \otimes z \otimes w)\\ &\overset{(\#)}{=} \frac{1}{p!r!} \sum_{\sigma \in S_{p+r}} (-1)^{\tau\sigma} (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \otimes v_{\sigma(r+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r+p)} \otimes z \otimes w)\\ &\overset{(61)}{=} (-1)^{\tau} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes z) \wedge (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+r} \otimes w).\end{aligned}$$

Para justificar a igualdade (#), observamos que a função $\sigma \mapsto \tau\sigma$ é uma bijeção de S_n em si, portanto a soma a respeito de σ continua sendo a mesma sem aplicar esta bijeção, exceto pelo fato que o sinal de cada termo muda pelo fator $(-1)^{\tau}$. Enfim, só falta demonstrar que $(-1)^{\tau} = (-1)^{pr}$. De fato, a permutação τ se obtém mandando r em $p+r$, sucessivamente $r-1$ em $p+r-1$ e assim por diante até 1 em $p+1$. Trata-se de r operações, cada uma formada por p trocas (pois há p elementos para "atravessar"), logo temos que compor pr trocas. $\square$

Observação 4.4.18. Se $W = Z = \mathbb{K}$ (logo $W \otimes Z \simeq \mathbb{K}$ canonicamente), então o isomorfismo ϵ da Proposição 4.4.17 corresponde à identidade de $\mathbb{K}$, logo $T \odot T' = T' \odot T$ e $T \wedge T' = (-1)^{|T|\cdot|T'|} T' \wedge T$. $\diamondsuit$

Agora, sabendo que o produto (antis)simétrico é associativo, podemos generalizar a Proposição 4.4.17 da seguinte maneira.

Proposição 4.4.19. *Temos que:*

$$\begin{aligned}T_1 \odot \cdots \odot T_n &= \frac{(|T_1| + \cdots + |T_n|)!}{|T_1|! \cdots |T_n|!}\,\mathcal{S}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_n)\\ T_1 \wedge \ldots \wedge T_n &= \frac{(|T_1| + \cdots + |T_n|)!}{|T_1|! \cdots |T_n|!}\,\mathcal{A}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_n).\end{aligned}$$

Demonstração. A tese vale para $n = 2$ (por definição) e para $n = 3$ (pela Proposição 4.4.17). Por indução, suponhamos que a tese valha para $n-1$. Seja $p_i := |T_i|$. Nas seguintes igualdades, o símbolo '$*$' indica que estamos aplicando a hipótese indutiva e o símbolo '$\star$' indica que estamos aplicando o Corolário 4.4.15:

$$(T_1 \wedge \ldots \wedge T_{n-1}) \wedge T_n \overset{*}{=} \tfrac{(p_1+\cdots+p_{n-1})!}{p_1!\cdots p_{n-1}!} \mathcal{A}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_{n-1}) \wedge T_n$$
$$\overset{\star}{=} \tfrac{(p_1+\cdots+p_{n-1})!}{p_1!\cdots p_{n-1}!} (T_1 \otimes \cdots \otimes T_{n-1}) \wedge T_n \overset{(54)}{=} \tfrac{(p_1+\cdots+p_n)!}{p_1!\cdots p_n!} \mathcal{A}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_{n-1} \otimes T_n).$$

O mesmo vale no caso simétrico. □

COROLÁRIO 4.4.20. *Temos que:*

$$v_1 \odot \cdots \odot v_p = p!\, \mathcal{S}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \overset{(51)}{=} \sum_{\sigma \in S_p} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}$$
$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = p!\, \mathcal{A}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \overset{(52)}{=} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\sigma} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}.$$

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente substituir T_i por v_i no enunciado da Proposição 4.4.19, aplicando o Isomorfismo (42). □

Dado que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ são projeções, pelo Corolário 4.4.20 todo tensor (antis)simétrico é uma combinação linear de produtos elementares da forma $v_1 \odot \cdots \odot v_p \otimes w$ ou $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \otimes w$. Como o produto (antis)simétrico é associativo, compondo o domínio e o contradomínio com o isomorfismo (42), os produtos (59) e (60) equivalem aos seguintes (que podem ser usados também como definição):

$$(63) \qquad (v_1 \odot \cdots \odot v_p \otimes w) \odot (v'_1 \odot \cdots \odot v'_r \otimes z) = v_1 \odot \cdots \odot v_p \odot v'_1 \odot \cdots \odot v'_r \otimes w \otimes z$$
$$(64) \qquad (v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \otimes w) \wedge (v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_r \otimes z) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_r \otimes w \otimes z.$$

Definimos:

$$\mathfrak{S}^\bullet(V;W) := \textstyle\bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \mathfrak{S}^p(V;W) \qquad \mathfrak{S}^\bullet V := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \bigwedge^p V$$
$$\textstyle\bigwedge^\bullet(V;W) := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \bigwedge^p(V;W) \qquad \bigwedge^\bullet V := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \bigwedge^p V.$$

Estabelecemos por convenção que $\mathfrak{S}^0(V;W) = \bigwedge^0(V;W) = W$, logo $\mathfrak{S}^0 V = \bigwedge^0 V = \mathbb{K}$. A Proposição 4.4.17 implica imediatamente que:

- o espaço vetorial graduado $\mathfrak{S}^\bullet V$ se torna uma álgebra unitária associativa e comutativa;
- o espaço vetorial graduado $\bigwedge^\bullet V$ se torna uma álgebra unitária associativa e anticomutativa graduada;
- o espaço vetorial $\mathfrak{S}^\bullet(V;W)$ se torna um módulo graduado esquerdo sobre o anel comutativo $\mathfrak{S}^\bullet V$;
- o espaço vetorial $\bigwedge^\bullet(V;W)$ se torna um módulo graduado esquerdo sobre o anel anticomutativo graduado $\bigwedge^\bullet V$.

OBSERVAÇÃO 4.4.21. É importante observar que $\mathfrak{S}^\bullet V$ e $\bigwedge^\bullet V$ são subespaços vetoriais de $\mathfrak{T}^\bullet V$, mas *não* são subálgebras, dado que o produto (antis)simétrico não é a restrição do produto tensorial, mas sim é necessário compor o resultado com a projeção correspondente. ♢

DEFINIÇÃO 4.4.22. Vimos na Definição 4.4.7 que a álgebra $\mathfrak{T}^{\bullet}V$ é dita *álgebra tensorial* de V. A álgebra $\mathfrak{S}^{\bullet}V$ é dita *álgebra simétrica* de V e a álgebra $\bigwedge^{\bullet}V$ é dita *álgebra antissimétrica* ou *álgebra exterior* ou *álgebra de Grassmann* de V. $\diamondsuit$

Dado que $V^{\odot 1} = V^{\wedge 1} = V$, temos os seguintes mergulhos naturais, análogos ao Mergulho (46):

$$\iota_s\colon V \hookrightarrow \mathfrak{S}^{\bullet}V \qquad \iota_a\colon V \hookrightarrow \bigwedge^{\bullet}V \tag{65}$$

que identificam V com o subespaço vetorial de grau 1 de $\mathfrak{S}^{\bullet}V$ e $\bigwedge^{\bullet}V$ respectivamente.

4.4.3. Quocientes de álgebras e propriedades universais. Por enquanto temos pensado nas álgebras simétrica e antissimétrica como em *subespaços vetoriais* da álgebra tensorial, dotados de um produto que não é a restrição do produto tensorial. Agora vamos mostrar que podem também ser descritas como *quocientes* da álgebra tensorial e veremos que neste caso também o produto correspondente é a projeção ao quociente do produto tensorial. Para entendermos a relação entre estes dois pontos de vista, lembramos que, em geral, dados um espaço vetorial V e um subespaço vetorial $W \leq V$, escolhendo uma projeção $\pi\colon V \twoheadrightarrow W$, temos que $W \simeq V/(\operatorname{Ker}\pi)$. Isso mostra que todo subespaço vetorial é isomorfo a um quociente do espaço maior através de uma projeção fixada. No caso da álgebra tensorial, temos os subespaços vetoriais $\mathfrak{S}^{\bullet}V, \bigwedge^{\bullet}V \leq \mathfrak{T}^{\bullet}V$ e as projeções naturais $\mathcal{S}\colon \mathfrak{T}^p(V) \twoheadrightarrow \mathfrak{S}^p(V)$ e $\mathcal{A}\colon \mathfrak{T}^p(V) \twoheadrightarrow \bigwedge^p(V)$. Estas projeções induzem os isomorfismos de espaços vetoriais $\mathfrak{S}^p(V) \simeq \mathfrak{T}^p(V)/\operatorname{Ker}\mathcal{S}$ e $\bigwedge^p(V) \simeq \mathfrak{T}^p(V)/\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, os quais resultam ser também (iso)morfismos de álgebras, contrariamente às inclusões de $\mathfrak{S}^p(V)$ e $\bigwedge^p(V)$ em $\mathfrak{T}^p(V)$. Este comportamento natural do produto é devido aos seguintes fatos:

- os produtos de $\mathfrak{S}^p(V)$ e $\bigwedge^p(V)$ são definidos precisamente como a composição entre o produto de $\mathfrak{T}^p(V)$ e as projeções $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ respectivamente, a menos de um fator de normalização (v. Definições (53) e (54));
- o produto de $\mathfrak{T}^p(V)$ é compatível com as projeções $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$, no sentido que, se $\mathcal{S}(T) = 0$ ou $\mathcal{A}(T) = 0$, então respectivamente $\mathcal{S}(T \otimes T') = \mathcal{S}(T' \otimes T) = 0$ ou $\mathcal{A}(T \otimes T') = \mathcal{A}(T' \otimes T) = 0$ para todo T' (v. Corolário 4.4.15).

Isso faz com que as projeções $\mathcal{S}$ a $\mathcal{A}$ sejam morfismos (sobrejetores) de álgebras a menos do fator de normalização, como o leitor pode verificar facilmente decompondo $T \in \mathfrak{T}^p(V)$ em relação às somas diretas $\mathfrak{T}^p(V) \simeq \mathfrak{S}^p(V) \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{S}$ e $\mathfrak{T}^p(V) \simeq \bigwedge^p(V) \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. De fato, pela Proposição 4.4.19, temos que

$$\mathcal{S}(T_1 \otimes T_2) = \frac{|T_1|!|T_2|!}{(|T|_1 + |T|_2)!} T_1 \odot T_2 \qquad \mathcal{A}(T_1 \otimes T_2) = \frac{|T_1|!|T_2|!}{(|T|_1 + |T|_2)!} T_1 \wedge T_2.$$

Portanto, quocientando pelo kernel correspondente, obtemos isomorfismos de álgebras, como mostram em detalhe as seguintes proposições.

PROPOSIÇÃO 4.4.23. *Seja $\mathcal{I}_s \subset \mathfrak{T}^{\bullet}V$ o ideal bilateral gerado pelos elementos da forma $v \otimes w - w \otimes v$, para quaisquer $v, w \in V$. Temos o seguinte isomorfismo* *canônico de álgebras unitárias (associativas):*

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}}\colon \mathfrak{T}^{\bullet}V/\mathcal{I}_s &\xrightarrow{\simeq} \mathfrak{S}^{\bullet}V \\ 1 \mapsto 1; \qquad [v] &\mapsto v \;\; \forall v \in V. \end{aligned} \tag{66}$$

A Fórmula (66) *implica que* $\bar{\mathcal{S}}([v_1 \otimes \cdots \otimes v_p]) = v_1 \odot \cdots \odot v_p$*, logo, pelo Corolário 4.4.20:*

$$\bar{\mathcal{S}}([T]) = |T|!\,\mathcal{S}(T).$$

Demonstração. Consideremos a função $\tilde{\mathcal{S}}\colon \mathfrak{T}^{\bullet}V \twoheadrightarrow \mathfrak{S}^{\bullet}V$, $v \mapsto v$. Trata-se de uma função bem definida, pois equivale a $T \mapsto |T|!\,\mathcal{S}(T)$. Pelas Fórmulas (44) e (63), é um morfismo de álgebras. Sendo $\mathcal{S}$ uma projeção, $\tilde{\mathcal{S}}$ é sobrejetor. Claramente $\mathcal{I}_s \subset \operatorname{Ker}\tilde{\mathcal{S}}$, dado que $\tilde{\mathcal{S}}(v \otimes w - w \otimes v) = v \odot w - w \odot v = 0$, portanto fica bem definida a projeção ao quociente $\bar{\mathcal{S}}[v] := \tilde{\mathcal{S}}(v)$, que coincide com (66). Logo, $\bar{\mathcal{S}}$ é um morfismo sobrejetor de álgebras. Só falta demonstrar que $\bar{\mathcal{S}}$ é injetor, o que equivale à igualdade $\operatorname{Ker}(\tilde{\mathcal{S}}) = \mathcal{I}_s$. Já sabemos que $\mathcal{I}_s \subset \operatorname{Ker}\tilde{\mathcal{S}}$, portanto vamos demonstrar que $\mathcal{I}_s \supset \operatorname{Ker}\tilde{\mathcal{S}}$. Seja $T \in \operatorname{Ker}\tilde{\mathcal{S}}$ e seja $\mathcal{B} := \{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base de V. Dado que $\tilde{\mathcal{S}}$ respeita o grau, todas as componentes puras de T pertencem ao kernel de $\tilde{\mathcal{S}}$, portanto podemos assumir que T seja puro. Seja $p := |T|$. Pelo Teorema 4.2.26, podemos exprimir T da forma $T = \lambda^{i_1 \cdots i_p} a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p}$. Como $v \otimes w = w \otimes v + (v \otimes w - w \otimes v)$, quocientando por $\mathcal{I}_s$ temos que $[v \otimes w] = [w \otimes v]$, logo o quociente é comutativo. Por isso, temos que $T = h + \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_p} \lambda^{i_1 \cdots i_p} a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p}$, sendo $h \in \mathcal{I}_s$. Fixemos uma família crescente de índices $(\tilde{i}_1, \ldots, \tilde{i}_p)$ e, aplicando o Isomorfismo (42), calculemos $(\tilde{\mathcal{S}}(T))(a^{\tilde{i}_1}, \ldots, a^{\tilde{i}_p})$. O único termo significativo é $\alpha = \lambda^{\tilde{i}_1 \cdots \tilde{i}_p} a_{\tilde{i}_1} \otimes \cdots \otimes a_{\tilde{i}_p}$. Suponhamos que os índices distintos em ordem crescente sejam $(j_1, \ldots, j_k)$, repetidos respectivamente $h_1, \ldots, h_k$ vezes (logo, $\tilde{i}_1 = \cdots = \tilde{i}_{h_1} = j_1$, etc., portanto $h_1 + \cdots + h_k = p$). Simetrizando α conforme a Fórmula (51), as únicas permutações significativas são as que fixam a sequência $(j_1, \ldots, j_k)$, cujo número total é $h_1! \cdots h_k!$. Logo, $(\tilde{\mathcal{S}}(T))(a^{\tilde{i}_1}, \ldots, a^{\tilde{i}_p}) = \frac{h_1! \cdots h_k!}{p!} \lambda^{\tilde{i}_1 \cdots \tilde{i}_p}$. Dado que $T \in \operatorname{Ker}\tilde{\mathcal{S}}$ por hipótese, necessariamente $\lambda^{\tilde{i}_1 \cdots \tilde{i}_p} = 0$. Como isso vale para qualquer sequência fixada $(\tilde{i}_1, \ldots, \tilde{i}_p)$, temos que $T = h \in \mathcal{I}_s$. □

Proposição 4.4.24. *Seja* $\mathcal{I}_a \subset \mathfrak{T}^{\bullet}V$ *o ideal bilateral gerado pelos elementos da forma* $v \otimes w + w \otimes v$*, para quaisquer* $v, w \in V$*. Temos o seguinte isomorfismo canônico de álgebras unitárias (anticomutativas graduadas):*

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}\colon \mathfrak{T}^{\bullet}V/\mathcal{I}_a &\xrightarrow{\simeq} \textstyle\bigwedge^{\bullet} V \\ 1 \mapsto 1; \qquad [v] &\mapsto v \;\; \forall v \in V. \end{aligned} \tag{67}$$

A Fórmula (67) *implica que* $\bar{\mathcal{A}}([v_1 \otimes \cdots \otimes v_p]) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$*, logo, pelo Corolário 4.4.20:*

$$\bar{\mathcal{A}}([T]) = |T|!\,\mathcal{A}(T).$$

Demonstração. Consideremos a função $\tilde{\mathcal{A}}\colon \mathfrak{T}^{\bullet}V \twoheadrightarrow \bigwedge^{\bullet} V$, $v \mapsto v$. Trata-se de uma função bem definida, pois equivale a $T \mapsto |T|!\,\mathcal{A}(T)$. Pelas Fórmulas (44) e (64), é um morfismo de álgebras. Sendo $\mathcal{A}$ uma projeção, $\tilde{\mathcal{A}}$ é sobrejetor. Claramente

