Introdução à topologia diferencial e algébrica

Vol. I

Topologia diferencial

`Resolução dos exercícios`

Fabio Ferrari Ruffino

Sumário

CAPíTULO 1

Exercícios da seção 1.6

EXERCÍCIO 1.1. *Demonstre que um cone em $\mathbb{R}^3$, representado por exemplo pela equação $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, não é uma variedade topológica.*

RESOLUÇÃO. É suficiente analisar um cone C fixado. De fato, dado outro cone C', existe uma transformação afim de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ que manda C em C'. Como uma transformação afim é um homeomorfismo, C é uma variedade topológica se, e somente se, C' o é. Uma observação análoga vale para os exercícios sucessivos.

Seja C representado pela equação $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Se fosse uma variedade topológica, a dimensão de C seria 2. De fato, podemos considerar a carta local (U, V, φ), sendo $U = C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $\varphi(t, u) = \big(t, u, \sqrt{t^2 + u^2}\big)$.

Vamos demonstrar que não existe nenhuma carta local de dimensão 2 em $(0, 0, 0)$. De fato, seja por absurdo (U, B^2, φ) uma carta local tal que $\varphi(0, 0) = (0, 0, 0)$. Tirando a origem, fica definido o homeomorfismo $\varphi|_{B^2\setminus\{0\}} \colon B^2 \setminus \{0\} \to U \setminus (0, 0, 0)$. Isso é impossível, pois $B^2 \setminus \{0\}$ é conexo, enquanto $U \setminus (0, 0, 0)$ fica dividido em duas componentes conexas, a primeira contida em $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ e a segunda em $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 1.2. *Sejam x e y pontos distintos de S^n, sendo $n \geq 1$. Seja $\sim$ a relação de equivalência em S^n que identifica x e y. Demonstre que $X := S^n/\sim$ não é uma variedade topológica.*

RESOLUÇÃO. Se $n = 1$, então X é homeomorfo à união a um ponto de duas cópias de S^1. Não se trata de uma variedade topológica. De fato, seja Y a união das duas retas $y = x$ e $y = -x$ em $\mathbb{R}^2$. O espaço X no ponto de interseção das duas circunferências é localmente homeomorfo a Y na origem e já demonstramos que não existe nenhuma carta local topológica de Y em 0 (v. Exemplo 1.2.17).

Para $n \geq 2$, se X fosse uma variedade topológica, a dimensão de X seria n. De fato, $A := S^n \setminus \{x, y\}$ é um subconjunto aberto de S^n e de X, portanto para todo $a \in A$ existe uma carta local (U, V, φ) de S^n tal que $U \subset A$, logo (U, V, φ) é também uma carta local de X em a de dimensão n. Vamos demonstrar que não existe nenhuma carta local de X de dimensão n em $[x]$. De fato, seja por absurdo $(U, B_\varepsilon(0), \varphi)$ uma carta local em $[x]$. Seja $\pi \colon S^n \to X$ a projeção ao quociente. Sejam U_1 e U_2 vizinhanças conexas disjuntas respetivamente de x e y em S^n: como $\pi(U_1 \cup U_2)$ é aberto em X, pois $\pi^{-1}(\pi(U_1 \cup U_2)) = U_1 \cup U_2$, podemos restringir a carta $(U, B_\varepsilon(0), \varphi)$ de modo que $U \subset \pi(U_1 \cup U_2)$, o que equivale a $\pi^{-1}(U) \subset U_1 \cup U_2$. Desta maneira, $U \setminus \{[x]\}$ é formado pelas duas componentes conexas $\pi(U_1 \setminus \{x\}) \cap U$

e $\pi(U_2 \setminus \{y\}) \cap U$, enquanto $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ é conexo (por caminhos). Isso é absurdo, pois $\varphi|_{B_\varepsilon(0)\setminus\{0\}} \colon B_\varepsilon(0) \setminus \{0\} \to U \setminus \{[x]\}$ é um homeomorfismo. $\diamondsuit$

Exercício 1.3. *Considere um hiperboloide de duas folhas em $\mathbb{R}^3$, representado por exemplo pela equação $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$. Demonstre que cada uma das duas folhas é uma variedade topológica que admite uma carta global.*

Resolução. Escrevendo a equação na forma $z^2 = x^2 + y^2 + 1$, podemos ver que as duas folhas são descritas por $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, portanto ficam definidas as cartas globais $(U, \mathbb{R}^2, \varphi)$, sendo U uma das duas folhas e sendo $\varphi(t, u) = \big(t, u, \pm\sqrt{t^2 + u^2 + 1}\big)$. $\diamondsuit$

Exercício 1.4. *Demonstre que um hiperboloide de uma folha em $\mathbb{R}^3$, representado por exemplo pela equação $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, é uma variedade topológica. Encontre um atlas e calcule as funções de transição correspondentes.*

Resolução. Seja H representado por $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. Consideremos as 4 cartas (U_1, V_1, φ_1), (U_1', V, φ_1'), (U_2, V_2, φ_2) e (U_2', V, φ_2'), onde:

- $U_1 = \{(x, y, z) \in H : x > 0\}$, $U_1' = \{(x, y, z) \in H : x < 0\}$, $U_2 = \{(x, y, z) \in H : y > 0\}$, $U_2' = \{(x, y, z) \in H : y < 0\}$;
- $V = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 : u^2 - t^2 + 1 > 0\}$;
- $\varphi_1(t, u) = \big(\sqrt{u^2 - t^2 + 1}, t, u\big)$, $\varphi_1'(t, u) = \big(-\sqrt{u^2 - t^2 + 1}, t, u\big)$, $\varphi_2(t, u) = \big(t, \sqrt{u^2 - t^2 + 1}, u\big)$, $\varphi_2'(t, u) = \big(t, -\sqrt{u^2 - t^2 + 1}, u\big)$.

O leitor pode verificar que se trata de um atlas. Vamos calcular as funções de transição. Temos que $\varphi_2^{-1}\varphi_1(t, u) = (s, v)$ equivale a $\varphi_2(s, v) = \varphi_1(t, u)$, ou seja, $(s, \sqrt{v^2 - s^2 + 1}, v) = (\sqrt{u^2 - t^2 + 1}, t, u)$. Observando a primeira e a terceira componente, vemos que $\varphi_2^{-1}\varphi_1(t, u) = (\sqrt{u^2 - t^2 + 1}, u)$. O leitor pode calcular de modo análogo as outras funções de transição. $\diamondsuit$

Exercício 1.5. *Calcule as funções de transição do atlas de S^n e do de C^n definidos no Exercício 1.1.11.*

Resolução. Compondo (1) com (4) obtemos:

$$\begin{aligned}
\varphi'^{-1}\varphi(x) &= -e_{n+1} + \tfrac{1}{\varphi_{n+1}(x)+1}(\varphi(x) + e_{n+1}) \\
&= -e_{n+1} + \tfrac{1}{\left(1-\frac{2}{\|x\|^2+1}\right)+1}\Big(e_{n+1} + \tfrac{2}{\|x\|^2+1}(x - e_{n+1}) + e_{n+1}\Big) \\
&= -e_{n+1} + \tfrac{1}{1-\frac{1}{\|x\|^2+1}}\Big(e_{n+1} + \tfrac{1}{\|x\|^2+1}(x - e_{n+1})\Big) \\
&= -e_{n+1} + \tfrac{\|x\|^2+1}{\|x\|^2} \cdot \tfrac{(\|x\|^2+1)e_{n+1}+(x-e_{n+1})}{\|x\|^2+1} \\
&= -e_{n+1} + \big(1 + \tfrac{1}{\|x\|^2}\big)e_{n+1} + \tfrac{x}{\|x\|^2} - \tfrac{1}{\|x^2\|}e_{n+1} \\
&= \tfrac{x}{\|x\|^2}.
\end{aligned}$$

Trata-se da única função de transição deste atlas de S^n. A de C^n é a mesma, dado que o atlas correspondente foi obtido por composição com o homeomorfismo $f \colon C^n \to S^n$. $\diamondsuit$

Exercício 1.6. *Encontre um atlas do espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$, definido no Exemplo 1.4.14, e calcule as funções de transição correspondentes.*

Resolução. Como sugerido no Exemplo 1.4.14, consideremos as cartas locais (U_i, B^n, φ_i) e (U'_i, B^n, φ_i) de S^n definidas na Proposição 1.1.8. Seja $\pi\colon S^n \to \mathbb{RP}^n$ a projeção ao quociente e seja $\bar{U}_i := \pi(U_i) = \pi_{U'_i}$. Ficam definidas as cartas $(\bar{U}_i, B^n, \bar{\varphi}_i)$, sendo $\bar{\varphi}_i := \pi \circ \varphi_i$. Obtemos o atlas $\Phi = \{(\bar{U}_i, B^n, \bar{\varphi}_i)\}_{i\in\{1,\ldots,n+1\}}$.