$\mathcal{I}_a \subset \operatorname{Ker} \tilde{\mathcal{A}}$, dado que $\tilde{\mathcal{A}}(v \otimes w + w \otimes v) = v \wedge w + w \wedge v = 0$, portanto fica bem definida a projeção ao quociente $\bar{\mathcal{A}}[v] := \tilde{\mathcal{A}}(v)$, que coincide com (67). Logo, $\bar{\mathcal{A}}$ é um morfismo sobrejetor de álgebras. Só falta demonstrar que $\bar{\mathcal{A}}$ é injetor, o que equivale à igualdade $\operatorname{Ker}(\tilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{I}_a$. Já sabemos que $\mathcal{I}_a \subset \operatorname{Ker} \tilde{\mathcal{A}}$, portanto vamos demonstrar que $\mathcal{I}_a \supset \operatorname{Ker} \tilde{\mathcal{A}}$. Seja $T \in \operatorname{Ker} \tilde{\mathcal{A}}$ e seja $\mathcal{B} := \{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base de V. Dado que $\tilde{\mathcal{A}}$ respeita o grau, todas as componentes puras de T pertencem ao kernel de $\tilde{\mathcal{A}}$, portanto podemos assumir que T seja puro. Seja $p := |T|$. Pelo Teorema 4.2.26, podemos exprimir T da forma $T = \lambda^{i_1 \cdots i_p} a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p}$. Como $v \wedge w = -w \wedge v + (v \wedge w + w \wedge v)$, quocientando por $\mathcal{I}_a$ temos que $[v \wedge w] = -[w \wedge v]$, logo os elementos de V anticomutam ao quociente. Por isso, temos que $T = h + \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \lambda^{i_1 \cdots i_p} a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p}$, sendo $h \in \mathcal{I}_a$. Fixemos uma família estritamente crescente de índices $(\tilde{i}_1, \ldots, \tilde{i}_p)$ e, aplicando o Isomorfismo (42), calculemos $(\tilde{\mathcal{A}}(T))(a^{\tilde{i}_1}, \ldots, a^{\tilde{i}_p})$. O único termo significativo é $\alpha = \lambda^{\tilde{i}_1 \cdots \tilde{i}_p} a_{\tilde{i}_1} \otimes \cdots \otimes a_{\tilde{i}_p}$. Antissimetrizando α conforme a Fórmula (52), a única permutação significativa é a identidade, logo $(\tilde{\mathcal{A}}(T))(a^{\tilde{i}_1}, \ldots, a^{\tilde{i}_p}) = \frac{1}{p!} \lambda^{\tilde{i}_1 \cdots \tilde{i}_p}$. Dado que $T \in \operatorname{Ker} \tilde{\mathcal{A}}$ por hipótese, necessariamente $\lambda^{\tilde{i}_1 \cdots \tilde{i}_p} = 0$. Como isso vale para qualquer sequência fixada $(\tilde{i}_1, \ldots, \tilde{i}_p)$, temos que $T = h \in \mathcal{I}_a$. $\square$

Observação 4.4.25. Poderíamos também definir o ideal $\mathcal{I}_a$, considerado no enunciado da Proposição 4.4.24, como o ideal gerado pelos elementos da forma $v \otimes v$ para todo $v \in V$. De fato, seja $\mathcal{I}'_a$ o ideal definido desta maneira e seja $\mathcal{I}_a$ o ideal definido na Proposição 4.4.24. Temos que $\mathcal{I}_a \subset \mathcal{I}'_a$, pois $v \otimes w + w \otimes v = (v+w) \otimes (v+w) - v \otimes v - w \otimes w \in \mathcal{I}'_a$. Reciprocamente, $\mathcal{I}'_a \subset \mathcal{I}_a$, pois $v \otimes v = \frac{1}{2} v \otimes v + v \otimes \frac{1}{2} v \in \mathcal{I}_a$. Observamos que a última inclusão pressupõe que a característica do corpo $\mathbb{K}$ seja diferente de 2, mas de todo modo estamos assumindo que seja 0. $\diamondsuit$

Graças às proposições 4.4.23 e 4.4.24, podemos caracterizar as álgebras simétrica e antissimétrica através da propriedade universal correspondente. No caso simétrico, trata-se de acrescentar a hipótese de comutatividade à Definição 4.4.8 e ao Teorema 4.4.9.

Definição 4.4.26. Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$, um *V-par algébrico comutativo* é um par (S, j) formado por uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária associativa e comutativa S e por uma função linear $j \colon V \to S$. Um *isomorfismo de V-pares algébricos comutativos* de (S, j) a (S', j') é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras unitárias (comutativas) $\varphi \colon S \to S'$ tal que $\varphi \circ j = j'$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:

(68)
$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "j'"] & \\ S \arrow[rr, "\varphi"] & & S'. \end{tikzcd}$$
$\diamondsuit$

Teorema 4.4.27. *O par $(\mathfrak{S}^\bullet V, \iota_s)$, sendo ι_s o mergulho (65), é o único V-par algébrico comutativo, a menos de um único isomorfismo, que satisfaz a seguinte propriedade universal. Dadas um $\mathbb{K}$-álgebra unitária associativa e comutativa A e uma função linear $f \colon V \to A$, existe um único morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras unitárias (comutativas) $\tilde{f} \colon \mathfrak{S}^\bullet V \to A$ tal que $f = \tilde{f} \circ \iota_s$, ou seja, tal que o seguinte diagrama* *comuta:*

(69)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_s"'] & A \\ \mathfrak{S}^\bullet V. \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

A função $\tilde{f}$ é definida por $\tilde{f}(v_1 \odot \cdots \odot v_k) := f(v_1) \cdots f(v_k)$ e $\tilde{f}(1) = 1$, estendendo-a por linearidade.

Demonstração. Começamos verificando que o par $(\mathfrak{S}^\bullet V, \iota_s)$ satisfaz a propriedade enunciada. Pedindo que $\tilde{f}$ seja um morfismo de álgebras unitárias e que $f = \tilde{f} \circ \iota_s$, necessariamente $\tilde{f}(v_1 \odot \cdots \odot v_k) = \tilde{f}(v_1) \cdots \tilde{f}(v_k) = \tilde{f}(\iota_s(v_1)) \cdots \tilde{f}(\iota_s(v_k)) = f(v_1) \cdots f(v_k)$, logo, se $\tilde{f}$ existir, então é única e está definida como no enunciado. Portanto, só falta verificar que $\tilde{f}$ está bem definida e é efetivamente um morfismo de álgebras unitárias. Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, definimos a função $\bar{f}_k \colon V^{\times k} \to A$, $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto f(v_1) \cdots f(v_k)$. Sendo A uma álgebra, o produto em A é $\mathbb{K}$-bilinear, portanto $\bar{f}_k$ é uma função multilinear. Pela propriedade universal do produto tensor, induz a função $\hat{f}_k \colon V^{\otimes k} \to A$, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto f(v_1) \cdots f(v_k)$. Seja $\hat{f}$ a aplicação de $\hat{f}_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como A é comutativa, temos que $\mathcal{I}_s \subset \mathrm{Ker}(\hat{f})$, portanto fica bem definida a projeção ao quociente, que, aplicando a Proposição 4.4.23, se identifica naturalmente com $\tilde{f}$. Enfim, $\tilde{f}\big((v_1 \odot \cdots \odot v_k) \odot (v'_1 \odot \cdots \odot v'_h)\big) = \tilde{f}(v_1 \odot \cdots \odot v_k \odot v'_1 \odot \cdots \odot v'_h) = f(v_1) \cdots f(v_k) \cdot f(v'_1) \cdots f(v'_h) = \tilde{f}(v_1 \odot \cdots \odot v_k) \cdot \tilde{f}(v'_1 \odot \cdots \odot v'_h)$. Como $\tilde{f}(1) = 1$ por definição, se trata de um morfismo de álgebras unitárias. A unicidade se demonstra como no Teorema 4.4.9. □

Podemos formular a propriedade universal da álgebra simétrica da seguinte maneira equivalente. No enunciado do Teorema 4.4.27, ao invés de pedirmos que a álgebra A seja comutativa, podemos pedir que $f(v)f(w) = f(w)f(v)$ para todos $v, w \in V$, ou seja, que somente a imagem de f seja comutativa. Claramente estas duas condições (comutatividade de A ou comutatividade da imagem de f) são equivalentes quando f for sobrejetora e o leitor pode verificar facilmente que pode-se pedir a sobrejetividade de f no Teorema 4.4.27 sem perda de generalidade. Portanto, vamos reformular a propriedade universal da seguinte maneira, considerando a Definição 4.4.8 de V-par algébrico.

Teorema 4.4.28. *O par $(\mathfrak{S}^\bullet V, \iota_s)$, sendo ι_s o mergulho (65), é o único V-par algébrico, a menos de um único isomorfismo, que satisfaz a seguinte propriedade universal. Dadas um $\mathbb{K}$-álgebra unitária associativa A e uma função linear $f \colon V \to A$ tal que $f(v)f(w) = f(w)f(v)$ para todos $v, w \in V$, existe um único morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras unitárias $\tilde{f} \colon \mathfrak{S}^\bullet V \to A$ tal que $f = \tilde{f} \circ \iota_s$. A função $\tilde{f}$ é definida por $\tilde{f}(v_1 \odot \cdots \odot v_k) := f(v_1) \cdots f(v_k)$ e $\tilde{f}(1) = 1$, estendendo-a por linearidade.*

A demonstração é idêntica à do Teorema 4.4.27. Esta formulação da propriedade universal pode ser adaptada facilmente ao caso antissimétrico.

Teorema 4.4.29. *O par $(\bigwedge^\bullet V, \iota_a)$, sendo ι_a o mergulho (65), é o único V-par algébrico, a menos de um único isomorfismo, que satisfaz a seguinte propriedade* *universal. Dadas um $\mathbb{K}$-álgebra unitária associativa A e uma função linear $f\colon V \to A$ tal que $f(v)f(w) = -f(w)f(v)$ para todos $v, w \in V$, existe um único morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras unitárias $\tilde{f}\colon \bigwedge^{\bullet} V \to A$ tal que $f = \tilde{f} \circ \iota_a$. A função $\tilde{f}$ é definida por $\tilde{f}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) := f(v_1) \cdots f(v_k)$ e $\tilde{f}(1) = 1$, estendendo-a por linearidade.*

A demonstração é análoga à do Teorema 4.4.27.

Observação 4.4.30. Por causa da Observação 4.4.25, poderíamos substituir a condição $f(v)f(w) = -f(w)f(v)$ no enunciado do Teorema 4.4.29 pela condição equivalente $f(v)^2 = 0$ para todo $v \in V$. ♢

4.5. Bases e matrizes representativas

Vamos mostrar como encontrar uma base natural das álgebras tensorial, simétrica e antissimétrica de V a partir de uma base de V. Vamos mostrar também que uma função linear entre dois espaços vetoriais induz uma função linear entre as álgebras correspondentes e vamos caracterizar a matriz representativa em relação às bases construídas.

4.5.1. Famílias de índices. Consideremos os seguintes conjuntos de índices:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{n,p} &:= \{1, \ldots, n\}^p = \{(i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}^p : 1 \leq i_i, \ldots, i_p \leq n\} \\
\mathcal{I}^*_{n,p} &:= \{(i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{n,p} : i_k \neq i_h \text{ para } k \neq h\} \\
\mathcal{I}^{\leq}_{n,p} &:= \{(i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{n,p} : i_1 \leq \cdots \leq i_p\} \\
\mathcal{I}^{<}_{n,p} &:= \{(i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{n,p} : i_1 < \cdots < i_p\}.
\end{aligned}$$

Os conjuntos $\mathcal{I}^*_{n,p}$ e $\mathcal{I}^{<}_{n,p}$ são vazios para $p > n$. Temos as seguintes inclusões:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}^*_{n,p} \arrow[r, hook] & \mathcal{I}_{n,p} \\
\mathcal{I}^{<}_{n,p} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathcal{I}^{\leq}_{n,p}. \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Em particular, $\mathcal{I}^{<}_{n,p} = \mathcal{I}^{\leq}_{n,p} \cap \mathcal{I}^*_{n,p}$.

Proposição 4.5.1. *A cardinalidade destes conjuntos é a seguinte:*

$$|\mathcal{I}_{n,p}| = n^p \qquad |\mathcal{I}^*_{n,p}| = \binom{n}{p} p! \qquad |\mathcal{I}^{\leq}_{n,p}| = \binom{p+n-1}{n-1} \qquad |\mathcal{I}^{<}_{n,p}| = \binom{n}{p}.$$

Demonstração. Em relação a $\mathcal{I}_{n,p}$, é claro que temos n escolhas possíveis para cada um dos p índices, logo temos n^p possibilidades. Em relação a $\mathcal{I}^{<}_{n,p}$, só temos que selecionar uma subfamília de p elementos de $\{1, \ldots, n\}$, dado que estamos forçados a ordená-la de modo estritamente crescente, logo temos $\binom{n}{p}$ possibilidades. Um elemento de $\mathcal{I}^*_{n,p}$ se obtém de modo único a partir de um elemento de $\mathcal{I}^{<}_{n,p}$ e aplicando uma permutação qualquer às entradas, portanto, para cada um dos $\binom{n}{p}$ elementos de $\mathcal{I}^{<}_{n,p}$, temos $p!$ elementos em $|\mathcal{I}^*_{n,p}|$. Enfim, seja $(i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}^{\leq}_{n,p}$. Podemos caracterizar este multi-índice da seguinte maneira equivalente. Se $i_1 = \cdots = i_k = 1$ e $i_{k+1} > 1$, escrevemos k vezes o índice 1 e colocamos um sinal de separação; se

$i_{k+1} = \cdots = i_{k+h} = 2$, escrevemos h vezes o índice 2 e colocamos um sinal de separação; continuamos assim até o índice i_p:

$$1 \cdots 1 \blacksquare 2 \cdots 2 \blacksquare \cdots \blacksquare n \cdots n.$$

(Se o índice k não aparecer, os símbolos de separação $(k-1)$-ésimo e k-ésimo ocupam posições consecutivas.) Com esta representação, escrevemos p números, pois em total temos p entradas no multi-índice $(i_1, \ldots, i_p)$, e $n-1$ símbolos de separação, portanto $p+n-1$ símbolos em total. Como os índices têm que ser crescentes, a única informação relevante é a posição dos símbolos de separação, que formam um subconjunto de $n-1$ elementos, portanto temos $\binom{p+n-1}{n-1}$ possibilidades. □

Temos duas projeções naturais:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{I}_{n,p} \twoheadrightarrow \mathcal{I}^{\leq}_{n,p} & \qquad \mathcal{I}^{*}_{n,p} \twoheadrightarrow \mathcal{I}^{<}_{n,p} \\ I \mapsto I^{\leq} & \qquad I \mapsto I^{<} \end{array}$$

definidas ordenando os índices de modo crescente. Consideremos agora os seguintes conjuntos:

$$\mathfrak{A}_{n,p} := \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n : \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = p\}$$
$$\mathfrak{A}^{*}_{n,p} := \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{A}_{n,p} : \alpha_k \leq 1 \, \forall k\}.$$

Temos as seguintes funções naturais

$$\begin{array}{llll} \mathcal{I}_{n,p} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}_{n,p} & \qquad \mathfrak{A}_{n,p} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{I}^{\leq}_{n,p} & \qquad \mathcal{I}^{*}_{n,p} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}^{*}_{n,p} & \qquad \mathfrak{A}^{*}_{n,p} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{I}^{<}_{n,p} \\ I \mapsto I^{\odot} & \qquad \alpha \mapsto \alpha^{\otimes} & \qquad I \mapsto I^{\wedge} & \qquad \alpha \mapsto \alpha^{\otimes} \end{array} \tag{70}$$

definidas da seguinte maneira. Dado um índice $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{n,p}$, definimos o índice $I^{\odot} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{A}_{n,p}$, sendo α_k o número de índices $i_j \in I$ iguais a k. Por exemplo, se $n=3$, $p=4$ e $I = (1,3,1,1)$, então $I^{\odot} = (3,0,1)$. Reciprocamente, dado $\alpha \in \mathfrak{A}_{n,p}$, definimos o índice $\alpha^{\otimes} = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}^{\leq}_{n,p}$ da seguinte maneira: $i_1 = \cdots = i_{\alpha_1} = 1, \ldots, i_{p-\alpha_n+1} = \cdots = i_p = n$. Neste caso trata-se de uma bijeção. Por exemplo, se $n=3$, $p=4$ e $\alpha = (3,0,1)$, então $\alpha^{\otimes} = (1,1,1,3)$. Temos que $\alpha^{\otimes\odot} = \alpha$, porém, em geral, $I^{\odot\otimes} \neq I$, pois $I^{\odot\otimes} = I^{\leq}$. Por exemplo, $(1,3,1,1)^{\odot\otimes} = (1,1,1,3)$. As duas demais funções são definidas restringindo as anteriores ao domínio correspondente, logo $\alpha^{\otimes\wedge} = \alpha$ e $I^{\wedge\otimes} = I^{<}$.

Notação 4.5.2. Dado $\alpha \in \mathfrak{A}_{n,p}$, definimos $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. ♢

Notação 4.5.3. Dado um conjunto X, denotamos por $\mathrm{Bij}(X)$ o grupo das bijeções de X em si mesmo. ♢

Notação 4.5.4. Dados $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{n,p}$ e $\sigma \in S_p$, definimos:

$$I^{\sigma} := (i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(p)}).$$

Trata-se da seguinte ação de S_p em $\mathcal{I}_{n,p}$:

$$\begin{aligned} \psi \colon S_p &\to \mathrm{Bij}(\mathcal{I}_{n,p}) \\ \sigma &\mapsto (I \mapsto I^{\sigma}). \end{aligned} \tag{71}$$

Claramente, se $I \in \mathcal{I}^{*}_{n,p}$, então $I^{\sigma} \in \mathcal{I}^{*}_{n,p}$ para toda σ, portanto fica definida por restrição a ação $\psi' \colon S_p \to \mathrm{Bij}(\mathcal{I}^{*}_{n,p})$. Enfim, dada $I \in \mathcal{I}_{n,p}$, denotamos por $(S_p)_I$ o subgrupo de S_p que fixa I, ou seja, $(S_p)_I = \{\sigma \in S_p : I^\sigma = I\}$. Por exemplo, se $n = 2$, $p = 3$ e $I = (1, 2, 1)$, então $(S_3)_I = \{(13)\} \subset S_3$. $\diamondsuit$

NOTAÇÃO 4.5.5. Dado $I \in \mathcal{I}_{n,p}$, definimos $\epsilon(I)$ da seguinte maneira: se $I \notin \mathcal{I}^*_{n,p}$, então $\epsilon(I) := 0$; se $I \in \mathcal{I}^*_{n,p}$, então $\epsilon(I)$ é o sinal da permutação $\sigma \in S_p$ tal que $I^< = I^\sigma$. $\diamondsuit$

PROPOSIÇÃO 4.5.6. *Para todo $I \in \mathcal{I}_{n,p}$, temos que $|(S_p)_I| = (I^\odot)!$, sendo $I^\odot$ definido em* (70). *Em particular, se $I \in \mathcal{I}^*_{n,p}$, então $(S_p)_I = \{1\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Vale a identidade $I^\sigma = I$ se, e somente se, σ permuta as entradas coincidentes de I entre elas. Se $I^\odot = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, temos α_1 entradas iguais a 1, portanto podem ser permutadas sem mudar I. Cada uma destas $\alpha_1!$ permutações pode ser composta com uma permutação das α_2 entradas iguais a 2, portanto obtemos $\alpha_1!\alpha_2!$ permutações que fixam I. Continuando desta maneira até α_n, obtemos $\alpha_1! \cdots \alpha_n!$ permutações que fixam I. $\square$

PROPOSIÇÃO 4.5.7. *Dados $I, J \in \mathcal{I}_{n,p}$, temos que $I^\odot = J^\odot$ se, e somente se, I e J pertencem à mesma órbita da ação* (71), *ou seja, existe uma permutação $\sigma \in S_p$ tal que $I = J^\sigma$.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $I^\odot = J^\odot$ se, e somente se, todo índice entre 1 e n aparece o mesmo número de vezes em I e em J. Isso significa que I e J coincidem a menos da ordem das entradas, ou seja, existe uma permutação que manda I em J ou vice-versa. $\square$

COROLÁRIO 4.5.8. *Fixado $\alpha \in \mathfrak{A}_{n,p}$, o número de índices $I \in \mathcal{I}_{n,p}$ tais que $I^\odot = \alpha$ é $\frac{p!}{\alpha!}$ (logo $\alpha_1! \cdots \alpha_n!$ divide $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)!$). Em particular, fixado $\alpha \in \mathfrak{A}^*_{n,p}$, o número de índices $I \in \mathcal{I}^*_{n,p}$ tais que $I^\wedge = \alpha$ é $p!$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 4.5.7, o número de índices $I \in \mathcal{I}_{n,p}$ tais que $I^\odot = \alpha$ é a cardinalidade da órbita de I em relação à ação (71), ou seja, $\frac{|S_p|}{|(S_p)_I|}$. O resultado segue imediatamente da Proposição 4.5.6. $\square$

4.5.2. Bases. Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base de V e $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ uma base de W.

NOTAÇÃO 4.5.9. Em relação à base $\mathcal{A}$, aplicando o Isomorfismo (42):

- Dado $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{n,p}$, definimos $a_I := a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p} \in \mathfrak{T}^p V$ e $a^I := a^{i_1} \otimes \cdots \otimes a^{i_p} \in \mathfrak{T}^p(V^*)$.
- Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{A}_{n,p}$, definimos $a_{\odot\alpha} := a_1^{\odot\alpha_1} \odot \cdots \odot a_n^{\odot\alpha_n} \in \mathfrak{S}^p V$.
- Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{A}^*_{n,p}$, definimos $a_{\wedge\alpha} := a_1^{\wedge\alpha_1} \wedge \ldots \wedge a_n^{\wedge\alpha_n} \in \bigwedge^p V$.

No segundo e no terceiro item estamos utilizando a convenção $a_i^{\odot 0} = a_i^{\wedge 0} = 1$. $\diamondsuit$

PROPOSIÇÃO 4.5.10. *Utilizando a Notação 4.5.9, consideremos os elementos $a_I \otimes b_k \in \mathfrak{T}^p V \otimes W$, $a_{\odot\alpha} \otimes b_k \in \mathfrak{S}^p V \otimes W$ e $a_{\wedge\alpha} \otimes b_k \in \bigwedge^p V \otimes W$. Temos que (lembrando as Notações 4.5.2 e 4.5.5):*

$$a_I \otimes b_k(a^J) = \delta_I^J \, b_k \tag{72}$$

$$a_{\odot\alpha} \otimes b_k(a^J) = (J^{\odot})!\, \delta_{\alpha}^{J^{\odot}}\, b_k \tag{73}$$

$$a_{\wedge\alpha} \otimes b_k(a^J) = \epsilon(J)\, \delta_{\alpha}^{J^{\wedge}}\, b_k. \tag{74}$$

Demonstração. A Fórmula (72) segue imediatamente do Isomorfismo (42). Em relação à Fórmula (73), pelo Corolário 4.4.20 temos que $a_{\odot\alpha} = \sum_{\sigma\in S_p} a_{(\alpha^{\otimes})^{\sigma}}$. Os únicos termos relevantes na soma são os que correspondem a uma permutação σ tal que $(\alpha^{\otimes})^{\sigma} = J$. Pela Proposição 4.5.7, existem termos deste tipo se, e somente se, $\alpha^{\otimes\odot} = J^{\odot}$, o que equivale a $\alpha = J^{\odot}$. Pelo Corolário 4.5.6, o número de termos na soma que satisfazem esta condição é $(J^{\odot})!$. Em relação à Fórmula (74), pelo Corolário 4.4.20 temos que $a_{\wedge\alpha} = \sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\sigma} a_{(\alpha^{\otimes})^{\sigma}}$. Os únicos termos relevantes na soma são os que correspondem a uma permutação σ tal que $(\alpha^{\otimes})^{\sigma} = J$. Isso implica em particular que $J \in \mathcal{I}^*_{n,p}$, dado que $\alpha \in \mathfrak{A}^*_{n,p}$ por hipótese. Além disso, o termo correspondente na soma é multiplicado por $(-1)^{\sigma}$, que coincide com $\epsilon(J)$ por definição. Pela Proposição 4.5.7, existem termos deste tipo se, e somente se, $\alpha^{\otimes\wedge} = J^{\wedge}$, o que equivale a $\alpha = J^{\wedge}$. Neste caso, pelo Corolário 4.5.6, só há um termo que satisfaz esta condição. □

Pela Proposição 4.2.26, uma base de $\mathfrak{T}^{p,q}(V;W)$ é dada por:

$$\{a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \cdots \otimes a^{j_q} \otimes b_k\}. \tag{75}$$

Por isso, o genérico elemento de $\mathfrak{T}^{p,q}(V;W)$ se pode escrever de modo único da seguinte forma:

$$\lambda^{i_1\cdots i_p k}_{j_1\cdots j_q}\, a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \cdots \otimes a^{j_q} \otimes b_k.$$

Em particular, obtemos a base $\{a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p} \otimes b_k\}$ de $\mathfrak{T}^p(V)$, logo $\dim \mathfrak{T}^p(V;W) = n^p m$. Vamos mostrar como encontrar uma base análoga de $\mathfrak{S}^p(V;W)$ e de $\bigwedge^p(V;W)$.

Proposição 4.5.11. *Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base de V e $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ uma base de W.*

- *Uma base de $\mathfrak{T}^p(V;W)$ é constituída pela família $\mathcal{A}^{\otimes p}\mathcal{B} := \{a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p} \otimes b_k\}$. Equivalentemente, utilizando a Notação 4.5.9, $\mathcal{A}^{\otimes p}\mathcal{B} = \{a_I \otimes b_k\}$, sendo $I \in \mathcal{I}_{n,p}$.*
- *Uma base de $\mathfrak{S}^p(V;W)$ é constituída pela família $\mathcal{A}^{\odot p}\mathcal{B} := \{a_{i_1} \odot \cdots \odot a_{i_p} \otimes b_k\}$, sendo $i_1 \leq \cdots \leq i_p$. Equivalentemente, utilizando a Notação 4.5.9, $\mathcal{A}^{\odot p}\mathcal{B} = \{a_{\odot\alpha} \otimes b_k\}$, sendo $\alpha \in \mathfrak{A}_{n,p}$.*
- *Uma base de $\bigwedge^p(V;W)$ é constituída pela família $\mathcal{A}^{\wedge p}\mathcal{B} := \{a_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_p} \otimes b_k\}$, sendo $i_1 < \cdots < i_p$. Equivalentemente, utilizando a Notação 4.5.9, $\mathcal{A}^{\wedge p}\mathcal{B} = \{a_{\wedge\alpha} \otimes b_k\}$, sendo $\alpha \in \mathfrak{A}^*_{n,p}$.*

Portanto, pela Proposição 4.5.1:

$$\dim \mathfrak{T}^p(V;W) = n^p m; \quad \dim \mathfrak{S}^p(V;W) = \tbinom{p+n-1}{n-1} m; \quad \dim \textstyle\bigwedge^p(V;W) = \tbinom{n}{p} m.$$

Em particular, $\bigwedge^p(V;W) = 0$ para $p > n$.

Demonstração. Já observamos que a família $\mathcal{A}^{\otimes p}\mathcal{B}$ é uma base de $\mathfrak{T}^p(V;W)$ por causa da Proposição 4.2.26 e do Isomorfismo (42). Como $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ são projeções (em particular, são sobrejetoras), as imagens correspondentes de $\mathcal{A}^{\otimes p}\mathcal{B}$ geram respectivamente $\mathfrak{S}^p(V;W)$ e $\bigwedge^p(V;W)$, portanto $\mathcal{A}^{\odot p}\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}^{\wedge p}\mathcal{B}$ são famílias de geradores do espaço vetorial correspondente. Só falta demonstrar que são independentes. Suponhamos que $T := \lambda_k^{\odot\alpha} a_{\odot\alpha} \otimes b_k = 0$. Fixemos $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{k}$. Pela Fórmula (73), temos que $T(a^{\tilde{\alpha}\otimes}) = \lambda_{\tilde{k}}^{\odot\tilde{\alpha}}\, \tilde{\alpha}!\, b_{\tilde{k}}$. Como $T = 0$ por hipótese, necessariamente $\lambda_{\tilde{k}}^{\odot\tilde{\alpha}} = 0$. Dado que isso vale para todos $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{k}$ fixados, $\mathcal{A}^{\odot p}\mathcal{B}$ é independente. O mesmo argumento vale em relação a $\mathcal{A}^{\wedge p}\mathcal{B}$, utilizando a Fórmula (74). □

Corolário 4.5.12. *Se* $\dim V > 0$ *e* $\dim W > 0$*, temos que* $\dim \mathfrak{T}^\bullet(V; W) = \infty$, $\dim \mathfrak{S}^\bullet(V; W) = \infty$ *e* $\dim \bigwedge^\bullet(V; W) = 2^n m$*, sendo* $n = \dim V$ *e* $m = \dim W$.

4.5.3. Determinante e determinante simétrico. Dada uma matriz $A = [\alpha_{ij}] \in M(n; \mathbb{K})$, o *determinante* de A é definido por:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}. \tag{76}$$

Trata-se da única função $\det\colon M(n; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tal que:

(1) det é multilinear nas colunas;
(2) det é antissimétrica nas colunas;
(3) $\det(I_n) = 1$.

De fato, impondo que valham estas propriedades e denotando por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{K}^n$, temos que:

$$\begin{aligned}\det[a_1 \mid \cdots \mid a_n] &= \det[\alpha^{i_1}{}_1 e_{i_1} \mid \cdots \mid a^{i_n}{}_n e_{i_n}] \overset{(1)}{=} \alpha^{i_1}{}_1 \cdots a^{i_n}{}_n \det[e_{i_1} \mid \cdots \mid e_{i_n}] \\ &\overset{(2)}{=} \alpha^{i_1}{}_1 \cdots a^{i_n}{}_n \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \det[e_1 \mid \cdots \mid e_n] \overset{(3)}{=} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \alpha^{i_1}{}_1 \cdots a^{i_n}{}_n,\end{aligned}$$

onde $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ vale 0 se $(i_1, \ldots, i_n)$ não é uma permutação de $(1, \ldots, n)$ e vale $(-1)^\sigma$ se $(i_1, \ldots, i_n) = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ para $\sigma \in S_n$, portanto obtemos (76). É fácil verificar a partir da definição, que $\det(A^T) = \det(A)$, portanto as propriedades (1) e (2) implicam que o determinante é linear e antissimétrico também nas linhas. Ademais, temos que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Dada uma matriz $A = [\alpha_{ij}] \in M(n; \mathbb{K})$, definimos o *determinante simétrico* ou *permanente* de A por:

$$\operatorname{symdet}(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}. \tag{77}$$

Trata-se da única função de $\operatorname{symdet}\colon M(n; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tal que:

(1) symdet é multilinear nas colunas *e nas linhas*;
(2) symdet é simétrica nas colunas;
(3) $\operatorname{symdet}(I_n) = 1$.

De fato, impondo que valham estas propriedades, temos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{symdet}[a_1 \mid \cdots \mid a_n] &= \operatorname{symdet}[\alpha^{i_1}{}_1 e_{i_1} \mid \cdots \mid a^{i_n}{}_n e_{i_n}] \\ &\overset{(1)}{=} \alpha^{i_1}{}_1 \cdots a^{i_n}{}_n \operatorname{symdet}[e_{i_1} \mid \cdots \mid e_{i_n}] \\ &\overset{(1),(2)}{=} \alpha^{i_1}{}_1 \cdots a^{i_n}{}_n |\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}| \det[e_1 \mid \cdots \mid e_n] \\ &\overset{(3)}{=} |\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}| \alpha^{i_1}{}_1 \cdots a^{i_n}{}_n.\end{aligned}$$

Como $|\varepsilon_{i_1\dots i_n}|$ vale 0 se $(i_1,\dots,i_n)$ não é uma permutação de $(1,\dots,n)$ e 1 em caso contrário, obtemos (77). O fato que $\mathrm{symdet}[e_{i_1} \mid \cdots \mid e_{i_n}]$ se anule quando $(i_1,\dots,i_n)$ não é uma permutação de $(1,\dots,n)$ é devido à multi-linearidade nas linhas. De fato, se não for uma permutação, existe um índice $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que j não aparece em $(i_1,\dots,i_n)$, portanto a linha j é nula na matriz $[e_{i_1} \mid \cdots \mid e_{i_n}]$. Por causa da linearidade nas linhas, o determinante simétrico correspondente se anula. Enfim, é fácil verificar a partir da definição que $\mathrm{symdet}(A^T) = \mathrm{symdet}(A)$, portanto a propriedade (2) implica que symdet é simétrico também nas linhas. Contrariamente ao caso antissimétrico, symdet não é multiplicativo.

4.5.4. Potências tensoriais de matrizes. Sejam $A \in M(n,m;\mathbb{K})$ uma matriz e $p \in \mathbb{N}$. Vamos definir as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
&A^{\bar{\otimes}p} \in M(n^p, m^p; \mathbb{K})\\
&A^{\bar{\odot}p} \in M\big(\tbinom{p+n-1}{n-1}, \tbinom{p+m-1}{m-1}; \mathbb{K}\big)\\
&A^{\bar{\wedge}p} \in M\big(\tbinom{n}{p}, \tbinom{m}{p}; \mathbb{K}\big).
\end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 4.5.1 e as bijeções em (70), utilizamos os seguintes conjuntos de índices:

- em relação à matriz $A^{\bar{\otimes}p}$, utilizamos $\mathcal{I}_{n,p}$ como conjunto de índices relativo às linhas e $\mathcal{I}_{m,p}$ como conjunto de índices relativo às colunas;
- em relação à matriz $A^{\bar{\odot}p}$, utilizamos $\mathfrak{A}_{n,p}$ como conjunto de índices relativo às linhas e $\mathfrak{A}_{m,p}$ como conjunto de índices relativo às colunas;
- em relação à matriz $A^{\bar{\otimes}p}$, utilizamos $\mathfrak{A}^*_{n,p}$ como conjunto de índices relativo às linhas e $\mathfrak{A}^*_{m,p}$ como conjunto de índices relativo às colunas.