Vamos calcular as funções de transição correspondentes. Temos que $\bar{U}_i = \{[x] \in \mathbb{RP}^n : x_i \neq 0\}$, logo $\bar{U}_{ij} = \{[x] \in \mathbb{RP}^n : x_i, x_j \neq 0\}$. Portanto, supondo $i < j$, temos que $\bar{\varphi}_i^{-1}(\bar{U}_{ij}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in B^n : x_{j-1} \neq 0\}$ é formado por duas componentes conexas $B^n_{(j-1)+}$ e $B^n_{(j-1)-}$, definidas respetivamente por $x_{j-1} > 0$ e $x_{j-1} < 0$. Analogamente, $\bar{\varphi}_j^{-1}(\bar{U}_{ij}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in B^n : x_i \neq 0\}$ é formado por duas componentes conexas B^n_{i+} e B^n_{i-}. Temos que $\bar{\varphi}_j^{-1} \circ \bar{\varphi}_i|_{B^n_{(j-1)+}} : B^n_{(j-1)+} \to B^n_{i+} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$, portanto coincide com a fórmula (7). Ademais, $\bar{\varphi}_j^{-1} \circ \bar{\varphi}_i|_{B^n_{(j-1)-}} : B^n_{(j-1)-} \to B^n_{i-} = \varphi_j^{-1} \circ \iota_{n+1} \circ \varphi_i$, sendo $\iota_{n+1}(x) = -x$, portanto coincide com a fórmula (7) multiplicando por -1 todas as entradas.

Também podemos definir $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, sendo $x \sim \lambda x$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Denotamos por $[x_1 : \ldots : x_{n+1}]$ a classe de equivalência de $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. O homeomorfismo com o modelo anterior pode ser construído facilmente observando que cada classe $[x_1 : \ldots : x_{n+1}]$, que é uma reta "furada" na origem, intercepta $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ em dois pontos antipodais. Seja $\bar{U}_i := \{[x_1 : \ldots : x_{n+1}] : x_i \neq 0\}$. Cada $\bar{U}_i$ é aberto e coincide com o aberto $\bar{U}_i$ do atlas anterior através do homeomorfismo indicado. Fica definido o atlas $\Psi = \{(\bar{U}_i, \mathbb{R}^n, \psi_i)\}_{i=1,\ldots,n+1}$, onde $\psi_i(x_1, \ldots, x_n) := [x_1 : \ldots : 1 : \ldots : x_n]$, o 1 sendo colocado na posição i-ésima. Observamos que $\psi_i^{-1}[x_1 : \ldots : x_{n+1}] = \big(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\big)$. A partir desta observação é fácil verificar que ψ_i é um homeomorfismo. As funções de transição $\psi_{ij} := \psi_j^{-1} \circ \psi_i$, com $i < j$, são definidas por

$$(\star) \qquad \psi_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \Big(\frac{x_1}{x_{j-1}}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_{j-1}}, \frac{1}{x_{j-1}}, \frac{x_i}{x_{j-1}}, \ldots, \frac{x_{j-2}}{x_{j-1}}, \frac{x_j}{x_{j-1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{j-1}}\Big).$$

Os dois atlas que construímos estão relacionados da seguinte maneira. Dado um ponto $x \in U_i \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, o ponto $\bar{\varphi}_i^{-1}(x) \in B^n$ é obtido projetado x em $\mathbb{R}^n$ ortogonalmente na direção da coordenada i-ésima. Considerando a única reta que passa pela origem e por x, a interseção com o hiperplano $x_i = 1$ corresponde a $\psi_i^{-1}(x)$. Em particular, temos a função de transição entre cartas correspondentes $\psi_i^{-1} \circ \bar{\varphi}_i(x) = \big(\frac{x_1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\big)$. ♢

Exercício 1.7. *Seja $\mathbb{CP}^n$ o espaço projetivo complexo de dimensão (complexa) n, descrito como o quociente da esfera $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ pela seguinte relação de equivalência:*

$$(z_1, \ldots, z_{n+1}) \sim (e^{i\theta} z_1, \ldots, e^{i\theta} z_{n+1}) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Demonstre que $\mathbb{CP}^n$ é uma variedade topológica de dimensão (real) $2n$ encontrando um atlas e calcule as funções de transição correspondentes.

RESOLUÇÃO. A definição $\mathbb{CP}^n := S^n/\sim$ equivale à $\mathbb{CP}^n := (\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$, sendo $x \sim \lambda x$ para todo $x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Denotamos por $[x_1 : \ldots : x_{n+1}]$ a classe de equivalência de $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. O homeomorfismo entre os dois modelos pode ser construído facilmente observando que a relação de equivalência introduzida em S^{2n+1} é a restrição da relação definida em $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$. Seja $\bar{U}_i := \{[x_1 : \ldots : x_{n+1}] : x_i \neq 0\}$. Cada $\bar{U}_i$ é aberto e fica definido o atlas $\Psi = \{(\bar{U}_i, \mathbb{C}^n, \psi_i)\}_{i=1,\ldots,n+1}$, sendo $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ ignorando a estrutura complexa, onde $\psi_i(x_1, \ldots, x_n) := [x_1 : \ldots : 1 : \ldots : x_n]$, o 1 sendo colocado na posição i-ésima. Observamos que $\psi_i^{-1}[x_1 : \ldots : x_{n+1}] = \big(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\big)$. A partir desta observação é fácil verificar que ψ_i é um homeomorfismo. As funções de transição $\psi_{ij} := \psi_j^{-1} \circ \psi_i$, com $i < j$, são definidas por

$$(\#) \qquad \psi_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \Big(\frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_{i+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\Big). \qquad \diamondsuit$$

EXERCÍCIO 1.8. *Encontre um atlas da faixa de Möbius aberta, definida no Exemplo 1.4.15, e calcule as funções de transição correspondentes.*

RESOLUÇÃO. Consideremos os seguintes subconjuntos abertos de $\mathbb{R} \times (-1, 1)$:

$$V_1 = \big(0, \tfrac{2}{3}\big) \times (-1,1) \qquad V_2 = \big(\tfrac{1}{3}, 1\big) \times (-1,1) \qquad V_3 = \big(\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}\big) \times (-1,1).$$

Considerando a projeção $\pi\colon \mathbb{R} \times (-1,1) \twoheadrightarrow M$, seja $U_i := \pi(V_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Fica definido o atlas $\Phi = \{(U_i, V_i, \pi_i)\}_{i\in\{1,2,3\}}$, sendo $\pi_i := \pi|_{V_i}\colon V_i \to U_i$. Cada π_i é um homeomorfismo, pois é um homeomorfismo local bijetor.

Para calcular as funções de transição, observamos que $U_{12} = \pi\big(\big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\big) \times (-1, 1)\big)$. Como a relação de equivalência $(x, y) \sim (x + 1, -y)$ age trivialmente em $\big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\big) \times (-1, 1)$, temos que $\varphi_{12} := \pi_2^{-1} \circ \pi_1 = \mathrm{id}$. Analogamente, $U_{23} = \pi\big(\big(\frac{2}{3}, 1\big) \times (-1, 1)\big)$, portanto $\varphi_{23} := \pi_3^{-1} \circ \pi_2 = \mathrm{id}$. Enfim, $U_{13} = \pi\big(\big(0, \frac{1}{3}\big) \times (-1, 1)\big)$. Neste caso, $\pi_1^{-1}(U_{13}) = \big(0, \frac{1}{3}\big) \times (-1, 1)$ e $\pi_3^{-1}(U_{13}) = \big(1, \frac{4}{3}\big) \times (-1, 1)$. A condição $(x', y') = \pi_3^{-1} \circ \pi_1(x, y)$ equivale à $\pi_3(x', y') = \pi_1(x, y)$, ou seja $(x', y') \sim (x, y)$, portanto $\varphi_{13}(x, y) = (x + 1, -y)$. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 1.9. *Seja K a garrafa de Klein, descrita como o quociente de $\mathbb{R}^2$ pela seguinte relação de equivalência:*

$$(x, y) \sim (x + 1, y) \qquad\qquad (x, y) \sim (-x, y + 1).$$

(1) *Mostre que K é uma variedade topológica de dimensão 2.*
(2) *Encontre um atlas de K e calcule as funções de transição correspondentes.*

RESOLUÇÃO. Observamos que $(x', y') \sim (x, y)$ se, e somente se, existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $x' = (-1)^m x + n$ e $y' = y + m$. Isso implica que:

- se $(x', y') \sim (x, y)$ e $(x', y') \neq (x, y)$, então $|y' - y| \geq 1$ ou $|x' - x| \geq 1$, em particular $\|(x', y') - (x, y)\| \geq 1$. Portanto, a relação $\sim$ age trivialmente em quadrados abertos da forma $(x, x+1) \times (y, y+1)$ e em bolas de raio menor ou igual a 1;
- todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é equivalente a um par $(t, u) \in [0, 1] \times [0, 1]$, portanto $K \approx ([0, 1] \times [0, 1])/\sim$, onde $(0, u) \sim (1, u)$ e $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$.

Com esta premissa, podemos resolver o exercício.

(1) A projeção $\pi\colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow K$ é um homeomorfismo local. De fato, para cada ponto (x, y), a projeção age trivialmente na bola $B_1(x, y)$, portanto a restrição de π a $B_1(x, y)$ é um homeomorfismo e a imagem é aberta em K. Só falta verificar que K é de Hausdorff. Vimos que qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$ é equivalente a um ponto em $[0, 1] \times [0, 1]$. É fácil verificar que dois pontos quaisquer de $[0, 1] \times [0, 1]$, projetados ao quociente, admitem duas vizinhanças separadas em K, logo K é de Hausdorff. Por causa da Proposição 1.4.12, K é uma superfície topológica.

(2) Consideremos os seguintes nove subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$: $V_{ij} := \left(\frac{i}{3}, \frac{i+2}{3}\right) \times \left(\frac{j}{3}, \frac{j+2}{3}\right)$ para $i, j = 0, 1, 2$. Seja $U_{ij} := \pi(V_{ij})$, sendo $\pi\colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow K$ a projeção ao quociente, e seja $\pi_{ij} := \pi|_{V_{ij}}\colon V_{ij} \to U_{ij}$. Fica definido o atlas $\Phi = \{(U_{ij}, V_{ij}, \pi_{ij})\}_{i,j\in\{0,1,2\}}$. Cada π_{ij} é um homeomorfismo, pois é um homeomorfismo local bijetor.

Observamos que duas cartas quaisquer de Φ têm interseção não vazia, portanto ficam definidas $\binom{9}{2} = 36$ funções de transição. Seja $\varphi_{ij,i'j'} := \pi_{i'j'}^{-1} \circ \pi_{ij}$. Distinguimos os seguintes casos:

Caso I: $|i' - i| \leq 1$ e $|j' - j| \leq 1$. Neste caso $\varphi_{ij,i'j'} = \mathrm{id}$, dado que as duas cartas estão contidas em um quadrado aberto da forma $(x, x + 1) \times (y, y + 1)$.

Caso II: $|i' - i| = 2$ e $|j' - j| \leq 1$. Neste caso $\varphi_{ij,i'j'}(x, y) = (x + 1, y)$ se $i = 0$ e $i' = 2$ e $\varphi_{ij,i'j'}(x, y) = (x - 1, y)$ se $i = 2$ e $i' = 0$. De fato, dado que as duas cartas estão contidas em uma faixa horizontal da forma $\mathbb{R} \times (y, y + 1)$, só a relação $(x, y) \sim (x + 1, y)$ pode agir de modo não trivial.

Caso III: $|i' - i| \leq 1$ e $|j' - j| = 2$. Neste caso $\varphi_{ij,i'j'}(x, y) = (1 - x, y + 1)$ se $j = 0$ e $j' = 2$ e $\varphi_{ij,i'j'}(x, y) = (1 - x, y - 1)$ se $j = 2$ e $j' = 0$. De fato, dado que as duas cartas estão contidas em uma faixa vertical da forma $(x, x + 1) \times \mathbb{R}$, só a relação $(x, y) \sim (1 - x, y + 1)$ pode agir de modo não trivial.

Caso IV: $|i' - i| = |j' - j| = 2$. Neste caso $\varphi_{00,22}(x, y) = (1 - x, y + 1)$ e $\varphi_{02,20}(x, y) = (2 - x, y + 1)$. ♢

CAPíTULO 2

Exercícios da seção 2.8

Parte I.

EXERCÍCIO 2.1. *Verifique que o gráfico da função* $y = \sqrt[3]{x}$ *é uma variedade suave mergulhada em* $\mathbb{R}^2$*, embora esta função não seja suave.*

RESOLUÇÃO. Seja X o gráfico da função $y = \sqrt[3]{x}$. Fica definida a carta suave global $(X, \mathbb{R}, t \mapsto (t^3, t))$. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.2. *Seja* $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 = x^2\}$*. Demonstre que* X *é uma variedade topológica mergulhada em* $\mathbb{R}^2$*, mas não é uma variedade suave mergulhada.*

RESOLUÇÃO. Fica definida a carta topológica global $\big(X, \mathbb{R}, t \mapsto (t, \sqrt[3]{t^2})\big)$. Se X fosse uma variedade suave, localmente na origem seria o gráfico de uma função suave $y = y(x)$ ou $x = x(y)$ pela Proposição 2.1.18. Todavia, $y = \sqrt[3]{x^2}$ não é diferenciável em $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{y^3}$ não é uma função em nenhuma vizinhança de $(0, 0)$. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.3. *Seja* $V \subset \mathbb{R}^n$ *um subespaço vetorial. Demonstre que* V *é uma variedade suave mergulhada, a qual admite uma carta global.*

RESOLUÇÃO. Seja $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_k\}$ uma base de V. Fica definida a carta suave global $(V, \mathbb{R}^k, \varphi)$, sendo $\varphi(x_1, \dots, x_k) := x_1 a_1 + \cdots + x_k a_k$. Claramente φ é suave, sendo linear. Para demonstrar que φ^{-1} é suave, completemos $\mathcal{A}$ a uma base $\mathcal{A}' := \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e consideremos a função $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \mapsto (x_1, \dots, x_k)$. A função Φ é suave, sendo linear, e $\Phi|_V = \varphi^{-1}$. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.4. *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *uma variedade suave mergulhada de dimensão* k*. Demonstre que, para todo* $x_0 \in X$*, existem uma vizinhança* Ω *de* x_0 *em* $\mathbb{R}^n$ *e uma função suave* $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$ *tais que* $\Omega \cap X = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$ *e* df_x *é sobrejetor para todo* $x \in \Omega$*.*

RESOLUÇÃO. Pela Proposição 2.1.18, a menos de permutar as coordenadas de $\mathbb{R}^n$, existem uma carta local (U, V, φ) de X em x_0, uma vizinhança aberta $\Omega = V \times W$ de x_0 em $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e uma função suave $g \colon V \to W$ tais que $U = \Omega \cap X$ e $\varphi(t) = (t, g(t))$ para todo $t \in V$. Seja $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_2 - g(x_1)$. Temos que $(x_1, x_2) \in U$ se, e somente se, $f(x_1, x_2) = 0$. Ademais, para todo $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, temos que $Jf_x = [-Jg_{x_1} \mid I]$. Por causa da identidade, o posto de Jf_x é $n - k$, logo df_x é sobrejetor. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.5. *Encontre um atlas suave do espaço projetivo* $\mathbb{RP}^n$*, definido no Exemplo 1.4.14.*

RESOLUÇÃO. Os dois atlas construídos na resolução do Exercício 1.6 são suaves. De fato, as funções de transição do atlas Φ coincidem com as da esfera, portanto são descritas pela fórmula (7). É claro que se trata de funções suaves, pois, como $(x_1, \dots, x_n) \in B^n$, o argumento da raiz quadrada é sempre estritamente positivo. A respeito do atlas Ψ, também é claro que as funções de transição $(\star)$ são suaves.[1] $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.6. *Encontre um atlas suave do espaço projetivo $\mathbb{CP}^n$, definido no Exercício 1.7.*