Seja $A = [x_{ij}]$ e, dados $I \in \mathcal{I}_{n,p}$ e $J \in \mathcal{I}_{m,p}$, seja $A_{IJ} \in M(p;\mathbb{K})$ definida por $(A_{IJ})_{hk} := [x_{i_h j_k}]$. As definições são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&(A^{\bar{\otimes}p})_{IJ} := x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_p j_p}\\
&(A^{\bar{\odot}p})_{\alpha\beta} := \frac{1}{\beta!}\,\mathrm{symdet}(A_{\alpha^{\otimes}\beta^{\otimes}})\\
&(A^{\bar{\wedge}p})_{\alpha\beta} := \det(A_{\alpha^{\otimes}\beta^{\otimes}}).
\end{aligned}$$

Observamos que as entradas de $A^{\bar{\wedge}p}$ são os determinantes das submatrizes de ordem p de A. Em particular, se A for quadrada de ordem n e $p = n$, então $A^{\bar{\wedge}n}$ contém uma única entrada que coincide com $\det(A)$. Podemos afirmar por analogia que as entradas de $A^{\bar{\odot}p}$ são os determinantes simétricos das submatrizes de ordem p de A, mas neste caso não se trata propriamente de submatrizes, pois pode haver índices repetidos. Enfim, o motivo que justifica o termo $\frac{1}{\beta!}$ ficará claro na próxima seção. Poderíamos acrescentar este termo também às entradas de $A^{\bar{\wedge}p}$ para manter a simetria com $A^{\bar{\odot}p}$, mas no caso antissimétrico seria sempre igual a 1.

4.5.5. Funções lineares e mudança de base. Dados dois espaços vetoriais V e W sobre $\mathbb{K}$ e uma função linear $f\colon V \to W$, ficam definidas as seguintes funções lineares para todo $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&(78) \qquad && f^{\otimes p}\colon V^{\otimes p} \to W^{\otimes p} \\
& && v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \mapsto f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_p) \\
&(79) \qquad && f^{\odot p}\colon V^{\odot p} \to W^{\odot p} \\
& && v_1 \odot \cdots \odot v_p \mapsto f(v_1) \odot \cdots \odot f(v_p) \\
&(80) \qquad && f^{\wedge p}\colon V^{\wedge p} \to W^{\wedge p} \\
& && v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \mapsto f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_p).
\end{aligned}$$

Vamos verificar que estão bem definidas. Temos a função entre conjuntos $V^{\times p} \to W^{\times p}, (v_1, \ldots, v_p) \mapsto \big(f(v_1), \ldots, f(v_p)\big)$, que, composta com a projeção $\Pi\colon W^{\times p} \to W^{\otimes p}$, define a função $V^{\times p} \to W^{\otimes p}, (v_1, \ldots, v_p) \mapsto f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_p)$. É imediato verificar que esta função é multilinear, portanto, pela propriedade universal do produto tensor, fica definida a função (78). Segue do Corolário 4.4.20 que a função (78) se restringe às funções (79) e (80).

Fixando uma base $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de V e uma base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ de W, fica definida a matriz representativa $\mu_{\mathcal{AB}}(f) \in M(m, n; \mathbb{K})$. Ademais, pela Proposição 4.5.11 ficam definidas as bases $\mathcal{A}^{\otimes p}$, $\mathcal{A}^{\odot p}$ e $\mathcal{A}^{\wedge p}$ de $\mathfrak{T}^p V$, $\mathfrak{S}^p V$ e $\bigwedge^p V$ respectivamente e as bases correspondentes $\mathcal{B}^{\otimes p}$, $\mathcal{B}^{\odot p}$ e $\mathcal{B}^{\wedge p}$. Portanto, ficam definidas as matrizes representativas $\mu_{\mathcal{A}^{\otimes p}\mathcal{B}^{\otimes p}}(f^{\otimes p})$, $\mu_{\mathcal{A}^{\odot p}\mathcal{B}^{\odot p}}(f^{\odot p})$ e $\mu_{\mathcal{A}^{\wedge p}\mathcal{B}^{\wedge p}}(f^{\wedge p})$.

PROPOSIÇÃO 4.5.13. *Utilizando a notação do parágrafo anterior e da Seção 4.5.4, temos que:*

$$\mu_{\mathcal{A}^{\otimes p}\mathcal{B}^{\otimes p}}(f^{\otimes p}) = \big(\mu_{\mathcal{AB}}(f)\big)^{\bar{\otimes} p} \tag{81}$$

$$\mu_{\mathcal{A}^{\odot p}\mathcal{B}^{\odot p}}(f^{\odot p}) = \big(\mu_{\mathcal{AB}}(f)\big)^{\bar{\odot} p} \tag{82}$$

$$\mu_{\mathcal{A}^{\wedge p}\mathcal{B}^{\wedge p}}(f^{\wedge p}) = \big(\mu_{\mathcal{AB}}(f)\big)^{\bar{\wedge} p}. \tag{83}$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $X := \mu_{\mathcal{AB}}(f) = [x_{ij}]$ e seja $X^{\bar{\otimes} p} = [T_{IJ}]$. Temos que:

$$\begin{aligned}
f^{\otimes p}(a_I) &= f^{\otimes p}(a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p}) = f(a_{i_1}) \otimes \cdots \otimes f(a_{i_p}) \\
&= x^{j_1}{}_{i_1} \cdots x^{j_p}{}_{i_p} b_{j_1} \otimes \cdots \otimes b_{j_p} = T^J{}_I b_J.
\end{aligned}$$

Isso demonstra a Fórmula (81). Consideremos agora a Fórmula (82). Sejam $\alpha \in \mathfrak{A}_{n,p}$ e $I = (i_1, \ldots, i_p) := \alpha^{\otimes}$. Nas seguintes expressões vamos explicitar todos os somatórios, pois tem que ficar claro o conjunto de índices correspondente:

$$\begin{aligned}
f^{\odot p}(a_{\odot\alpha}) &= f^{\odot p}(a_{i_1} \odot \cdots \odot a_{i_p}) = f(a_{i_1}) \odot \cdots \odot f(a_{i_p}) \\
&= \sum_{J \in \mathcal{I}_{m,p}} x^{j_1}{}_{i_1} \cdots x^{j_p}{}_{i_p} b_{j_1} \odot \cdots \odot b_{j_p} \\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{J \in \mathcal{I}^{\leq}_{m,p}} \frac{1}{(J^{\odot})!} \sum_{\sigma \in S_p} x^{j_{\sigma(1)}}{}_{i_1} \cdots x^{j_{\sigma(p)}}{}_{i_p} b_{j_{\sigma(1)}} \odot \cdots \odot b_{j_{\sigma(p)}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{J\in\mathcal{I}^{\leq}_{m,p}} \frac{1}{(J^{\odot})!} \sum_{\sigma\in S_p} {x^{j_{\sigma(1)}}}_{i_1}\cdots {x^{j_{\sigma(p)}}}_{i_p} b_{j_1}\odot\cdots\odot b_{j_p}\\
&= \sum_{J\in\mathcal{I}^{\leq}_{m,p}} \frac{1}{(J^{\odot})!} \Big(\sum_{\sigma\in S_p} {x^{j_{\sigma(1)}}}_{i_1}\cdots {x^{j_{\sigma(p)}}}_{i_p}\Big) b_{j_1}\odot\cdots\odot b_{j_p}\\
&= \sum_{J\in\mathcal{I}^{\leq}_{m,p}} \frac{1}{(J^{\odot})!}\operatorname{symdet}({X^J}_I) b_{\odot J^{\odot}}\\
&= \sum_{\beta\in\mathfrak{A}_{m,p}} \frac{1}{(J^{\odot})!}\operatorname{symdet}({X^{\beta^{\otimes}}}_{\alpha^{\otimes}}) b_{\odot\beta} = \sum_{\beta\in\mathfrak{A}_{m,p}} {(X^{\bar{\odot}p})^{\beta}}_{\alpha} b_{\odot\beta}.
\end{aligned}
$$

Para justificar a igualdade ($\star$), observamos que todo elemento $J\in\mathcal{I}_{m,p}$ pode ser obtido aplicando uma permutação $\sigma\in S_p$ a $J^{\leq}\in\mathcal{I}^{\leq}_{m,p}$, mas os elementos de $(S_p)_J$, que são $(J^{\odot})!$ pela Proposição 4.5.6, induzem o mesmo índice. Isso demonstra a Fórmula (82). Consideremos agora a Fórmula (83). Sejam $\alpha\in\mathfrak{A}^*_{n,p}$ e $I=(i_1,\ldots,i_p):=\alpha^{\otimes}$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
f^{\wedge p}(a_{\wedge\alpha}) &= f^{\wedge p}(a_{i_1}\wedge\ldots\wedge a_{i_p}) = f(a_{i_1})\wedge\ldots\wedge f(a_{i_p})\\
&= \sum_{J\in\mathcal{I}_{m,p}} {x^{j_1}}_{i_1}\cdots {x^{j_p}}_{i_p} b_{j_1}\wedge\ldots\wedge b_{j_p}\\
&\overset{(\star\star)}{=} \sum_{J\in\mathcal{I}^{<}_{m,p}}\sum_{\sigma\in S_p} {x^{j_{\sigma(1)}}}_{i_1}\cdots {x^{j_{\sigma(p)}}}_{i_p} b_{j_{\sigma(1)}}\wedge\ldots\wedge b_{j_{\sigma(p)}}\\
&= \sum_{J\in\mathcal{I}^{<}_{m,p}}\sum_{\sigma\in S_p} {x^{j_{\sigma(1)}}}_{i_1}\cdots {x^{j_{\sigma(p)}}}_{i_p} (-1)^{\sigma} b_{j_1}\wedge\ldots\wedge b_{j_p}\\
&= \sum_{J\in\mathcal{I}^{<}_{m,p}}\Big(\sum_{\sigma\in S_p} (-1)^{\sigma}{x^{j_{\sigma(1)}}}_{i_1}\cdots {x^{j_{\sigma(p)}}}_{i_p}\Big) b_{j_1}\wedge\ldots\wedge b_{j_p}\\
&= \sum_{J\in\mathcal{I}^{<}_{m,p}} \det({X^J}_I) b_{\wedge J^{\wedge}} = \sum_{\beta\in\mathfrak{A}^*_{m,p}} \det({X^{\beta^{\otimes}}}_{\alpha^{\otimes}}) b_{\wedge\beta} = \sum_{\beta\in\mathfrak{A}^*_{m,p}} {(X^{\bar{\wedge}p})^{\beta}}_{\alpha} b_{\wedge\beta}.
\end{aligned}
$$

Para justificar a igualdade ($\star\star$), observamos que no somatório anterior só os índices $J\in\mathcal{I}^*_{m,p}$ são significativos; além disso, todo elemento $J\in\mathcal{I}^*_{m,p}$ pode ser obtido de modo único aplicando uma permutação $\sigma\in S_p$ a $J^{<}\in\mathcal{I}^{<}_{m,p}$. Isso demonstra a Fórmula (83). □

Dadas duas bases $\mathcal{A}=\{a_1,\ldots,a_n\}$ e $\mathcal{B}=\{b_1,\ldots,b_n\}$ de V, fica definida a matriz de mudança de base $\mu(\mathcal{A},\mathcal{B})$, a qual coincide com a matriz $\mu_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f)$, sendo $f\colon V\to V$ o automorfismo tal que $f(a_i)=b_i$. Portanto, obtemos facilmente o seguinte corolário.

COROLÁRIO 4.5.14. *Utilizando a notação do parágrafo anterior e da Proposição 4.5.13, temos que:*

$$
\mu(\mathcal{A}^{\otimes p},\mathcal{B}^{\otimes p}) = \mu(\mathcal{A},\mathcal{B})^{\bar{\otimes}p} \tag{84}
$$

$$\mu(\mathcal{A}^{\odot p}, \mathcal{B}^{\odot p}) = \mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})^{\bar{\odot} p} \tag{85}$$

$$\mu(\mathcal{A}^{\wedge p}, \mathcal{B}^{\wedge p}) = \mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})^{\bar{\wedge} p}. \tag{86}$$

4.5.6. Produto escalar ou Hermitiano. Sejam V um espaço vetorial real dotado de um produto interno ou um espaço vetorial complexo dotado de um produto Hermitiano. Fica induzido o seguinte produto interno ou Hermitiano em $V^{\otimes p}$:

$$\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_p, w_1 \otimes \cdots \otimes w_p \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle \cdots \langle v_p, w_p \rangle.$$

Seja $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base ortonormal de V. Temos que $\mathcal{A}^{\otimes p}$ é uma base ortonormal de $V^{\otimes p}$. Restringindo este produto a $V^{\odot m}$, uma base ortonormal é $\{\frac{1}{\sqrt{m!\alpha!}} e_\alpha\}$. De fato:

$$\begin{aligned}
\langle e_I, e_{J^\odot} \rangle &= \sum_{\sigma \in S_m} \langle e_I, e_{J^\sigma} \rangle \overset{(\text{lema } 4.5.7)}{=} (I^\odot)! \delta_{I^\odot J^\odot} \\
\langle e_{I^\odot}, e_{J^\odot} \rangle &= \sum_{\sigma \in S_m} \langle e_{I^\odot}, e_{J^\odot} \rangle = \sum_{\sigma \in S_m} (I^\odot)! \delta_{(I^\sigma)^\odot J^\odot} = m!(I^\odot)! \delta_{I^\odot J^\odot}.
\end{aligned}$$

Por isso, $\|\mathcal{S}(e_I)\| = \|\frac{1}{m!} e_{I^\odot}\| = \sqrt{\frac{\alpha!}{m!}}$. Analogamente, restringindo o produto a $V^{\wedge m}$, uma base ortonormal é $\{\frac{1}{\sqrt{m!}} e_\alpha\}$. De fato, dados $I, J \in \mathcal{I}^*_{m,n}$, chamamos de $\varepsilon(I,J)$ o seguinte valor: se existe uma permutação $\sigma \in S_m$ tal que $J = I^\sigma$, então $\varepsilon(I,J) = (-1)^\sigma$, se não $\varepsilon(I,J) = 0$. Temos que $|\varepsilon(I,J)| = \delta_{I^\odot J^\odot}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\langle e_I, e_{J^\wedge} \rangle &= \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma \langle e_I, e_{J^\sigma} \rangle \overset{(\text{lema } 4.5.7)}{=} \varepsilon(I,J) \\
\langle e_{I^\wedge}, e_{J^\wedge} \rangle &= \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma \langle e_{I^\sigma}, e_{J^\wedge} \rangle = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma \varepsilon(I^\sigma, J) = m! \varepsilon(I,J).
\end{aligned}$$

Temos que fazer um comentário: o resultado $\varepsilon(I,J)$ depende de I e J, enquanto partimos de $I^\wedge$ e $J^\wedge$. Isso é devido ao fato que $e_{I^\wedge}$ pode mudar de sinal dependendo de I: de fato, por exemplo, $e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2$, enquanto $e_2 \odot e_1 = e_1 \odot e_2$. Como uma base de $V^{\lambda m}$ é $\{e_I\}_{I \in \mathcal{I}^<_{n,m}}$, consideramos por hipótese índices com entradas crescentes, portanto $\varepsilon(I,J)$ só pode ser 0 ou 1.

Pelo resultado precedente, $\|\mathcal{A}(e_I)\| = \|\frac{1}{m!} e_{I^\wedge}\| = \frac{1}{\sqrt{m!}}$. Observamos que, contrariamente ao caso simétrico, o coeficiente $\frac{1}{m!}$ não depende de I ou de α, portanto a base $\{e_I\}$ não é normal só por um fator multiplicativo comum. Trata-se portanto de uma dilatação, pelo fator $\sqrt{m!}$, de uma base ortonormal. É claro que, se considerássemos a soma direta a respeito de m, o fator de dilatação dependeria do grau.