RESOLUÇÃO. O atlas construído na resolução do Exercício 1.7 é suave. De fato, é claro que as funções de transição (#) são suaves como funções reais, sendo holomorfas como funções complexas. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.7. *Encontre um atlas suave da faixa de Möbius aberta, definida no Exemplo 1.4.15.*

RESOLUÇÃO. O atlas construído na resolução do Exercício 1.8 é suave. De fato, a única função de transição diferente da identidade é $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$, que é evidentemente um difeomorfismo. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.8. *Seja K a garrafa de Klein, descrita no Exercício 1.9. Encontre um atlas suave de K.*

RESOLUÇÃO. O atlas construído na resolução do Exercício 1.9 é suave. De fato, as funções de transição diferentes da identidade são da forma $(x, y) \mapsto (x \pm 1, y)$, $(x, y) \mapsto (1 - x, y \pm 1)$ e $(x, y) \mapsto (2 - x, y + 1)$, portanto é evidentemente que são difeomorfismos. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.9. *Seja $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. Seja $f \colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função suave. Demonstre que, para todo $x \in \mathbb{H}^n$, o diferencial $df_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está bem definido.*

RESOLUÇÃO. Só devemos verificar o enunciado para $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \partial\mathbb{H}^n$. Sejam U uma vizinhança aberta de $\mathbb{H}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e $F \colon U \to \mathbb{R}^m$ uma função suave tal que $F|_{\mathbb{H}^n} = f$. Definimos $df_{\tilde{x}} := dF_{\tilde{x}}$. Vamos verificar que não depende da escolha de F e U. De fato, todas as retas $r(t) = \tilde{x} + te_i$, para $1 \leq i \leq n - 1$, estão contidas em $\mathbb{H}^n$, portanto $\partial_i F(\tilde{x}) = \partial_i f(\tilde{x})$. Só falta considerar o caso $i = n$. Neste caso a semirreta $r(t) = \tilde{x} + te_n$, $t \geq 0$, está contida em $\mathbb{H}^n$, portanto fica definido $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(\tilde{x}+te_n)-f(\tilde{x})}{t}$. Como F é diferenciável, $\partial_n F(\tilde{x})$ tem que coincidir com este limite, portanto toda a matriz jacobiana $JF_{\tilde{x}}$ só depende de f. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.10. *Verifique que a função $f \colon S^1 \to S^1$, $e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta}$, é suave, usando a definição de função suave entre variedades mergulhadas (ou seja, a Definição 2.1.1).*

[1] Em ambos os casos mostramos as funções de transição supondo que $i < j$, mas as inversas têm a mesma forma com $j < i$, portanto são também suaves.

Resolução. Consideremos a função holomorfa $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, que corresponde à função suave $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $re^{i\theta} \mapsto r^2 e^{2i\theta}$. A função $f\colon S^1 \to S^1$, considerada no texto do exercício, é a restrição de F, portanto é suave por definição. ♢

Exercício 2.11. *Verifique que a função $f\colon S^1 \to S^1$, $e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta}$, é suave, utilizando um atlas de S^1 conforme a Proposição 2.3.1.*

Resolução. Consideremos o atlas construído na demonstração da Proposição 1.1.8. Por simplicidade, definimos $U_3 := U_1'$ e $U_4 := U_2'$. Seja $z = e^{i\theta} \in S^1$ e suponhamos que $z \in U_i$ e $z^2 \in U_j$. Escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que, definindo $\exp\colon \mathbb{R} \to S^1$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$, valha $\Omega := \exp(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon) \subset U_i$ e $\Theta := \exp(2\theta - 2\varepsilon, 2\theta + 2\varepsilon) \subset U_j$. Desta maneira $f(\Omega) = \Theta$, portanto fica definida a composição $\tilde{f} := \varphi_j^{-1} \circ f \circ \varphi_i\colon \varphi_i^{-1}(\Omega) \to \varphi_j^{-1}(\Theta)$. Vamos demonstrar que $\tilde{f}$ é de classe C^∞; como isso vale para qualquer z fixado, obtemos a tese. Se $z = (x, y)$, temos que $z^2 = (x^2 - y^2, 2xy)$. Portanto, se $i = 1, 3$ e $j = 1, 3$, temos que:

$$\tilde{f}(t) = \varphi_j^{-1} \circ f\big(t, \pm\sqrt{1-t^2}\big) = \varphi_j^{-1}\big(2t^2 - 1, \pm 2t\sqrt{1-t^2}\big) = 2t^2 - 1.$$

Se $i = 1, 3$ e $j = 2, 4$, temos que:

$$\tilde{f}(t) = \varphi_j^{-1} \circ f\big(t, \pm\sqrt{1-t^2}\big) = \varphi_j^{-1}\big(2t^2 - 1, \pm 2t\sqrt{1-t^2}\big) = \pm 2t\sqrt{1-t^2}.$$

Se $i = 2, 4$ e $j = 1, 3$, temos que:

$$\tilde{f}(t) = \varphi_j^{-1} \circ f\big(\pm\sqrt{1-t^2}, t\big) = \varphi_j^{-1}\big(1 - 2t^2, \pm 2t\sqrt{1-t^2}\big) = 1 - 2t^2.$$

Enfim, se $i = 2, 4$ e $j = 2, 4$, temos que:

$$\tilde{f}(t) = \varphi_j^{-1} \circ f\big(\pm\sqrt{1-t^2}, t\big) = \varphi_j^{-1}\big(1 - 2t^2, \pm 2t\sqrt{1-t^2}\big) = \pm 2t\sqrt{1-t^2}.$$

Como $t \in (-1, 1)$, os argumentos das raízes quadradas são estritamente positivos, portanto se trata de funções de classe C^∞. ♢

Exercício 2.12. *Sejam X, Y e Z variedades suaves e $f = (f_1, f_2)\colon Z \to X \times Y$ uma função. Demonstre que:*

(1) *as projeções $\pi_X\colon X \times Y \to X$ e $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ são suaves;*
(2) *f é suave se, e somente se, f_1 e f_2 são suaves.*

Resolução. (1) Seja $(x, y) \in X \times Y$. Fixemos uma carta local (U, V, φ) de X em x e uma carta local (U', V', ψ) de Y em y. Fica definida a carta local $(U \times U', V \times V', \varphi \times \psi)$ de $X \times Y$ em (x, y). Seja $\tilde{\pi}_X := \varphi^{-1} \circ \pi_X \circ (\varphi \times \psi)\colon V \times V' \to V$. Temos que $\tilde{\pi}(t, t') = t$, logo é de classe C^∞. Isso demonstra que π_X é suave. Um argumento análogo vale para π_Y.

(2) ($\Rightarrow$) Temos que $f_1 = \pi_1 \circ f$ e $f_2 = \pi_2 \circ f$, portanto o resultado segue imediatamente do item anterior. ($\Leftarrow$) Sejam $z \in Z$ e $f(z) = (x, y) \in X \times Y$. Fixemos uma carta local (U, V, φ) de X em x e uma carta local (U', V', ψ) de Y em y. Fica definida a carta local $(U \times U', V \times V', \varphi \times \psi)$ de $X \times Y$ em (x, y). Fixemos também uma carta local (U'', V'', η) de Z em z. Sejam $\tilde{f} := (\varphi \times \psi)^{-1} \circ f \circ \eta\colon V'' \to V \times V'$, $\tilde{f}_1 := \varphi^{-1} \circ f_1 \circ \eta\colon V'' \to V$ e $\tilde{f}_2 := \psi^{-1} \circ f_2 \circ \eta\colon V'' \to V'$. Por hipótese $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ são

de classe C^∞. Temos que $\tilde{f}(t) = \big(\tilde{f}_1(t), \tilde{f}_2(t)\big)$, logo é de classe C^∞ também. Isso demonstra que f é suave. $\diamondsuit$

Exercício 2.13. *Sejam $(X, \Phi_{\mathfrak{U}})$ e $(Y, \Psi_{\mathfrak{V}})$ variedades suaves. Denotamos por $C^0(X)$ o espaço vetorial real das funções contínuas de X a $\mathbb{R}$ e por $C^\infty(X)$ o subespaço vetorial formado pelas funções suaves. O mesmo vale para Y. Seja $F\colon Y \to X$ uma função contínua e consideremos a função $F^*\colon C^0(X) \to C^0(Y)$, $f \mapsto f \circ F$.*

- *Demonstre que F^* é uma função linear.*
- *Demonstre que F é suave se, e somente se, $F^*(C^\infty(X)) \subset C^\infty(Y)$.*
- *Demonstre que F é um homeomorfismo se, e somente se, F^* é um isomorfismo.*
- *Demonstre que F é um difeomorfismo se, e somente se, $F^*|_{C^\infty(X)}\colon C^\infty(X) \to C^\infty(Y)$ é um isomorfismo.*

Resolução. (1) Sejam $f, g \in C^0(X)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Temos que $F^*(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g) \circ F = \lambda(f \circ F) + \mu(g \circ F) = \lambda F^*(f) + \mu F^*(g)$.