Temos que:

$$\langle L^{\otimes m} e_I, e_J \rangle = \langle \alpha^{k_1}_{i_1} \cdots \alpha^{k_m}_{i_m} e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_m}, e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_m} \rangle = \alpha^{j_1}_{i_1} \cdots \alpha^{j_m}_{i_m}.$$

Isso confirma que a matriz representativa de $L^{\otimes m}$ é $A^{\otimes m}$. Podemos calcular de modo análogo as matrizes $A^{\odot m}$ e $A^{\wedge m}$. Temos que:

$$\langle L^{\odot m} e_I, e_J \rangle = \langle \alpha^{k_1}_{i_1} \cdots \alpha^{k_m}_{i_m} e_{k_1} \odot \cdots \odot e_{k_m}, e_{j_1} \odot \cdots \odot e_{j_m} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{K\in\mathcal{I}_{n,m}} \alpha_{i_1}^{k_1}\cdots\alpha_{i_m}^{k_m} m!(J^{\odot})!\delta_{K^{\odot}J^{\odot}} \\
&= \sum_{K\in\mathcal{I}_{n,m}^{\leq}} \frac{1}{(K^{\odot})!}\sum_{\sigma\in S_m} \alpha_{i_1}^{k_{\sigma(1)}}\cdots\alpha_{i_m}^{k_{\sigma(m)}} m!(J^{\odot})!\delta_{K^{\odot}J^{\odot}} \\
&= \frac{1}{(J^{\odot})!}\sum_{\sigma\in S_m} \alpha_{i_1}^{j_{\sigma(1)}}\cdots\alpha_{i_m}^{j_{\sigma(m)}} m!(J^{\odot})! \\
&= m!\mathrm{symdet}(A_I^J).
\end{aligned}$$

Considerando os fatores de normalização, temos que, se $L^{\odot m}e_I = \nu_I^J e_J$, então $\langle L^{\odot m}e_I, e_J\rangle = \langle \nu_I^K e_K, e_J\rangle = \nu_I^J m!(J^{\odot})!$, portanto:

$$\nu_I^J = \frac{1}{m!(J^{\odot})!}\langle L^{\odot m}e_I, e_J\rangle = \frac{1}{(J^{\odot})!}\mathrm{symdet}(A_I^J).$$

Analogamente, temos que:

$$\begin{aligned}
\langle L^{\wedge m}e_I, e_J\rangle &= \langle \alpha_{i_1}^{k_1}\cdots\alpha_{i_m}^{k_m} e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_m}, e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_m}\rangle \\
&= \sum_{K\in\mathcal{I}_{n,m}} \alpha_{i_1}^{k_1}\cdots\alpha_{i_m}^{k_m} m!\varepsilon(K,J) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{I}_{n,m}^{<}}\sum_{\sigma\in S_m} \alpha_{i_1}^{k_{\sigma(1)}}\cdots\alpha_{i_m}^{k_{\sigma(m)}} m!(-1)^{\sigma}\delta_{KJ} \\
&= m!\det(A_I^J).
\end{aligned}$$

Considerando os fatores de normalização, temos que, se $L^{\wedge m}e_I = \gamma_I^J e_J$, então $\langle L^{\wedge m}e_I, e_J\rangle = \langle \gamma_I^K e_K, e_J\rangle = \gamma_I^J m!$, portanto:

$$\gamma_I^J = \frac{1}{m!}\langle L^{\wedge m}e_I, e_J\rangle = \det(A_I^J).$$

4.5.7. Potência simétrica e polinômios. Dado um espaço vetorial V de dimensão n, uma função $f : V \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é dita *polinomial de grau* m se, para toda base $\mathcal{A} = \{e_1,\dots,e_n\}$ de V fixada, existe um polinômio $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ ou $p \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ de grau m tal que $f(x_1a_1 + \cdots + x_na_n) = p(x_1,\dots,x_n)$. É claro que a existência de p e o seu grau não dependem da base $\mathcal{A}$ fixada, pois, se fixamos a base $\mathcal{B} = \{f_1,\dots,f_m\}$, tal que a matriz de mudança de base de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ é $A = [\alpha_i^j]$, obtemos o polinômio $\tilde{p}(y_1,\dots,y_n) = p(\alpha_1^{i_1}y_{i_1},\dots,\alpha_1^{i_n}y_{i_n})$. Em particular, se p for homogêneo também $\tilde{p}$ é, portanto podemos definir uma função $f : V \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ *polinomial homogênea de grau* m se o polinômio que a representa a respeito de qualquer base é homogêneo de grau m. Essas funções formam um espaço vetorial, que indicamos por $PolH_m(V)$.

Há um isomorfismo canônico de espaços vetoriais entre $V^{\odot m}$ e $PolH_m(V^*)$, que, para uma base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de V fixada, é dado por:

$$\begin{aligned}
\Phi\colon V^{\odot m} &\xrightarrow{\simeq} PolH_m(V^*) \\
e_{i_1}\odot\cdots\odot e_{i_m} &\mapsto (x_1e^1 + \cdots + x_ne^n \mapsto x_{i_1}\cdots x_{i_m}).
\end{aligned} \tag{87}$$

A função Φ é bem definida, pois a imagem de $e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_m}$ não depende da ordem de $(i_1, \ldots, i_m)$. É claramente linear, pois é definida sobre uma base e extensa por linearidade. Uma base de $PolH_m(V^*)$ é formada pelas funções da forma $x_1 e^1 + \cdots + x_n e^n \mapsto x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, sendo $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$. Isso mostra que $\dim PolH_m(V^*) = \binom{m+n-1}{n-1} = \dim V^{\odot m}$ e que Φ é sobrejetora, portanto é um isomorfismo. Enfim, é um isomorfismo canônico. De fato, consideremos outra base $\{f_1, \ldots, f_n\}$, tal que $e_i = \alpha_i^j f_j$ e $f_i = \tilde{\alpha}_i^j e_j$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(f_{i_1} \odot \cdots \odot f_{i_m})(x_1 f^1 + \cdots + x_m f^m) \\
&\qquad = \Phi(\tilde{\alpha}_{i_1}^{j_1} e_{j_1} \odot \cdots \odot \tilde{\alpha}_{i_m}^{j_m} e_{j_m})(x_1 \alpha_{k_1}^1 e^{k_1} + \cdots + x_m \alpha_{k_m}^m e^{k_m}) \\
&\qquad = \tilde{\alpha}_{i_1}^{j_1} \cdots \tilde{\alpha}_{i_m}^{j_m} \Phi(e_{j_1} \odot \cdots \odot e_{j_m})(x_{h_1} \alpha_1^{h_1} e^1 + \cdots + x_{h_m} \alpha_m^{h_m} e^m) \\
&\qquad = \tilde{\alpha}_{i_1}^{j_1} \cdots \tilde{\alpha}_{i_m}^{j_m} x_{h_{j_1}} \alpha_{j_1}^{h_{j_1}} \cdots x_{h_{j_m}} \alpha_{j_m}^{h_{j_m}} \\
&\qquad = \delta_{i_1}^{h_{j_1}} \cdots \delta_{i_m}^{h_{j_m}} x_{h_{j_1}} \cdots x_{h_{j_m}} = x_{i_1} \cdots x_{i_m}.
\end{aligned}
$$

CAPíTULO 5

Preliminares de Cálculo

Afirmamos na introdução que a Topologia Diferencial estuda as variedades suaves, ou seja, os espaços que localmente "se parecem" com um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Por este motivo são os objetos geométricos naturais em que é possível aplicar as ferramentas fundamentais do Cálculo Diferencial. Vamos agora relembrar algumas destas ferramentas, que serão usadas frequentemente no Volume I.

5.1. Funções diferenciáveis

Neste capítulo denotaremos por V e W dois espaços de Banach de dimensão finita e denotaremos por $B_\varepsilon(x)$ a bola de raio ε e centro x no espaço correspondente. Ademais, subentenderemos que $\mathbb{R}^n$ seja dotado da Norma e da Topologia Euclidianas.

Definição 5.1.1. Sejam $\Omega \subset V$ um subconjunto aberto, $f\colon \Omega \to W$ uma função e $x \in \Omega$. Fixemos um valor $\varepsilon > 0$ qualquer tal que $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$. A função f é dita *diferenciável* em x se existe uma função linear $df_x\colon V \to W$ tal que, para todo $h \in B_\varepsilon(0)$:

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(\|h\|) \tag{88}$$

onde $o(\|h\|)$ denota qualquer função $\varphi(h)\colon B_\varepsilon(0) \to W$ tal que $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0$. A função linear df_x é dita *diferencial* de f em x. $\diamondsuit$

Fixado um vetor não nulo $v \in V$ e usando as mesmas notações da Definição 5.1.1, a *derivada direcional* de f ao longo de v em $x \in \Omega$ é definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Proposição 5.1.2. *Se f for diferenciável em x, então a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ existe para todo v e coincide com $df_x(v)$.*

Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$. Denotamos por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e por $f_j\colon U \to \mathbb{R}$ a componente j-ésima da função f. A derivada direcional ao longo de e_i em x é dita *derivada parcial* i-ésima de f em x e se denota por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Fica definida a *matriz jacobiana* $Jf(x)$, real de m linhas e n colunas, cuja entrada (i,j) é a derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$. Se existir, o diferencial df_x é representado a respeito das bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ pela matriz jacobiana em x. A mesma construção vale para V e W genéricos, fixando uma base em cada um dos dois.

Notação 5.1.3. Seja $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e seja $n = p + q$. Dado um ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$, sendo $x_0 \in \mathbb{R}^p$ e $y_0 \in \mathbb{R}^q$, escolhamos uma vizinhança $A \times B \subset \Omega$ de (x_0, y_0), sendo $A \subset \mathbb{R}^p$ e $B \subset \mathbb{R}^q$. Denotamos por $(d_y f)_{(x_0,y_0)}\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$ o *diferencial parcial* de f a respeito de y em (x_0, y_0), isto é, o diferencial da função $f_{x_0}\colon A \to \mathbb{R}^m$, $y \mapsto f(x_0, y)$, no ponto y_0. Logo, $(d_y f)_{(x_0,y_0)} = d(f_{x_0})_{y_0}$. Quando $q = 1$, temos que $(d_y f)_{(x_0,y_0)}(h) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot h$, sendo $h \in \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

5.1.1. Norma operacional. Seja $L(V, W)$ o espaço vetorial das funções lineares de V a W. Fixando uma base de V e uma de W, este espaço é canonicamente isomorfo ao espaço das matrizes reais de m linhas e n colunas e se torna um espaço de Banach de dimensão finita com a seguinte definição:

$$\|A\| := \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|. \tag{89}$$

Proposição 5.1.4. *A Função* (89)*, de* $L(V, W)$ *a* $\mathbb{R}^{\geq 0}$*, é uma norma em* $L(V, W)$ *e satisfaz as seguintes propriedades:*

- $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ *para todo* $x \in V$*;*
- $\|A\|$ *é o mínimo número* $\alpha \geq 0$ *tal que* $\|Ax\| \leq \alpha\|x\|$ *para todo* $x \in V$*;*
- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ *para todos* $A \in L(V, W)$ *e* $B \in L(U, V)$*.*[1]

Demonstração. É claro que $\|A\| \geq 0$ para todo A e que $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$, por causa das propriedades análogas da norma de W. Ademais, se $\|A\| = 0$, então $\|Ax\| = 0$ para todo x tal que $\|x\| = 1$, logo, por linearidade, $A = 0$. Dado $x \in V$ diferente de 0, seja $u := \frac{x}{\|x\|}$. Como $\|u\| = 1$, pela Definição (89) temos que $\|Au\| \leq \|A\|$, logo $\|Ax\| = \|x\| \cdot \|Au\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Isso demonstra o primeiro item do enunciado. Ademais, se $\|Ax\| \leq \alpha\|x\|$, então, para $\|u\| = 1$, temos que $\|Au\| \leq \alpha$, logo $\|A\| \leq \alpha$. Isso demonstra o seguindo item. Enfim, $\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$, portanto, pelo segundo item, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Isso demonstra que (89) é uma norma. Analogamente, $\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$, logo, pelo segundo item, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. $\square$

O espaço $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{nm}$, portanto poderíamos considerar a Norma Euclidiana. Por causa do Lema 1.5.6 a topologia induzida seria a mesma, porém não valeriam as propriedades enunciadas na Proposição 5.1.4. O mesmo vale para V e W genéricos, fixando uma base de V e uma de W.

Quando $V = W$, denotamos $L(V, V)$ também por $L(V)$. Neste caso fica definida a composição de operadores internamente a $L(V)$ e existe o operador identidade I, portanto um operador pode ser inversível.

Proposição 5.1.5. *Seja* $A \in L(V)$*. Se* $\|A\| < 1$*, o operador* $I - A$ *é inversível, sendo* $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$*.*

Demonstração. Observamos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ é convergente pelo Teorema 1.5.9. De fato, pelo terceiro item da Proposição 5.1.4 temos que $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, portanto $\sum_{n=0}^{+\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}$. Como $L(V)$ é um espaço de Banach,

[1] Obviamente estamos denotando por U outro espaço de Banach de dimensão finita.

obtemos a tese. Só falta demonstrar que $(I - A) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} A^n = I$. A soma parcial n-ésima coincide com $I - A^{n+1}$, portanto devemos provar que $(I - A^{n+1}) - I \to 0$, ou seja, $A^{n+1} \to 0$. Isso segue do fato que $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$. □

Denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ o subconjunto de $L(V)$ formado pelos operadores inversíveis e definimos $\mathrm{GL}(n) := \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Corolário 5.1.6. *Seja $A \in \mathrm{GL}(V)$ inversível e seja $B \in L(V)$ tal que $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Então $B \in \mathrm{GL}(V)$. Em particular, isso demostra que $\mathrm{GL}(V)$ é aberto em $L(V)$.*

Demonstração. Seja $C = A - B$, logo $B = A - C = A(1 - A^{-1}C)$. Temos que $\|A^{-1}C\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|C\| < 1$, logo fica bem definido $B^{-1} = (1 - A^{-1}C)^{-1}A^{-1} = \big(\sum_{n=0}^{+\infty}(A^{-1}C)^n\big)A^{-1}$. □

Denotamos por $L^k(V, W)$ o espaço vetorial das funções multi-lineares de $V \times \cdots \times V$ (k vezes) a W. Este espaço tem uma norma natural, definida por indução a partir de (89). De fato, $L^k(V, W) \simeq L(V, L^{k-1}(V, W))$, portanto podemos aplicar a definição (89), sendo $L^{k-1}(V, W)$ o espaço W da definição. A norma obtida desta maneira coincide com:

$$\|A\| := \max_{\|x_1\| = \cdots = \|x_k\| = 1} \|A(x_1, \ldots, x_k)\|. \tag{90}$$

5.1.2. Diferenciais de ordem superior. Sejam $\Omega \subset V$ um subconjunto aberto e $f \colon \Omega \to W$ uma função. Se f for diferenciável em todo ponto de Ω, fica definida a função, dita *diferencial* de f:

$$\begin{aligned} df \colon \Omega &\to L(V, W) \\ x &\mapsto df_x. \end{aligned}$$

Pode acontecer que df seja diferenciável em um ponto $x \in \Omega$. Neste caso fica definido o *diferencial segundo* $d^2 f_x := d(df)_x \colon V \to L(V, W)$. Equivalentemente, $d^2 f_x \in L^2(V, W)$. Se df for diferenciável em todo ponto de Ω, fica definida a função $d^2 f \colon \Omega \to L^2(V, W)$, $x \mapsto d^2 f_x$. Considerando a Norma (90) em $L^2(V, W)$, pode acontecer que $d^2 f$ seja diferenciável em $x \in \Omega$, definindo $d^3 f_x := d(d^2 f)_x \in L^3(V, W)$ e assim por diante. Para utilizar uma notação uniforme, definimos $d^0 f := f$ e $L^0(V, W) := W$.

Definição 5.1.7. Sejam $\Omega \subset V$ um subconjunto aberto e $f \colon \Omega \to W$. A função f é dita:

- *k vezes diferenciável* se $d^i f \colon \Omega \to L^i(V, W)$ existe para $0 \leq i \leq k$;
- *de classe C^k* se for k vezes diferenciável e $d^k f \colon \Omega \to L^k(V, W)$ for contínuo;
- *de classe C^∞* ou *suave* se for de classe C^k para todo $k \in \mathbb{N}$. ♢

Definição 5.1.8. Sejam $\Omega, \Theta \subset V$ subconjuntos abertos. Uma função $f \colon \Omega \to \Theta$ é dita *difeomorfismo* se é suave, é bijetora e f^{-1} é suave. ♢

Fixados k vetores não nulos $v_1, \dots, v_k \in V$, a *derivada direcional k-ésima* de f ao longo de $v_1, \dots, v_k$ em x é definida por:

$$\frac{\partial^k f}{\partial v_k \cdots \partial v_1}(x) := \frac{\partial}{\partial v_k} \cdots \frac{\partial}{\partial v_1} f(x). \tag{91}$$

Para que esta derivada faça sentido, as derivadas $\frac{\partial^i f}{\partial v_i \cdots \partial v_1}$, para $0 \leq i < k$, têm que estar definidas em uma vizinhança de x.

Proposição 5.1.9. *Se f for de classe C^{k-1} em uma vizinhança de x e $d^k f_x$ estiver definido, então a derivada direcional* (91) *existe para todos $v_1, \dots, v_k \in V$ e coincide com $d^k f_x(v_k, \dots, v_1)$.*

Proposição 5.1.10. *Se $d^k f$ estiver definido em uma vizinhança de x e for contínuo em x, então as derivadas direcionais comutam, ou seja, para toda permutação $\sigma \in S_k$, temos que $d^k f_x(v_k, \dots, v_1) = d^k f_x(v_{\sigma(k)}, \dots, v_{\sigma(1)})$. Em particular, isso vale se f for de classe C^k em uma vizinhança de x.*

Seja $V = \mathbb{R}^n$ e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica. A derivada direcional ao longo de $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ em x é dita *derivada parcial k-ésima* de f em x ao longo de $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ e se denota por $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x)$. Se $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$, o diferencial $d^k f_x$, caso exista, é representado a respeito das bases canônicas pelo tensor cuja entrada $(i_1, \dots, i_k, j)$ é a derivada parcial k-ésima $\frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x)$. Se $d^k f$ estiver definido em uma vizinhança de x e for contínuo em x, então este tensor é simétrico nas entradas $i_1, \dots, i_k$. Em particular, para $k = 2$ e $m = 1$ obtemos uma função bilinear real representada pela *matriz hessiana* $Hf(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right]$.

Proposição 5.1.11. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$. A função f é de classe C^k em Ω se, e somente se, todas as derivadas parciais de ordem i, sendo $0 \leq i \leq k$, estão definidas e são contínuas em Ω. Em particular, f é de classe C^∞ se, e somente se, as derivadas parciais de qualquer ordem estão definidas em todo ponto de Ω.*

A mesma construção vale para V e W genéricos, fixando uma base em cada um dos dois.

5.1.3. Formula de Taylor. A Fórmula de Taylor pode ser enunciada com Resto de Peano ou com Resto de Lagrange. Para nós será útil a segunda possibilidade. Nesta seção, dados dois pontos $a, b \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $[a, b]$ o segmento fechado que une a a b e por (a, b) o segmento aberto correspondente.

Teorema 5.1.12 (Formula de Taylor com resto de Lagrange). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^{k+1}, sendo $k \geq 0$. Sejam $x \in \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^n$ tais que $[x, x+h] \subset \Omega$. Existe $\xi \in (0, 1)$ tal que:*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} d^i f_x(h) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f_{x+\xi h}(h) \tag{92}$$

onde $d^i f_x(h) = d^i f_x(h, \dots, h)$, sendo o numero de entradas igual a i.

DEMONSTRAÇÃO. Sendo Ω aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon h, x+(1+\varepsilon)h) \subset \Omega$. Consideremos a função $\varphi\colon (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x+th)$. Esta função é de classe C^{k+1}, sendo $\varphi^{(i)}(t) = d^i f_{x+th}(h)$. Pela Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange em uma variável, existe $\xi \in (0,1)$ tal que $\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}\varphi^{(k+1)}(\xi)$, o que equivale à Fórmula (92). □

COROLÁRIO 5.1.13. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^{k+1}, sendo $k \geq 0$. Seja $K \subset \Omega$ um subconjunto compacto. Existe uma constante $\lambda > 0$ tal que, para todos $x, h \in \mathbb{R}^n$ tais que $[x, x+h] \subset K$:*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} d^i f_x(h) + R(h), \qquad \|R(h)\| \leq \lambda \|h\|^{k+1}. \tag{93}$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam:

$$\lambda_j := \frac{1}{(k+1)!} \max_{y \in K} \|d^{k+1}(f_j)_y\| \qquad \lambda := \sqrt{m} \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}.$$

Pela Fórmula (92), temos que $R_j(h) = \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1}(f_j)_{x+\xi h}(h)$, logo:

$$|R_j(h)| \leq \frac{1}{(k+1)!} \|d^{k+1}(f_j)_{x+\xi h}\| \cdot \|h\|^{k+1} \leq \lambda_j \|h\|^{k+1}.$$

Portanto, $\|R(h)\| \leq \sqrt{m} \max\{|R_1(h)|, \ldots, |R_m(h)|\} \leq \lambda \|h\|^{k+1}$. □

5.1.4. Teorema do Incremento Finito. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e uma função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, diferenciável em (a,b), pelo Teorema de Lagrange existe $\xi \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, ou seja, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(\xi, f(\xi))$ é paralela à reta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Um resultado análogo vale para funções de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Dados um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dois pontos $a, b \in \Omega$ tais que $[a,b] \subset \Omega$ e uma função diferenciável $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, podemos considerar a função $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) := f(a + t(b-a))$. Pelo Teorema de Lagrange existe $\xi \in (0,1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(\xi)$, ou seja, $f(b) - f(a) = \langle \nabla f(a + \xi(b-a)), (b-a) \rangle$. Isso mostra que existe um ponto $\eta \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = \langle \nabla f(\eta), (b-a) \rangle$.

Quando o contra-domínio for $\mathbb{R}^m$, com $m \geq 2$, esse resultado só pode ser generalizado através de uma desigualdade.

TEOREMA 5.1.14 (Teorema do Incremento Finito). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in \Omega$ tais que $[a,b] \subset \Omega$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1. Temos que:*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \cdot \max_{\xi \in [a,b]} \|df_\xi\|.$$

DEMONSTRAÇÃO. Comecemos supondo que $n = 1$, logo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Seja $v := f(b) - f(a) \in \mathbb{R}^m$ e consideremos a função de classe C^1 $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle f(x), v \rangle$. Pelo Teorema de Lagrange existe $\xi \in (a,b)$ tal que $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b-a)$, ou seja, $\langle v, v \rangle = \langle f'(\xi), v \rangle (b-a)$, logo $\|v\|^2 = |\langle f'(\xi), v \rangle| \cdot |b-a|$. Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwartz obtemos que $\|v\| \leq \|f'(\xi)\| \cdot |b-a|$, ou seja, $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(\xi)\| \cdot |b-a|$. Sendo $\|f'(\xi)\| \leq \max_{\eta \in [a,b]} \|f'(\eta)\|$, obtemos a tese.

Para n genérico, consideremos a função $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto f(a+t(b-a))$. Acabamos de demonstrar que $\|h(1)-h(0)\| \leq \max_{\xi\in[0,1]}\|h'(\xi)\|$. Claramente $h'(\xi) = df_{a+\xi(b-a)}(b-a)$, logo $\|h'(\xi)\| \leq \|df_{a+\xi(b-a)}\| \cdot \|b-a\|$, portanto $\max_{\xi\in[0,1]}\|h'(\xi)\| \leq \max_{\eta\in[a,b]}\|df_\eta\| \cdot \|b-a\|$. Com isso obtemos a tese. □

5.2. Teorema da Função Implícita

Consideremos a função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y - 4x$. O conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $F(x,y) = 0$ coincide com o gráfico da função $y = 4x$ de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Por isso, dizemos que a função $y = 4x$ é *definida implicitamente* pela função F explicitando a variável y. Analogamente, o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $F(x,y) = 0$ coincide com o gráfico da função $x = \frac{1}{4}y$ de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, portanto a função $x = \frac{1}{4}y$ é definida implicitamente pela função F explicitando a variável x.

Consideremos agora a função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. Neste caso não podemos tornar explícita nem x nem y globalmente, pois o conjunto dos pontos em que F se anula é S^1, o qual não é nem o gráfico de uma função $y = f(x)$ nem o gráfico de uma função $x = g(y)$. Todavia, consideremos os seguintes pontos:

- seja $a := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in S^1$. O conjunto $\Omega \times \Theta := (0,1) \times (0,1)$ é uma vizinhança aberta de a em $\mathbb{R}^2$. Seja $X = \{(x,y) \in \Omega \times \Theta : F(x,y) = 0\}$. O conjunto X é o gráfico da função $y = \sqrt{1-x^2}$ e da função $x = \sqrt{1-y^2}$, portanto, neste caso, F define implicitamente uma função $y = f(x)$ de Ω a Θ e um função $x = g(y)$ de Θ a Ω. Uma situação análoga ocorre em todos os pontos $a \in S^1$ diferentes de $(\pm1, 0)$ e $(0, \pm1)$, escolhendo uma vizinhança $\Omega \times \Theta$ adequada.
- Seja $a := (0,1)$. Se fixamos a vizinhança aberta $\Omega \times \Theta = (-1,1) \times (0,2)$, a função F define implicitamente a função $y = \sqrt{1-x^2}$ de Ω a Θ, mas não define nenhuma função $x = g(y)$, pois, qualquer seja a vizinhança $\Omega \times \Theta$ escolhida, para $y \in (1-\varepsilon, 1)$ há dois valores possíveis de x, enquanto, para $y \in (1, 1+\varepsilon)$, não há nenhum valor possível. O mesmo acontece em $a := (0,-1)$.
- Seja $a := (1,0)$. Se fixamos a vizinhança aberta $\Omega \times \Theta = (0,2) \times (-1,1)$, a função F define implicitamente a função $x = \sqrt{1-y^2}$ de Θ a Ω, mas não define nenhuma função $y = f(x)$. O mesmo acontece em $a := (-1,0)$.

Portanto, nos pontos $(\pm1, 0)$ só podemos explicitar localmente x em função de y; nos pontos $(0, \pm1)$ só podemos explicitar localmente y em função de x; nos demais pontos podemos explicitar localmente y e x. Observamos que os pontos $(\pm1, 0)$ são aqueles em que $\partial_y F = 0$ e os pontos $(0, \pm1)$ são aqueles em que $\partial_x F = 0$. Logo, quando $F(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$, podemos explicitar localmente y em função de x e, quando $F(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_x F(x_0, y_0) \neq 0$, podemos explicitar localmente x em função de y. O motivo é o seguinte. Quando, por exemplo, $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$, ao longo da reta $x = x_0$ a função F é crescente ou decrescente no ponto y_0, portanto, como $F(x_0, y_0) = 0$, em uma vizinhança de y_0 o único ponto da reta $x = x_0$ em que F se anula é y_0. Isso vale por continuidade em uma vizinhança $\Omega \times \Theta$ de (x_0, y_0)

em $\mathbb{R}^2$, logo, para todo ponto de Ω fixado, a função F só se anula em um ponto de Θ, definindo implicitamente uma função $f\colon \Omega \to \Theta$.

Este argumento, baseado na monotonia de F ao longo de uma reta, pode ser formalizado rigorosamente, mas só vale quando o contra-domínio de F for $\mathbb{R}$. Se considerarmos uma função $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, queremos encontrar uma condição que permita explicitar localmente $y \in \mathbb{R}^m$ em função de $x \in \mathbb{R}^n$ em um ponto onde $F(x_0, y_0) = 0$, ou vice-vera considerando $G\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Quando $m = 1$ a condição é $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$, portanto isso sugere que, em geral, devemos pedir que $(d_y F)_{(x_0,y_0)}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ seja inversível (v. Notação 5.1.3). Esta é a condição correta, mas, como $\mathbb{R}^m$ não é ordenado para $m \geq 2$, é necessário encontrar uma demonstração que não se baseie na monotonia de F.

DEFINIÇÃO 5.2.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos abertos e seja $F\colon \Omega \times \Theta \to \mathbb{R}^m$ uma função. Dizemos que F *define implicitamente* a função $f\colon \Omega \to \Theta$ se para todo $x \in \Omega$ existe único $y \in \Theta$ tal que $F(x, y) = 0$. Neste caso a função f é definida por $y = f(x)$. ♢

Em particular, temos que $x \mapsto F(x, f(x))$ é a função nula de Ω a $\mathbb{R}^m$. Na Definição 5.2.1 ficaram explicitadas a componentes $n+1, \dots, n+m$ de F em função das componentes $1, \dots, n$. É claro que uma definição análoga vale explicitando m componentes quaisquer de F em função das demais n.

LEMA 5.2.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, $D_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $f(D_\varepsilon(x_0)) \subset D_\varepsilon(x_0)$. A função $f|_{D_\varepsilon(x_0)}\colon D_\varepsilon(x_0) \to D_\varepsilon(x_0)$ é uma contração (v. Def. 1.5.3) se, e somente se:*

$$\max_{x \in D_\varepsilon(x_0)} \|df_x\| < 1. \tag{94}$$

Neste caso, existe um único ponto fixo de $f|_{D_\varepsilon(x_0)}\colon D_\varepsilon(x_0) \to D_\varepsilon(x_0)$.

DEMONSTRAÇÃO. ($\Leftarrow$) Se $a, b \in D_\varepsilon(x_0)$, então $[a, b] \subset D_\varepsilon(x_0)$, portanto a tese é uma óbvia consequência do Teorema 5.1.14. ($\Rightarrow$) Sejam $f|_{D_\varepsilon(x_0)}$ uma contração e λ o módulo de contração correspondente. Para $x \in B_\varepsilon(x_0)$, temos que $df_x(v) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x + tv) - f(x)\big)$ e, para $|t| \leq t_0$ tal que $x \pm t_0 v \in B_\varepsilon(x_0)$, temos que $\big\|\frac{1}{t}\big(f(x+tv) - f(x)\big)\big\| \leq \frac{1}{|t|}\lambda\|tv\| = \lambda\|v\|$, portanto $\|df_x(v)\| \leq \lambda\|v\|$, logo $\|df_x\| \leq \lambda$. Isso implica que $\sup_{x\in B_\varepsilon(x_0)}\|df_x\| \leq \lambda$, logo, por continuidade, $\max_{x\in D_\varepsilon(x_0)}\|df_x\| \leq \lambda < 1$. Sendo $D_\varepsilon(x_0)$ fechado, com a distância induzida pela norma se torna um espaço métrico completo, portanto, pelo Teorema 1.5.4, se valer (94) exite um único ponto fixo de $f|_{D_\varepsilon(x_0)}$. □

TEOREMA 5.2.3 (Teorema da Função Implícita ou de Dini). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos abertos e seja $F\colon \Omega \times \Theta \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^k, com $k \geq 1$. Seja $(x_0, y_0) \in \Omega \times V$ um ponto tal que $F(x_0, y_0) = 0$ e $(d_y F)_{(x_0,y_0)}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é inversível. Existem uma vizinhança $\Omega' \subset \Omega$ de x_0 e uma vizinhança $\Theta' \subset \Theta$ de y_0 tais que $F|_{\Omega'\times\Theta'}\colon \Omega' \times \Theta' \to \mathbb{R}^m$ define implicitamente uma função $f\colon \Omega' \to \Theta'$, a qual é também de classe C^k. Logo, se F for de classe C^∞, então também f é de classe C^∞.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em quatro passos: f existe, f é contínua, f é de classe C^1 e f é de classe C^k.

`Passo I: Existência.` Vamos considerar a seguinte função:

$$\begin{aligned} T\colon \Omega \times \Theta &\to \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto y - (d_y F)^{-1}_{(x_0,y_0)} \circ F(x, y). \end{aligned} \tag{95}$$

É claro que $F(x, y) = 0$ se, e somente se, $T(x, y) = y$. Por isso, tentamos encontrar dois discos $D_\delta(x_0) \subset \Omega$ e $D_\varepsilon(y_0) \subset \Theta$ tais que, para todo $x \in D_\delta(x_0)$, a função $T_x\colon D_\varepsilon(y_0) \to D_\varepsilon(y_0)$ seja uma contração, sendo $T_x(y) := T(x, y)$. Se isso ocorrer, a função T_x tem um único ponto fixo, logo, para todo $x \in D_\delta(x_0)$, existe um único ponto $y \in D_\varepsilon(y_0)$ tal que $F(x, y) = 0$. Por causa do Lema 5.2.2, procuramos $D_\varepsilon(y_0)$ de modo que valha $\max_{y\in D_\varepsilon(y_0)} \|d(T_x)_y\| < 1$ para todo $x \in D_\delta(x_0)$. Temos que:

$$d(T_x)_y = I - (d_y F)^{-1}_{(x_0,y_0)} \circ (d_y F)_{(x,y)} = (d_y F)^{-1}_{(x_0,y_0)} \circ \big((d_y F)_{(x_0,y_0)} - (d_y F)_{(x,y)}\big)$$

$$\|d(T_x)_y\| \leq \big\|(d_y F)^{-1}_{(x_0,y_0)}\big\| \cdot \big\|(d_y F)_{(x_0,y_0)} - (d_y F)_{(x,y)}\big\|.$$

Graças à continuidade de $d_y F$, podemos fixar uma vizinhança $A \subset \Omega \times \Theta$ de (x_0, y_0) tal que, para todo $(x, y) \in A$, valha

$$\big\|(d_y F)_{(x_0,y_0)} - (d_y F)_{(x,y)}\big\| \leq \frac{1}{2\|(d_y F)^{-1}_{(x_0,y_0)}\|}. \tag{96}$$

Fixamos também $\delta', \varepsilon > 0$ tais que $D_{\delta'}(x_0) \times D_\varepsilon(y_0) \subset A$. Desta maneira vale a desigualdade $\max_{y\in D_\varepsilon(y_0)} \|d(T_x)_y\| \leq \frac{1}{2} < 1$ para todo $x \in D_{\delta'}(x_0)$, porém é necessário verificar que $T_x(D_\varepsilon(y_0)) \subset D_\varepsilon(y_0)$, para poder aplicar o Teorema das Contrações a $T_x\colon D_\varepsilon(y_0) \to D_\varepsilon(y_0)$. Isso significa que, se $\|y - y_0\| \leq \varepsilon$, tem que valer $\|T_x(y) - y_0\| \leq \varepsilon$. Temos que:

$$\|T_x(y) - y_0\| \leq \|T_x(y) - T_x(y_0)\| + \|T_x(y_0) - y_0\|.$$

Pelo Teorema do Incremento Finito 5.1.14, temos:

$$\|T_x(y) - T_x(y_0)\| \leq \|y - y_0\| \cdot \max_{\xi\in[y_0,y]} \|d(T_x)_\xi\| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Ademais, aplicando a Definição (95) de T:

$$\|T_x(y_0) - y_0\| = \big\|(d_y F)^{-1}_{(x_0,y_0)} \circ F(x, y_0)\big\| \leq \big\|(d_y F)^{-1}_{(x_0,y_0)}\big\| \cdot \|F(x, y_0)\|.$$

Por isso, escolhemos $\delta < \delta'$ de modo que, para todo $x \in D_\delta(x_0)$, valha

$$\|F(x, y_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|(d_y F)^{-1}_{(x_0,y_0)}\|}.$$

Com isso obtemos que $\|T_x(y) - y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, portanto $T(D_\varepsilon(y_0)) \subset D_\varepsilon(y_0)$.