(2) ($\Rightarrow$) Se F for suave e $f \in C^\infty(X)$, então $F^*(f) = f \circ F$ é suave por ser a composição de duas funções suaves. ($\Leftarrow$) Sejam $y \in Y$ e $x = F(y) \in X$. Demonstremos que existem uma carta suave (U, V, φ) em y e uma carta suave (U', V', ψ) em x tais que $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi\colon V \to V'$ é de classe C^∞. Sejam (U, V, φ) e (U'_1, V'_1, ψ_1) duas cartas quaisquer em y e x. Sendo X regular, existe uma vizinhança U' de x tal que $\overline{U}' \subset U'_1$. Escolhendo uma função de Urysohn suave λ para o par $(\overline{U}', U'_1)$, obtemos uma função suave $\Psi := \lambda\psi_1^{-1}\colon X \to \mathbb{R}^k$ tal que $\Psi|_{U'} = \psi_1^{-1}|_{U'}$, portanto podemos considerar a carta $(U', V', \psi) = (U', \psi_1^{-1}(U'), \psi_1|_{\psi_1^{-1}(U')})$. Desta maneira $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi = \Psi \circ F \circ \varphi$. Seja $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_k)$ e definamos $F^*(\Psi) := (F^*(\Psi_1), \ldots, F^*(\Psi_k))$. Temos que $\Psi \circ F \circ \varphi = F^*(\Psi) \circ \varphi$, logo, sendo a composição de duas funções suaves, é suave.

(3) ($\Rightarrow$) Temos que $(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$. ($\Leftarrow$) Suponhamos que F não seja injetora. Então existem $y_1, y_2 \in Y$ distintos tais que $F(y_1) = F(y_2)$. Por isso, para toda $f \in C^0(X)$, temos que $(F^*f)(y_1) = (F^*f)(y_2)$. Isso implica que F^* não é sobrejetora, pois existe uma função contínua $g \in C^0(Y)$ tal que $g(y_1) \neq g(y_2)$: é suficiente considerar uma vizinhança U_1 de y_1 que não contém y_2, uma vizinhança U de y_1 tal que $\overline{U} \subset U_1$ e uma função de Urysohn associada ao par $(\overline{U}, U_1)$. Suponhamos agora que F não seja sobrejetora. Se existir um aberto $U \subset X \setminus F(Y)$, então existe uma função contínua não nula, com suporte contido em U. Neste caso $F^*f = 0$, portanto F^* não é injetor. Isso mostra que a imagem $F(Y)$ é densa em X. Se Y for compacta, então $F(Y)$ é fechado em X, portanto, sendo denso, coincide com X. Se Y não for compacta, seja por absurdo $x \in X \setminus F(Y)$. Então existe uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $F(y_n) \to x$. Necessariamente $y_n \to \infty$, pois, se existisse uma subsequência $y_{n_k} \to y$, teríamos que $F(y_{n_k}) \to F(y) = x$, logo $x \in \mathrm{Im}F$, contra a hipótese. Seja agora $g\colon Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $g(y_n) \to \infty$: esta função não pode estar na imagem de F^*, pois $(F^*f)(y_n) = f(F(y_n)) \to f(x) \in \mathbb{R}$. Isso mostra que F é sobrejetora. Portanto, F é uma função contínua e bijetora entre variedades topológicas, portanto é um homeomorfismo.

(4) ($\Rightarrow$) Temos que $(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$. ($\Leftarrow$) Com a mesma demonstração do item 3, podemos verificar que F é bijetora, portanto um homeomorfismo. Seja $G = F^{-1}$. Consideremos $G^*\colon C^0(Y) \to C^0(X)$. Como G é um homeomorfismo, G^* é um isomorfismo. Ademais, sendo F^* um isomorfismo, toda função $g \in C^\infty(Y)$ é da forma $g = f \circ F$, logo $G^*(g) = g \circ G = f \circ F \circ G = f$, portanto $G^*(C^\infty(Y)) \subset C^\infty(X)$. Pelo item 2 G é suave, portanto F é um difeomorfismo (e também G). $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.14. *Sejam* $(X, \Phi_{\mathfrak{U}})$ *e* $(X, \Psi_{\mathfrak{V}})$ *duas variedades suaves, baseadas na mesma variedade topológica* X*. Demonstre que* $(X, \Phi_{\mathfrak{U}}) = (X, \Psi_{\mathfrak{V}})$ *se, e somente se, a identidade* $\mathrm{id}\colon (X, \Phi_{\mathfrak{U}}) \to (X, \Psi_{\mathfrak{V}})$ *é um difeomorfismo.*

RESOLUÇÃO. A identidade é um difeomorfismo se, e somente se, $\psi^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \varphi\colon V \to V'$ é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^k$ para todo par de cartas $(U, V, \varphi) \in \Phi_{\mathfrak{U}}$ e $(U', V', \psi) \in \Psi_{\mathfrak{V}}$. Isso equivale ao fato que $\psi^{-1} \circ \varphi$ seja um difeomorfismo, ou seja, que (U, V, φ) e (U', V', ψ) sejam compatíveis. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.15. *Demonstre a Observação 2.3.17.*

RESOLUÇÃO. (1) Fixado $z \in Z$, seja $V \subset Z$ uma vizinhança aberta de z tal que $g(V) \subset Y$ é aberto e $g|_V\colon V \to g(V)$ é um difeomorfismo. Seja $U \subset Y$ uma vizinhança aberta de $g(z)$ tal que $f(U) \subset X$ é aberto e $f|_U\colon U \to f(U)$ é um difeomorfismo. Seja $W := V \cap g^{-1}(U)$. Claramente W é uma vizinhança aberta de z, $f \circ g(W)$ é aberto em X e $(f \circ g)|_W\colon W \to f \circ g(W)$ é um difeomorfismo.

(2) f é bijetora e suave por hipótese, portanto devemos demonstrar que f^{-1} é suave. Fixado $x \in X$, seja $y = f^{-1}(x)$. Por hipótese existe uma vizinhança aberta U de y tal que $f|_U\colon U \to f(U)$ é um difeomorfismo, logo $f^{-1}|_{f(U)}\colon f(U) \to U$ é suave, sendo $f(U)$ uma vizinhança aberta de x. Isso mostra que f^{-1} é suave em todo $x \in X$, logo é suave.

(3) Para qualquer $y \in \Omega$ fixado, seja U uma vizinhança aberta de y em Y tal que $f(U)$ é aberto em X e $f|_U\colon U \to f(U)$ é um difeomorfimo. Seja $U' := U \cap \Omega$. Temos que U' é uma vizinhança aberta de y em Ω. Além disso, $f(U')$ é aberto em X, por ser aberto em $f(U)$, e está contido em Θ, sendo $f(\Omega) = \Theta$, portanto $f(U')$ é aberto em Θ. Enfim, $f|_{U'}\colon U' \to f(U')$ é um difeomorfismo, dado que $U' \subset U$ e $f(U') \subset f(U)$. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.16. *Seja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um difeomorfismo local. Demonstre que a imagem de* f *é um intervalo aberto* (a, b)*, sendo* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$*, e que* $\bar{f}\colon \mathbb{R} \to (a, b)$*,* $x \mapsto f(x)$*, é um difeomorfismo.*

RESOLUÇÃO. Sendo f contínua, $f(\mathbb{R})$ é um intervalo. Sendo f um difeomorfismo local, a imagem de f é aberta em $\mathbb{R}$, portanto é um intervalo aberto. Sendo f um difeomorfismo em uma vizinhança de cada ponto, necessariamente $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo, pelo Teorema dos Valores Intermediários, temos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por isso, f é estritamente crescente ou estritamente decrescente, logo $\bar{f}\colon \mathbb{R} \to (a, b)$ é bijetora. Pela Observação 2.3.17, item 2, $\bar{f}$ é um difeomorfismo. $\diamondsuit$

Parte II.

Exercício 2.17. *Sejam X e Y variedades suaves (conexas por definição). Seja $f\colon Y \to X$ uma função suave tal que $df_y = 0$ para todo $y \in Y$. Demonstre que f é uma função constante.*

Resolução. Sejam $y_0 \in Y$ e $x_0 = f(y_0)$. Seja $A = \{y \in Y : f(y) = x_0\}$. Demonstremos que A é aberto e fechado em Y, portanto, sendo Y conexa e $y_0 \in Y$, temos que $A = Y$. Sejam $y \in Y$, (U, V, φ) uma carta de Y em y e (U', V', ψ) uma carta de X em $f(y)$. Por definição U e U' são conexos. Seja $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon V \to V'$. Temos que $0 = df_y = d(\psi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1})_y = d\psi_{\psi^{-1}(f(y))} \circ d\tilde{f}_{\varphi^{-1}(y)} \circ d(\varphi^{-1})_y$ para todo $y \in U$. Como $d\psi_{\psi^{-1}(f(y))}$ e $d(\varphi^{-1})_y$ são isomorfismos, podemos concluir que $d\tilde{f}_z = 0$ para todo $z \in V$. Dado que V e V' são abertos euclidianos conexos, $\tilde{f}$ é constante, logo $f = \psi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$ é constante também. Isso prova que, se $y \in A$, então $U \subset A$, enquanto, se $y \notin A$, então $U \subset X \setminus A$, portanto A e $X \setminus A$ são abertos. ♢

Exercício 2.18. *Sejam X e Y variedades diferenciáveis de dimensão n e $f\colon Y \to X$ uma função suave e bijetora. Demonstre que f é um difeomorfismo se, e somente se, df_y é inversível para todo $y \in Y$.*

Resolução. $(\Rightarrow)$ $(df_y)^{-1} = d(f^{-1})_{f(y)}$. $(\Leftarrow)$ Só devemos provar que f^{-1} é suave. Sejam $x \in X$ e $y = f^{-1}(x) \in Y$. Como df_y é inversível, pelo Teorema da Função Inversa existem uma vizinhança U de y e uma vizinhança U' de x tal que $f(U) = U'$ e $f|_U\colon U \to U'$ é um difeomorfismo. Isso mostra que $f^{-1}|_{U'}$ é suave, portanto f^{-1} é suave em todo ponto de X. ♢

Exercício 2.19. *Seja $M(n;\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais. Seja $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \subset M(n;\mathbb{R})$ o subconjunto formado pelas matrizes inversíveis.*

(1) *Demonstre cada uma das duas componentes conexas de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ tem uma estrutura natural de variedade suave de dimensão n^2.*
(2) *Demonstre que o determinante $\det\colon M(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma função suave.*
(3) *Demonstre que a inversão $\iota\colon \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$, é um difeomorfismo.*
(4) *Para $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ fixada, calcule o diferencial $d\iota_A$.*
(5) *Para $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ fixada, calcule o diferencial $d(\det)_A$.*
(6) *Para $A \in M(n;\mathbb{R})$ fixada, calcule o diferencial $d(\det)_A$.*

Resolução. (1) O espaço $M(n;\mathbb{R})$, sendo um espaço vetorial real de dimensão finita, tem uma estrutura natural de variedade suave, ou seja, a única que torna qualquer isomorfismo com $\mathbb{R}^{n^2}$ um difeomorfismo. A topologia correspondente é induzida por qualquer norma, em particular pela norma 0–(89). Portanto, pelo Corolário 0–5.1.6, $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $M(n;\mathbb{R})$. Pelo Corolário 2.2.19, cada uma das duas componentes conexas de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ herda naturalmente uma estrutura de variedade suave.

(2) Seja $A = [a_{ij}]$. Temos que $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, sendo S_n o grupo das permutações de n elementos. Pensando nesta fórmula como na função

$\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, está claro que se trata de uma função suave, sendo formada por somas e produtos. Como o isomorfismo entre $M(n;\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^{n^2}$ é um difeomorfismo por construção, temos que $\det\colon M(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma função suave.

(3) Temos que $\iota(A) = A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^C)^T$, sendo '$T$' a transposição e $(A^C)_{ij} := (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, onde A_{ij} é a matriz complementar de índice (i,j). Dado que o determinante é uma função suave, está claro que também ι, pensada como função entre abertos de $\mathbb{R}^{n^2}$, é suave (é formada por somas e produtos e pela fração $\frac{1}{\det A}$). Como o isomorfismo entre $M(n;\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^{n^2}$ é um difeomorfismo por construção, temos que $\iota\colon \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ é uma função suave. Dado que ι é bijetora e $\iota^{-1} = \iota$, se trata de um difeomorfismo.

(4) Como $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \subset M(n;\mathbb{R})$ é um subconjunto aberto, para qualquer $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ temos que $T_A\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) = T_AM(n;\mathbb{R}) \simeq M(n;\mathbb{R})$, o ultimo isomorfismo sendo consequência do difeomorfismo com $\mathbb{R}^{n^2}$. Seja $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ uma curva tal que $\gamma(0) = A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ e seja $X := \gamma'(0) \in M(n,\mathbb{R})$. Temos que $\gamma(t)\gamma(t)^{-1} = I_n$, portanto, derivando ambos os lados, $\gamma(t)(\gamma(t)^{-1})' + \gamma'(t)\gamma(t)^{-1} = 0$, ou seja, $\gamma(t)(\iota\circ\gamma)'(t) + \gamma'(t)(\iota\circ\gamma)(t) = 0$. Avaliando em $t = 0$ obtemos $A\cdot d\iota_A(X) + XA^{-1} = 0$, logo $d\iota_A(X) = -A^{-1}XA^{-1}$. Em particular, para $A = I_n$, obtemos $d\iota_{I_n}(X) = -X$.

(5) Temos que, para toda matriz $X \in M(n;\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\tfrac{\det(A+tX)-\det(A)}{t} &= \det(A)\cdot\lim_{t\to 0}\tfrac{\det(I_n+tA^{-1}X)-1}{t}\\ &= \det(A)\cdot\lim_{t\to 0}\tfrac{1+t\mathrm{Tr}(A^{-1}X)+o(t)-1}{t} = \det(A)\cdot\mathrm{Tr}(A^{-1}X).\end{aligned}$$

Por isso, $d(\det)_A(X) = \det(A)\cdot\mathrm{Tr}(A^{-1}X)$.

(6) Sejam $A = [a_1 \mid \cdots \mid a_n]$ e $X = [x_1 \mid \cdots \mid x_n]$. Temos que:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\tfrac{\det(A+tX)-\det(A)}{t}\\ &\quad= \lim_{t\to 0}\tfrac{\det(A)+t\sum_{i=1}^n\det[a_1|\cdots|x_i|\cdots|a_n]+o(t)-\det(A)}{t}\\ &\quad= \textstyle\sum_{i=1}^n \det[a_1 \mid \cdots \mid x_i \mid \cdots \mid a_n].\end{aligned}$$

Por isso, $d(\det)_A(X) = \sum_{i=1}^n \det[a_1 \mid \cdots \mid x_i \mid \cdots \mid a_n]$. ♢

Exercício 2.20. *Demonstre que o espaço total do fibrado tangente TS^1 é difeomorfo ao cilindro $S^1\times\mathbb{R}$.*

Resolução. Seja $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Temos que $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, logo:

$$TS^1 = \{(\cos t, \sin t, -\lambda\sin t, \lambda\cos t) \in \mathbb{R}^4 : t,\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Consideremos a função:

$$\begin{aligned}\varphi\colon TS^1 &\to S^1\times\mathbb{R}\\ (\cos t, \sin t, -\lambda\sin t, \lambda\cos t) &\mapsto (\cos t, \sin t, \lambda).\end{aligned}$$

Trata-se de uma função suave, pois é a restrição a TS^1 da função $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z,w) \mapsto (x,y,xw-yz)$. Ademais, seja $\Psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y,z) \mapsto (x,y,-zy,zx)$. Claramente Ψ é suave e $\Psi|_{S^1\times\mathbb{R}} = \varphi^{-1}$, portanto φ é inversível e φ^{-1} é suave. ♢

Exercício 2.21. *Demonstre que o hiperboloide de uma folha* $x^2+y^2-z^2-1=0$ *é uma variedade suave mergulhada em* $\mathbb{R}^3$ *e encontre uma base do espaço tangente no ponto* $(1,0,0)$.