`Passo II: Continuidade.` Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D_\delta(x_0)$ uma sequência tal que $x_n \to x \in D_\delta(x_0)$. Vamos demonstrar que, para qualquer subsequência x_{n_i}, existe uma subsubsequência $x_{n_{i_j}}$ tal que $f(x_{n_{i_j}}) \to f(x)$. Isso demonstra que $f(x_n) \to f(x)$, portanto f é contínua. Sendo $D_\varepsilon(y_0)$ compacto, dada a sequência $f(x_{n_i})$, existe uma subsequência convergente $f(x_{n_{i_j}}) \to y$. Sendo F contínua, temos que $0 = F(x_{n_{i_j}}, f(x_{n_{i_j}})) \to F(x, y)$, logo $y = f(x)$.

`Passo III: Diferenciabilidade.` Pelo Corolário 5.1.6 e pela Desigualdade (96), temos que $(d_y F)_{(x,y)}$ é inversível para todo $(x, y) \in D_\delta(x_0) \times D_\varepsilon(y_0)$. Observamos que, se f for diferenciável em Ω', como $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in B_\delta(x_0)$, então tem que valer o seguinte:

$$\begin{aligned} &(d_x F)_{(x,f(x))} + (d_y F)_{(x,f(x))} \circ \left(\tfrac{df}{dx}\right)_x = 0 \\ &\left(\tfrac{df}{dx}\right)_x = -(d_y F)^{-1}_{(x,f(x))} \circ (d_x F)_{(x,f(x))}. \end{aligned} \tag{97}$$

Por isso, vamos demonstrar que $-(d_y F)^{-1}_{(x,f(x))} \circ (d_x F)_{(x,f(x))}$ é efetivamente o diferencial de f. Seja:

$$\Delta f_x(h) := f(x + h) - f(x) + (d_y F)^{-1}_{(x,f(x))} \circ (d_x F)_{(x,f(x))}(h).$$

Devemos provar que $\Delta f_x(h) = o(\|h\|)$. Podemos exprimir $\Delta f_x(h)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (d_y F)^{-1}_{(x,f(x))} &\circ \big((d_y F)_{(x,f(x))} \circ f(x + h) - (d_y F)_{(x,f(x))} \circ f(x) + (d_x F)_{(x,f(x))}(h)\big) \\ &= (d_y F)^{-1}_{(x,f(x))} \circ dF_{(x,f(x))}\big(h, f(x + h) - f(x)\big). \end{aligned}$$

Como $F(x + h, f(x + h)) = F(x, f(x)) = 0$, podemos continuar o cálculo anterior da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta f_x(h) = -(d_y F)^{-1}_{(x,f(x))} \big[&F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x)) \\ &- dF_{(x,f(x))}\big(h, f(x + h) - f(x)\big)\big] \\ = o(\|(h, f&(x + h) - f(x))\|). \end{aligned}$$

Por isso, fixado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|h\| < \delta$, então:

$$\begin{aligned} \|\Delta f_x(h)\| &< \varepsilon \|(h, f(x + h) - f(x))\| \\ &= \varepsilon \big\|\big(h, \Delta f_x(h) - (d_y F)^{-1}_{(x,f(x))} \circ (d_x F)_{(x,f(x))}(h)\big)\big\| \\ &\leq \varepsilon \big\|\big(h, -(d_y F)^{-1}_{(x,f(x))}(d_x F)_{(x,f(x))}(h)\big)\big\| + \varepsilon \|(0, \Delta f_x(h))\| \\ &\leq \varepsilon C \|h\| + \varepsilon \|\Delta f_x(h)\|, \end{aligned}$$

sendo $C = 1 + \|(d_y F)^{-1}_{(x,f(x))} \circ (d_x F)_{(x,f(x))}\|$. Por isso:

$$\|\Delta f_x(h)\| < \tfrac{C\varepsilon}{1-\varepsilon} \|h\|.$$

Como $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{C\varepsilon}{1-\varepsilon} = 0$, temos que $\Delta f_x(h) = o(\|h\|)$. Isso demonstra que f é diferenciável; em particular, considerando x como variável e $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ como contradomínio:

$$df(x) = -(d_y F)^{-1}_{(x,f(x))} \circ (d_x F)_{(x,f(x))}.$$

Como já provamos que f é contínua, vemos que df é contínua também, logo f é de classe C^1.

`Passo IV:` f `é de classe` C^k. Consideremos o seguinte enunciado: "Se uma função $F\colon U' \times V' \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, tal que $k \geq 1$ e $(d_yF)_{(x,y)}$ é inversível para todo $(x,y) \in U' \times V'$, define implicitamente uma função $f\colon U' \to V'$, então f é também de classe C^k". Acabamos de demonstrar o enunciado para $k = 1$. Agora vamos provar por indução o enunciado para k genérico. Se vale para $k \geq 1$ fixado, pela equação (97) o diferencial $\frac{df}{dx}\colon U' \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é definido implicitamente pela seguinte função:

$$\begin{aligned} G\colon U' \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^m \\ (x,h,k) &\mapsto (d_xF)_{(x,f(x))}(h) + (d_yF)_{(x,f(x))}(k). \end{aligned}$$

De fato, $G(x,h,df(x,h)) = G\big(x,h,\big(\frac{df}{dx}\big)_x(h)\big) = 0$ pela equação (97). Ademais, $(d_kG)_{(x,h,k)} = (d_yF)_{(x,f(x))}$, portanto d_kG é inversível em todo ponto do domínio, logo, se $G(x,h,k) = 0$, então $k = -(d_yF)^{-1}_{(x,f(x))} \circ (d_xF)_{(x,f(x))}(h) = df(x,h)$. Se F for de classe C^{k+1}, suas derivadas são de classe C^k. Pela hipótese de indução, f é de classe C^k, portanto G é de classe C^k também. Aplicando novamente a hipótese de indução, concluímos que a função df, definida implicitamente por G, é de classe C^k, portanto f é de classe C^{k+1}. Isso prova que o enunciado vale para todo $k \geq 1$. $\square$

A hipótese da invertibilidade de $(d_yF)_{(x_0,y_0)}$ é suficiente mas não necessária. Por exemplo, podemos considerar a função $F(x,y) = y^3$. É claro que $\partial_y F(x_0,0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, porém fica definida globalmente a função (suave) $y = 0$.

5.2.1. Alguns corolários relevantes. O Teorema da Função Implícita tem várias consequências importantes. Agora vamos mostrar algumas delas.

COROLÁRIO 5.2.4 (Teorema da Função Inversa). *Sejam $\Omega, \Theta \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos. Sejam $f\colon \Omega \to \Theta$ uma função suave e $x_0 \in \Omega$ um ponto tal que $df_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é inversível. Então existem uma vizinhança $\Omega' \subset \Omega$ de x_0 e uma vizinhança $\Theta' \subset \Theta$ de $f(x_0)$ tais que $f(\Omega') = \Theta'$ e $f|_{\Omega'}\colon \Omega' \to \Theta'$ é um difeomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a função:

$$\begin{aligned} F\colon U \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x,y) &\mapsto y - f(x). \end{aligned}$$

A função F é suave, $F(x_0,f(x_0)) = 0$ e $(d_xF)_{(x_0,f(x_0))} = -df_{x_0}$ é inversível, logo, pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança $U'' \subset U$ de x_0 e uma vizinhança $V' \subset V$ de $f(x_0)$ tais que $F|_{U'' \times V'}\colon U'' \times V' \to \mathbb{R}^n$ define implicitamente uma função suave $x = g(y)$, sendo $g\colon V' \to U''$. Por construção, dados $x \in U''$ e $y \in V'$, vale $x = g(y)$ se, e somente se, $F(x,y) = 0$, se, e somente se, $y = f(x)$. Logo, $g = (f|_{g(V')})^{-1}$. Seja $U' := g(V')$. Vamos verificar que $U' = U'' \cap f^{-1}(V')$, portanto é aberto. De fato:

- se $x \in U'' \cap f^{-1}(V')$, então $f(x) \in V'$, logo $x = g(f(x)) \in g(V') = U'$;
- se $x \in U' = g(V')$, então $x \in U''$ e $\exists y \in V' : x = g(y)$, portanto $x \in U''$ e $\exists y \in V' : y = f(x)$, logo $x \in U''$ e $f(x) \in V'$.

Isso demonstra que U' e V' são abertos tais que $f\colon U' \to V'$ e $g\colon V' \to U'$ são difeomorfismos inversos entre si. $\square$

COROLÁRIO 5.2.5 (Teorema de Imersão Local). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos abertos, sendo $n \leq m$. Seja $f\colon U \to V$ uma função suave e seja $x_0 \in U$ um ponto tal que $df_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetor. Então existem:*

- *uma vizinhança $U' \subset U$ de x_0;*
- *uma vizinhança $V' \subset V$ de $f(x_0)$, um subconjunto aberto $W' \subset \mathbb{R}^{m-n}$ e um difeomorfismo $\psi\colon U' \times W' \to V'$*

tais que $f(U') \subset V'$ e, se $i\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ for a imersão canônica:

$$\psi^{-1} \circ f = i\colon U' \to U' \times W'.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Sendo df_{x_0} injetor, a menos de trocar a ordem das entradas de $\mathbb{R}^m$, podemos supor que $d(f_1)_{x_0}$ seja inversível. Consideremos a função:

$$\begin{aligned} F\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} &\to \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto f(x) + (0, y) = (f_1(x), f_2(x) + y). \end{aligned}$$

Temos que:

$$JF = \begin{bmatrix} Jf_1 & 0 \\ Jf_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por isso $\det(JF) = \det(Jf_1)$, logo $JF(x_0, 0)$ é inversível. Pelo Teorema da Função Inversa, existem uma vizinhança $U' \times W' \subset U \times \mathbb{R}^{m-n}$ de $(x_0, 0)$ e uma vizinhança $V' \subset V$ de $f(x_0)$ tais que $F|_{U' \times W'}\colon U' \times W' \to V'$ é um difeomorfismo. Definindo $\psi := F|_{U' \times W'}$, temos que $\psi \circ i = f$, logo $\psi^{-1} \circ f = i$. □

COROLÁRIO 5.2.6 (Teorema de Submersão Local). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos abertos, sendo $n \geq m$. Seja $f\colon U \to V$ uma função suave e seja $x_0 \in U$ um ponto tal que $df_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetor. Então existem:*

- *uma vizinhança $V' \subset V$ de y_0;*
- *uma vizinhança $U' \subset U$ de x_0, um subconjunto aberto $W' \subset \mathbb{R}^{n-m}$ e um difeomorfismo $\varphi\colon V' \times W' \to U'$*

tais que $f(U') = V'$ e, se $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ for a projeção canônica:

$$f \circ \varphi = \pi\colon V' \times W' \to V'.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Sendo df_{x_0} sobrejetor, a menos de trocar a ordem das entradas de $\mathbb{R}^n$, podemos supor que $\frac{\partial f}{\partial x_1}\big|_{x_0}$ seja inversível. Consideremos a função:

$$\begin{aligned} F\colon U &\to V \times \mathbb{R}^{n-m} \\ x = (x_1, x_2) &\mapsto (f(x), x_2). \end{aligned}$$

Temos que:

$$JF = \begin{bmatrix} J_{x_1} f & J_{x_2} f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por isso $\det(JF) = \det(J_{x_1} f)$, logo $JF(x_0)$ é inversível. Pelo Teorema da Função Inversa, existem uma vizinhança $U' \subset U$ de x_0 e uma vizinhança $V' \times W' \subset V \times \mathbb{R}^{n-m}$ de $(f(x_0), (x_0)_2)$ tais que $F|_{U'} : U' \to V' \times W'$ é um difeomorfismo. Definindo $\varphi := F|_{U'}^{-1}$, temos que $\pi \circ \varphi^{-1} = f$, logo $f \circ \varphi = \pi$. □

5.2.2. Comentários finais. Os Teoremas de Imersão e de Submersão local podem ser lidos da seguinte maneira. Sejam A e B espaços vetoriais. Se $f\colon A \to B$ for uma função linear injetora, então podemos encontrar um isomorfismo $\psi\colon A \oplus C \to B$ tal que $\psi^{-1} \circ f(a) = (a, 0)$ para todo $a \in A$. O Teorema de Imersão Local afirma que, quando o diferencial de uma função suave em um ponto x_0 for injetor, esta construção pode ser estendida à função f em uma vizinhança U' de x_0, escolhendo um difeomorfismo entre uma vizinhança V' de $f(x_0)$ e $U' \times W'$, que torne f a imersão $x \mapsto (x, 0)$. Analogamente, se $f\colon A \to B$ for uma função linear sobrejetora, então podemos encontrar um isomorfismo $\varphi\colon B \oplus C \to A$ tal que $f \circ \varphi(b, c) = b$ para todos $b \in B$ e $c \in C$. O Teorema de Submersão Local afirma que, quando o diferencial de uma função suave em um ponto x_0 for sobrejetor, esta construção pode ser estendida à função f em uma vizinhança de x_0, escolhendo um difeomorfismo entre uma vizinhança U' de x_0 e $V' \times W'$, que torne f a projeção $(x, y) \mapsto x$. Quando o diferencial de f em x_0 for inversível, podemos aplicar qualquer um dos dois teoremas, obtendo um difeomorfismo local no domínio ou no contra-domínio que torna f a identidade: este é um modo equivalente de afirmar que f é um localmente um difeomorfismo (pois a composição entre um difeomorfismo e a identidade é um difeomorfismo), o que coincide com o enunciado do Teorema da Função Inversa. Portanto, estes três corolários do Teorema da Função Implícita confirmam o princípio geral conforme o qual uma função suave perto de um ponto "se parece" com seu diferencial no ponto.

Observação 5.2.7. A partir do Teorema da Função Implícita, é possível deduzir um resultado mais geral, que inclui os três corolários precedentes como caso particular, o qual será discutido no Apêndice B. $\diamondsuit$

5.3. Partições da unidade suaves

No Capítulo 1 relembramos as noções de normalidade, função de Urysohn, paracompacidade e partição da unidade no contexto topológico. Agora vamos enunciar e demonstrar resultados análogos no contexto das funções suaves entre subconjuntos abertos de espaços euclidianos. Já vimos que todo subespaço topológico de $\mathbb{R}^n$ é paracompacto. No caso de um subconjunto aberto, agora vamos provar um resultado mais forte, que implica na paracompacidade.

Notação 5.3.1. Sejam $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$. Denotamos por $\overline{V}^U$ o fecho de V em U em relação à Topologia Induzida e denotamos por $\overline{V}^{\mathbb{R}^n}$ o fecho de V em $\mathbb{R}^n$. $\diamondsuit$

Lema 5.3.2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Existe uma cobertura aberta enumerável $\mathfrak{V} = \{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de U tal que V_k é limitado e $\overline{V}_k^{\mathbb{R}^n} \subset V_{k+1}$.*

Demonstração. Consideremos a cobertura enumerável de U formada pelas bolas de centro e raio racionais, cujo fecho em $\mathbb{R}^n$ está contido em U:

$$\mathfrak{B} = \{B_\varepsilon(x) : x \in \mathbb{Q}^n, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+, D_\varepsilon(x) \subset U\}. \tag{98}$$

Sendo $\mathfrak{B}$ enumerável, escolhemos uma enumeração de seus elementos e chamamos de B_k o k-ésimo elemento. Definimos $V_0 := \emptyset$ e $V_1 := B_1$. Para $k \geq 1$, suponhamos de ter definido V_k de modo que:

- V_k é aberto e limitado;
- $\overline{V}_{k-1}^{\mathbb{R}^n} \subset V_k$;
- $B_k \subset V_k$;
- $\overline{V}_k^{\mathbb{R}^n} \subset U$.