Resolução. Seja H o hiperboloide considerado. As cartas locais do atlas construído no Exercício 1.4 são suaves (ou seja, as funções φ_1, φ_1', φ_2 e φ_2' são difeomorfismos), portanto H é uma variedade suave mergulhada em $\mathbb{R}^3$. Como $(1,0,0) \in U_1$ e $\varphi_1(0,0) = (1,0,0)$, o espaço tangente $T_{(1,0,0)}H$ é a imagem de $d(\varphi_1)_{(0,0)}$ em $\mathbb{R}^3$. O leitor pode verificar que

$$J(\varphi_1)_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

portanto $J(\varphi_1)_{(0,0)} \cdot (1,0)^T = (0,1,0)^T$ e $J(\varphi_1)_{(0,0)} \cdot (0,1)^T = (0,0,1)^T$, logo $\{(0,1,0), (0,0,1)\}$ é uma base de $T_{(1,0,0)}H$. ♢

Exercício 2.22. *Demonstre que o conjunto dos pontos de* $\mathbb{R}^3$ *tais que:*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ x+y+z = 2 \end{cases}$$

é uma variedade suave mergulhada e encontre uma base do espaço tangente no ponto $(2,0,0)$.

Resolução. Trata-se da interseção entre uma esfera e um plano, a qual contém pelo menos dois pontos distintos, e.g. $(2,0,0)$ e $(0,2,0)$, portanto é uma circunferência, logo é uma curva suave. A reta tangente em $(2,0,0)$ é a interseção entre o plano tangente à esfera, que é $x=2$, e o plano $x+y+z=2$. Portanto, trata-se da reta

$$\begin{cases} x = 2 \\ y+z = 0, \end{cases}$$

descrita parametricamente por $(x,y,z) = (2,0,0) + t(0,-1,1)$. Logo, uma base do espaço tangente é $(0,-1,1)$.

Observação: Neste resolução utilizamos as características geométricas específicas das variedades envolvidas. Um método bem mais geral consiste em utilizar a noção de *valor regular*, que o leitor aprenderá no Capítulo 3 (v. Definição 3.4.2). ♢

Exercício 2.23. *Demonstre a Proposição 2.4.8 a partir da Proposição 2.4.7.*

Resolução. Seja $v \in \mathbb{R}^n$ e vamos demonstrar que $v \in T_{x_0}U$. De fato, podemos considerar a curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x_0 + tv$. Como U é aberto, $\gamma^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{R}$, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma(-\varepsilon,\varepsilon) \subset U$. Portanto, $\gamma|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ é uma curva tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(0) = v$, logo $v \in T_{x_0}U$ pela Proposição 2.4.7. ♢

Exercício 2.24. *Demonstre a Proposição 2.4.16 a partir do Corolário 2.4.12.*

Resolução. Seja $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to X$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(0) = v$. Considerando o mergulho $i\colon X \hookrightarrow \Omega$, temos que $di_{x_0}(v) = (i \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0) = v$, dado que, pensando em $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, temos que $i \circ \gamma = \gamma$. ♢

Parte III.

EXERCÍCIO 2.25. *Considere o atlas de S^n construído na Proposição 1.1.8. Demonstre que, compondo algumas cartas locais com o difeomorfismo* (39)*, se obtém um atlas orientado. Isso implica que S^n é orientável.*

RESOLUÇÃO. As funções de transição do atlas considerado são dadas por (7) e (8) no Exercício 1.3.7. Vamos calcular o diferencial correspondente. Pondo $u := \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}$, a matriz jacobiana em um ponto genérico $x \in B^n$ é dada por:

$$(\star) \qquad J(\varphi_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{x_1}{u} & \cdots & -\frac{x_{i-1}}{u} & -\frac{x_i}{u} & \cdots & -\frac{x_{j-2}}{u} & -\frac{x_{j-1}}{u} & -\frac{x_j}{u} & \cdots & -\frac{x_n}{u} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a Regra de Laplace à coluna $j - 1$, vemos que

$$\det J(\varphi_{ij}) = (-1)^{i+j} \tfrac{x_{j-1}}{u},$$

portanto o sinal correspondente é $(-1)^{i+j}$. A mesma fórmula (7), portanto o mesmo Jacobiano e o mesmo determinante, valem também para $\varphi_{ij'}$, mas neste caso $x_{j-1} < 0$, portanto o sinal é o oposto. As mesmas considerações valem em relação à formula (8), portanto em relação às funções de transição $\varphi_{i'j}$ e $\varphi_{i'j'}$, mas com sinal oposto em ambos os casos, pois $-\frac{x_{j-1}}{u}$ é substituído por $\frac{x_{j-1}}{u}$. Portanto, os sinais dos determinantes são os seguintes, supondo $i \neq j$:[2]

$$\det J(\varphi_{ij}) \sim (-1)^{i+j} \qquad \det J(\varphi_{ij'}) \sim (-1)^{i+j+1} \qquad \det J(\varphi_{i'j}) \sim (-1)^{i+j+1} \qquad \det J(\varphi_{i'j'}) \sim (-1)^{i+j}.$$

Portanto, compondo com o difeomorfismo (39) as cartas (U_i, B^n, φ_i), com i ímpar, e (U_i', B^n, φ_i'), com i par (ou vice-versa), se obtém um atlas orientado. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.26. *Demonstre que* $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$ *é um campo de vetores normais unitários utilizando um atlas de S^n e verificando que todo vetor pertencente à imagem do diferencial de uma carta local em $x \in S^n$ é ortogonal a* $\mathrm{id}(x)$*, ou seja, a x (cf. Exemplo 2.7.26).*

RESOLUÇÃO. Consideremos o atlas construído na Proposição 1.1.8, em particular a carta local (U_i, B^n, φ_i), onde $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n+1}^2}, x_i, \ldots, x_n)$.

[2]Para $i = j$, obviamente φ_{ii} e $\varphi_{i'i'}$ coincidem com a identidade, enquanto $\varphi_{ii'}$ e $\varphi_{i'i}$ não estão definidas, pois $U_i \cap U_i' = \emptyset$.

Pondo $u = \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}$, temos que:

$$(*) \qquad J(\varphi_i) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{x_1}{u} & \cdots & -\frac{x_{i-1}}{u} & -\frac{x_i}{u} & \cdots & -\frac{x_n}{u} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Por isso $T_{\varphi(x)}S^n$, que coincide com a imagem de $J\varphi_i(x)$, é formado pelos vetores da forma $J\varphi_i(t_1, \ldots, t_n) = \big(t_1, \ldots, t_{i-1}, -\frac{\langle x,t\rangle}{u}, t_i, \ldots, t_n\big)$, logo:

$$\langle J\varphi_i(t_1, \ldots, t_n), (x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_i, \ldots, x_n)\rangle = \langle x, t\rangle - u\frac{\langle x,t\rangle}{u} = 0.$$

O mesmo argumento vale para as demais cartas. Isso mostra que $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$ é um campo de vetores unitários normais, logo S^n é orientável. ♢

Exercício 2.27. *Considere o atlas de S^n construído na Proposição 1.1.8. Estabeleça quais cartas locais são positivamente orientadas em relação à orientação induzida pelo campo de vetores normais* $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$*. Compare o resultado com o Exercício 2.25.*

Resolução. O Jacobiano das funções φ_i é dado pela Fórmula $(*)$ na resolução do Exercício 2.26. Consideremos a origem de B^n, logo a linha i da Fórmula $(*)$ é toda nula. Por isso, denotando por $\{e_1, \ldots e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e por $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ a de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que $(J\varphi_i)_0(e_j) = e_j$ para $1 \leq j \leq i-1$ e $(J\varphi_i)_0(e_j) = e_{j+1}$ para $i \leq j \leq n$. Considerando que $\varphi_i(0) = e_i$, isso significa que a carta (U_i, B^n, φ_i) é positivamente orientada se, e somente se, a base ordenada $\mathcal{A} := \{e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_{n+1}, e_i\}$ é positivamente orientada a respeito da orientação canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. O sinal da base $\mathcal{A}$ é $(-1)^{n-i+1}$, portanto é positivamente orientada se, e somente se, a paridade de i é oposta à de n. No caso de φ'_i, o jacobiano na origem é o mesmo, mas $\varphi'_i(0) = -e_i$, portanto a carta (U_i, B^n, φ_i) é positivamente orientada se, e somente se, i tem a mesma paridade de n.