Por compacidade, $\overline{V}_k^{\mathbb{R}^n} \subset B_{h_1} \cup \ldots \cup B_{h_p}$. Definimos $V_{k+1} := B_{k+1} \cup B_{h_1} \cup \ldots \cup B_{h_p}$. Desta maneira V_{k+1} é aberto e limitado, $\overline{V}_k^{\mathbb{R}^n} \subset V_{k+1}$, $B_{k+1} \subset V_{k+1}$ e $\overline{V}_{k+1}^{\mathbb{R}^n} \subset U$. Como $B_k \subset V_k$ para todo k, $\mathfrak{V}$ é uma cobertura. □

Dado um subconjunto $Y \subset U$, temos que $\overline{Y}^U \subset \overline{Y}^{\mathbb{R}^n}$, portanto, se $\overline{Y}^{\mathbb{R}^n} \subset U$, então $\overline{Y}^U = \overline{Y}^{\mathbb{R}^n}$. Como, usando a notação do Lema 5.3.2, temos que $\overline{V}_k^{\mathbb{R}^n} \subset U$, então $\overline{V}_k^U = \overline{V}_k^{\mathbb{R}^n}$, portanto podemos usar a notação $\overline{V}_k$ sem ambiguidade.

COROLÁRIO 5.3.3. *Um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é a união de uma família crescente e enumerável de subespaços compactos, cada um contido no interior do sucessivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Usando a notação do Lema 5.3.2, podemos considerar a cobertura fechada $\{\overline{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de U. □

COROLÁRIO 5.3.4. *Um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ admite uma cobertura localmente finita formada por abertos limitados.*

DEMONSTRAÇÃO. Usando a notação do Lema 5.3.2, podemos considerar a cobertura aberta $\mathfrak{U}' := \{U'_k := V_k \setminus \overline{V}_{k-2}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de U. Dado $x \in U$, seja k o mínimo número inteiro tal que $x \in V_k$ e consideremos a vizinhança U'_k de x. Os únicos elementos de $\mathfrak{U}'$ que interceptam U'_k são U'_{k-1}, U'_k e U'_{k+1}, portanto $\mathfrak{U}'$ é localmente finita. □

Na verdade, o corolário precedente será consequência imediata do Teorema 5.3.6, bem mais refinado. Contudo, é interessante observar que pode ser deduzido somente a partir do Lema 5.3.2.

OBSERVAÇÃO 5.3.5. No Lema 5.3.2, mesmo se U for conexo, os abertos V_k poderiam não sê-lo, pois são definidos como a união de uma família finita de bolas, cuja posição em U não podemos controlar. Contudo, é fácil modificar levemente a construção dos abertos V_k, pedindo que sejam conexos se U o for. De fato, $V_1 = B_1$ é conexo por construção. Suponhamos indutivamente que V_k seja conexo. Quando definimos $V_{k+1} := B_{k+1} \cup B_{h_1} \cup \ldots \cup B_{h_p}$, podemos considerar a família finita de caminhos que unem os centros das bolas $B_{k+1}, B_{h_1}, \ldots, B_{h_p}$ e escolher uma bola pertencente a $\mathfrak{B}$ para cada ponto de cada um destes caminhos.[2] Sendo a união de uma família finita de caminhos compacta, podemos selecionar uma sub-cobertura finita $B_{l_1}, \ldots, B_{l_q}$ e definir $V_{k+1} := B_{k+1} \cup B_{h_1} \cup \ldots \cup B_{h_p} \cup B_{l_1} \cup \ldots \cup B_{l_q}$. Desta maneira todo V_k acaba sendo conexo. Por isso também nos enunciados dos Corolários 5.3.3 e 5.3.4 podemos pedir a conexidade de cada elemento da cobertura. ♢

[2] Lembramos que um aberto de $\mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos.

Por enquanto construímos algumas coberturas particulares de um aberto de $\mathbb{R}^n$. Agora podemos demonstrar o resultado que já mencionamos no começo desta seção, o qual implica na paracompacidade.

TEOREMA 5.3.6. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Para toda cobertura $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de U, existe um refinamento* enumerável localmente finito *de $\mathfrak{U}$, formado por bolas abertas:*

$$\mathfrak{U}' = \{B_{3\varepsilon_k}(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

tal que $\mathfrak{U}'' = \{B_{\varepsilon_k}(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é também uma cobertura de U.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a cobertura $\mathfrak{V} = \{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de U definida no Lema 5.3.2. Definimos também $V_0 := \emptyset$ e $V_{-1} := \emptyset$. Dado $x \in U$, seja $k \in \mathbb{N}$ o mínimo número tal que $x \in V_k$. Seja $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Consideremos uma bola

$$B_{3\varepsilon}(x) \subset U_i \cap (V_k \setminus \overline{V}_{k-2}) \tag{99}$$

e a bola reduzida $B_\varepsilon(x)$. Desta maneira fixamos uma bola $B_\varepsilon(x)$ para todo $x \in U$. Variando $x \in \overline{V}_1$, estas bolas formam uma cobertura aberta de $\overline{V}_1$,[3] da qual podemos sacar uma subcobertura finita $\mathfrak{U}''_1 = \{B_{\varepsilon_{1,1}}(x_{1,1}), \dots, B_{\varepsilon_{1,m_1}}(x_{1,m_1})\}$. Suponhamos de ter definido a cobertura $\mathfrak{U}''_k = \{B_{\varepsilon_{k,1}}(x_{k,1}), \dots, B_{\varepsilon_{k,m_k}}(x_{k,m_k})\}$ de $\overline{V}_k$. Unindo $\mathfrak{U}''_k$ ao conjunto das bolas fixadas para todo $x \in \overline{V}_{k+1} \setminus \overline{V}_k$, obtemos uma cobertura de $\overline{V}_{k+1}$, da qual podemos sacar uma subcobertura finita $\mathfrak{U}''_{k+1}$, sem tirar nenhum elemento de $\mathfrak{U}''_k$. Desta maneira obtemos uma família crescente de famílias finitas de bolas abertas. Seja $\mathfrak{U}'' = \bigcup_k \mathfrak{U}''_k$ e seja $\mathfrak{U}'$ a família obtida multiplicando por 3 os raios das bolas de $\mathfrak{U}''$. Vamos demonstrar que $\mathfrak{U}'$ verifica o enunciado.

$\mathfrak{U}'$ é um refinamento de $\mathfrak{U}$, pois, pela Fórmula (99), para todo $x \in U$ existe $i \in I$ tal que $B_{3\varepsilon}(x) \subset U_i$. É claro que $\mathfrak{U}'$ é enumerável, pois é a união de uma família enumerável de conjuntos finitos. Por construção $\mathfrak{U}''$ é uma cobertura de U, portanto só devemos provar que $\mathfrak{U}'$ é localmente finita (logo também $\mathfrak{U}''$). Seja $x \in U$ e seja $k \in \mathbb{N}$ o mínimo número tal que $x \in V_k$. Vamos mostrar que as bolas de $\mathfrak{U}'$, que interceptam a vizinhança V_k de x, pertencem todas a $\mathfrak{U}'_{k+1}$, logo se trata de uma quantidade finita. De fato, se $B_{3\varepsilon}(y) \in \mathfrak{U}' \setminus \mathfrak{U}'_{k+1}$, então existe $p \geq 0$ tal que $B_{3\varepsilon}(y) \in \mathfrak{U}'_{k+2+p} \setminus \mathfrak{U}'_{k+1+p}$. Neste caso $y \in \overline{V}_{k+2+p} \setminus \overline{V}_{k+1+p}$. Se $y \in V_{k+2+p}$, pela Fórmula (99) temos que $B_{3\varepsilon}(y) \subset U_i \cap (V_{k+2+p} \setminus \overline{V}_{k+p})$, portanto não pode conter pontos de V_{k+p}, logo nem de V_k. Analogamente, se $y \in \overline{V}_{k+2+p} \setminus V_{k+2+p}$, pela Fórmula (99) temos que $B_{3\varepsilon}(y) \subset U_i \cap (V_{k+3+p} \setminus \overline{V}_{k+1+p})$, portanto não pode conter pontos de V_{k+1+p}, logo nem de V_k. □

O Teorema 5.3.6 implica que U é paracompacto, portanto já sabemos que, para qualquer cobertura $\mathfrak{U}$ de U, existe uma partição da unidade subordinada a $\mathfrak{U}$. Agora vamos demonstrar uma versão mais forte deste resultado (sem pressupor a versão precedente): a partição da unidade subordinada a $\mathfrak{U}$ pode ser construída de modo que seja formada por funções suaves.

LEMA 5.3.7. *Sejam $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ tais que $a < x_0 < b$. Seja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que:*

[3] É claro que, se $x \in V_1$, então $B_{3\varepsilon}(x) \subset V_1$, enquanto, se $x \in \overline{V}_1 \setminus V_1$, então $B_{3\varepsilon}(x) \subset V_2$.

- *f é diferenciável em $(a, x_0) \cup (x_0, b)$;*
- $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$.

Então f é diferenciável também em x_0 e $f'(x_0) = \alpha$.

Demonstração. Seja $h > 0$ tal que $x_0 + h < b$. Pelo Teorema de Lagrange, temos que $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(\xi_h)$, sendo $\xi_h \in (x_0, x_0 + h)$. Isso implica que $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f'(\xi_h) = \alpha$. O mesmo vale para $h < 0$ e $\xi_h \in (x_0 - h, x_0)$, logo $f'(x_0) = \alpha$. □

Consideremos a seguinte função:

$$
\begin{aligned}
u \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{100}
$$

Vamos demonstrar que se trata de uma função suave. Só temos que verificar a suavidade na origem. Temos que $\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0^+$, portanto u é contínua. É fácil provar por indução que, para todo $i \geq 0$, $\frac{d^i}{dx^i}\big(e^{-\frac{1}{x^2}}\big) = \frac{p_i(x)}{q_i(x)} e^{-\frac{1}{x^2}}$, sendo $p_i(x)$ e $q_i(x)$ polinômios e $q_i(x) \neq 0$ para $x > 0$. Com a substituição $x = \frac{1}{t}$, temos que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{d^i}{dx^i}\big(e^{-\frac{1}{x^2}}\big) = \lim_{t \to \infty} \frac{p_i\big(\frac{1}{t}\big)}{q_i\big(\frac{1}{t}\big)} e^{-t^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^n}{t^m e^{t^2}} = 0^+,$$

pois e^{t^2} é mais rápida ao infinito que qualquer potência de t. Pelo Lema 5.3.7, $u^{(i)}(0) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, portanto u é suave. Trata-se do típico exemplo de uma função suave não analítica, pois a serie de Taylor de u na origem é a série nula, cuja soma é diferente de u em qualquer vizinhança de 0.

Lema 5.3.8. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Existe uma função suave $u_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:*

- *$0 \leq u_{a,b}(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$;*
- *$u_{a,b}(x) = 1$ se, e somente se, $x \leq a$;*
- *$u_{a,b}(x) = 0$ se, e somente se, $x \geq b$.*

Demonstração. Seja u a Função (100). Definimos:

$$u_{a,b}(x) := \frac{u(b-x)}{u(x-a) + u(b-x)}.$$

Temos que $u(b - x) = 0 \Leftrightarrow b - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq b$ e $u(x - a) = 0 \Leftrightarrow x - a \leq 0 \Leftrightarrow x \leq a$. Isso implica que o denominador é sempre maior que 0 e que $u_{a,b}(x) = 0$ se, e somente se, $x \geq b$. Ademais, $u_{a,b}(x) = 1 \Leftrightarrow u(x - a) = 0 \Leftrightarrow x \leq a$. Enfim, para $x \in (a, b)$ o denominador é maior que o numerador, portanto a função é menor que 1 (e positiva). □

Corolário 5.3.9. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b$. Existe uma função suave $\xi_{a,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:*

- *$0 \leq \xi_{a,b}(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;*
- *$\xi_{a,b}(x) = 1$ se, e somente se, $\|x\| \leq a$;*

- $\xi_{a,b}(x) = 0$ *se, e somente se,* $\|x\| \geq b$.

Demonstração. Definimos $\xi_{a,b}(x) := u_{a,b}(\|x\|)$. Para $x \neq 0$, a função $\xi_{a,b}$ é a composição de duas funções suaves, portanto é suave. Em uma vizinhança de 0 coincide com a função constante 1, logo é suave em $\mathbb{R}^n$ todo. □

Teorema 5.3.10. *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto e seja* $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ *uma cobertura de* U. *Existe uma partição da unidade* $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, *subordinada a* $\mathfrak{U}$, *tal que* $\varphi_i \colon U \to [0,1]$ *é suave para todo* $i \in I$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{U}' = \{B_{3\varepsilon_k}(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ o refinamento de $\mathfrak{U}$ definido no Teorema 5.3.6. Para todo $k \in \mathbb{N}$, consideremos a função $\xi_{1,2}\big(\frac{x-x_k}{\varepsilon}\big)$: esta função vale 0 no complementar da bola $B_{2\varepsilon_k}(x_k)$, portanto pode ser estendida a U todo, declarando que vale 0 no complementar de U_i. Obtemos funções suaves $\psi_k \colon U \to \mathbb{R}$ tais que $B_{\varepsilon_k}(x_k) \subset \operatorname{supp}\psi_k \subset B_{3\varepsilon_k}(x_k)$, portanto $\{\operatorname{supp}\psi_k\}$ é uma cobertura fechada localmente finita de U. Definimos:

$$\phi_k(x) := \frac{\psi_k(x)}{\sum_{h\in\mathbb{N}}\psi_h(x)}.$$

Desta maneira $\sum_{k\in\mathbb{N}}\phi_k(x) = 1$. Por definição de refinamento, existe uma função $f \colon \mathbb{N} \to I$ tal que $B_{3\varepsilon_k}(x_k) \subset U_{f(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos:

$$\varphi_i(x) := \sum_{k:f(k)=i}\phi_k(x). \tag{101}$$

Os conjuntos $\{k : f(k) = i\}_{i\in I}$, alguns dos quais podem ser vazios, formam uma partição de $\mathbb{N}$, portanto $\sum_{i\in I}\varphi_i(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\phi_k(x) = 1$. Em particular, para todo $x \in U$ existe uma vizinhança tal que a soma (101) é finita para todo $i \in I$, pois isso vale para a soma completa sobre $k \in \mathbb{N}$. Ademais, $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \bigcup_{k:f(k)=i}\operatorname{supp}\phi_k \subset \bigcup_{k:f(k)=i} B_{3\varepsilon_k}(x_k) \subset U_i$. Só falta provar que a família $\{\operatorname{supp}\varphi_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura fechada localmente finita de X. Para todo $x \in U$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{\varepsilon_k}(x_k)$, logo $x \in \operatorname{supp}\phi_k \subset \operatorname{supp}\varphi_{f(k)}$. Isso mostra que $\{\operatorname{supp}\varphi_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura fechada. Para todo $x \in U$ existe uma vizinhança que intercepta só os suportes de uma quantidade finita de funções $\phi_1, \ldots, \phi_m$. Pela fórmula (101) só os suportes das funções $\varphi_{f(1)}, \ldots, \varphi_{f(m)}$ podem interceptar essa vizinhança, portanto a cobertura fechada $\{\operatorname{supp}\varphi_i\}_{i\in I}$ é localmente finita. □

Com isso acabamos de provar em particular que um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é paracompacto. Isso implica que é normal, portanto valem os Teoremas 1.2.11 (ou 1.2.13) e 1.2.14. Para os dois existe uma versão suave. Ainda não mostramos a definição de função suave quando o domínio não é aberto em $\mathbb{R}^n$, o que é necessário em relação à função $f \colon F \to \mathbb{R}$ no enunciado do Teorema 1.2.14, portanto mostraremos a versão suave deste teorema no Capítulo 2 do Vol. I (Teorema I–2.6.8).

Teorema 5.3.11. *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto. Para todo par* (F, V), *formado por um subconjunto fechado* F *e uma vizinhança aberta* V *de* F *em* U, *existe uma função de Urysohn* suave *associada a* (F, V).

Demonstração. Seja $\mathfrak{U} = \{V, U \setminus F\}$. Trata-se de uma cobertura (localmente) finita de U, portanto existe uma partição da unidade $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ subordinada a $\mathfrak{U}$. A função φ_1 é uma função de Urysohn associada a (F, V): de fato, como $\operatorname{supp} \varphi_2 \subset U \setminus F$, temos que $\varphi_2|_F = 0$. Dado que $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, necessariamente $\varphi_1|_F = 1$. Analogamente, como $\operatorname{supp} \varphi_1 \subset V$, necessariamente $\varphi_1|_{U \setminus V} = 0$. $\square$

Como no caso topológico, este teorema é equivalente à versão suave do Teorema 1.2.11.

APÊNDICE A

Complementos de teoria das categorias

APÊNDICE B

Teorema do posto