Portanto, se n for ímpar, para obtermos uma carta positivamente orientada temos que compor com o difeomorfismo (39) as cartas (U_i, B^n, φ_i), com i ímpar, e (U'_i, B^n, φ'_i), com i par, exatamente como fizemos no Exercício 2.25. Se n for par, então temos que fazer o contrário. ♢

Exercício 2.28. *Considere o atlas de S^n construído no Exercício 1.1.11. Demonstre que, compondo uma carta local com o difeomorfismo* (39)*, se obtém um atlas orientado. Isso implica que S^n é orientável.*

Resolução. A única função de transição não trivial foi calculada no Exercício 1.5 e coincide com $\psi(x) := \varphi'^{-1}\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$. Em coordenadas polares se torna $\psi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = \big(\frac{1}{r}, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}\big)$. Portanto, o Jacobiano correspondente é $J\psi = \mathrm{diag}\big(-\frac{1}{r^2}, 1, \ldots, 1\big)$, logo o determinante correspondente é $-\frac{1}{r^2} < 0$. A mudança de coordenadas é irrelevante, dado que um automorfismo respeita ou não a orientação independentemente da base escolhida como representante, portanto o atlas considerado não é orientado. Obviamente, compondo uma das duas cartas com o difeomorfismo (39) se obtém um atlas orientado. ♢

EXERCÍCIO 2.29. *Considere o atlas de S^n construído no Exercício 1.1.11. Estabeleça qual carta local é positivamente orientada em relação à orientação induzida pelo campo de vetores normais* $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$. *Compare o resultado com o Exercício 2.28.*

RESOLUÇÃO. Considerando a Fórmula (1) do Exercício 1.1.11, temos que:

$$\varphi_i(x) = \tfrac{2x_i}{\|x\|^2+1}, \quad 1 \leq i \leq n; \qquad \varphi_{n+1}(x) = 1 - \tfrac{2}{\|x\|^2+1}.$$

Portanto, para $1 \leq i, j \leq n$ temos que:

$$\partial_j \varphi_i(x) = -\tfrac{4x_i x_j}{(\|x\|^2+1)^2}, \quad j \neq i; \qquad \partial_i \varphi_i(x) = -\tfrac{4x_i^2}{(\|x\|^2+1)^2} + \tfrac{2}{\|x\|^2+1}.$$

Para $1 \leq j \leq n$ temos que:

$$\partial_j \varphi_{n+1}(x) = \tfrac{4x_j}{(\|x\|^2+1)^2}.$$

Avaliando as derivadas em $x = 0$, temos que $\partial_i \varphi_i(x) = 2$ e todas as demais são nulas, portanto:

$$J\varphi_0 = \begin{bmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, denotando por $\{e_1, \dots e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e por $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ a de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que $J\varphi_0(e_i) = 2e_i$ para $1 \leq i \leq n$. Considerando que $\varphi(0) = -e_{n+1}$, a carta $(U, \mathbb{R}^n, \varphi)$ é negativamente orientada, dado que a base $\{2e_1, \dots, 2e_n, -e_{n+1}\}$ induz a orientação oposta à canônica.

Considerando a carta φ', a única diferença nas derivadas é o sinal de $\partial_j \varphi'_{n+1}(x)$, mas, avaliando em 0, o Jacobiano fica o mesmo. Considerando que $\varphi'(0) = e_{n+1}$, a carta $(U', \mathbb{R}^n, \varphi')$ é positivamente orientada, dado que a base $\{2e_1, \dots, 2e_n, e_{n+1}\}$ induz a orientação canônica. Isso confirma o resultado do Exercício 2.28. Em particular, para obter a orientação induzida pela identidade como campo de vetores normais, temos que compor a carta $(U, \mathbb{R}^n, \varphi)$ com o difeomorfismo (39). ♢

EXERCÍCIO 2.30. *Seja X uma variedade suave e seja $\Phi_{\mathfrak{U}} = \{(U_1, V_1, \varphi_1), (U_2, V_2, \varphi_2)\}$ um atlas de X formado por duas cartas locais. Demonstre que, se $U_1 \cap U_2$ for conexo, então X é orientável.*

RESOLUÇÃO. A única função de transição não trivial é $\varphi_{12} := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon \varphi_1^{-1}(U_{12}) \to \varphi_2^{-1}(U_{12})$, sendo $U_{12} := U_1 \cap U_2$. Como U_{12} é conexo, necessariamente $\det J\varphi_{12}(x) > 0$ para todo $x \in \varphi_1^{-1}(U_{12})$ ou $\det J\varphi_{12}(x) < 0$ para todo $x \in \varphi_1^{-1}(U_{12})$. No primeiro caso $\Phi_{\mathfrak{U}}$ é um atlas orientado; no segundo caso, compondo uma das duas cartas com o difeomorfismo (39), obtemos um atlas orientado. Em ambos os casos X é orientável.

Observação: No Exercício 2.28 aplicamos o mesmo princípio. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.31. *Verifique que o atlas suave da faixa de Möbius aberta, construído no Exercício 2.7, não é orientado.*

RESOLUÇÃO. Temos duas funções de transição não triviais que coincidem com a identidade, portanto o determinante do Jacobiano é $1 > 0$, e a função $\varphi_{13}(x, y) = (x+1, -y)$, cujo Jacobiano é $J(\varphi_{13})_{(x,y)} = \mathrm{diag}(1, -1)$, logo o determinante é $-1 < 0$. Isso demonstra que este atlas não é orientado (nem pode sê-lo, dado que a faixa de Möbius não é orientável). $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.32. *Seja K a garrafa de Klein, descrita no Exercício 1.9. Demonstre que o atlas suave, construído no Exercício 2.8, não é orientado. Demonstre que K não é orientável.*

RESOLUÇÃO. Temos algumas funções de transição não triviais que coincidem com a identidade, portanto o determinante do Jacobiano é $1 > 0$, e algumas da forma $\varphi_{ij,i'j'}(x, y) = (1-x, y+1)$, cujo Jacobiano é $J(\varphi_{ij,i'j'})_{(x,y)} = \mathrm{diag}(-1, 1)$, logo o determinante é $-1 < 0$. Isso demonstra que este atlas não é orientado.

Vamos demonstrar que K não é orientável. Sendo K definida como o quociente de $\mathbb{R}^2$ pela relação de equivalência $(x, y) \sim (x + 1, y)$ e $(x, y) \sim (-x, y + 1)$, fica definida a projeção $\pi\colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow K$. Suponhamos que $\mathcal{O}$ seja uma orientação de K. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (-x, y + 1)$. É claro que $\pi = \pi \circ f$, portanto, definindo $\mathcal{O}' := \pi^*\mathcal{O}$, temos que $f^*\mathcal{O}' = \mathcal{O}'$, o que é absurdo, pois $Jf_{(x,y)} = \mathrm{diag}(-1, 1)$, logo f não respeita a orientação de $\mathbb{R}^2$. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 2.33. *Para n ímpar, construa um atlas orientado de $\mathbb{RP}^n$, positivamente orientado a respeito da orientação $\pi_*\mathcal{O}$, sendo $\pi\colon S^n \to \mathbb{RP}^n$ a projeção ao quociente e sendo $\mathcal{O}$ a orientação induzida pelo campo de vetores normais* $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$.

RESOLUÇÃO. Consideremos o atlas Φ definido na resolução do Exercício 1.6. Vimos que $\bar{\varphi}_j^{-1} \circ \bar{\varphi}_i|_{B^n_{(j-1)+}}\colon B^n_{(j-1)+} \to B^n_{i+} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ e $\bar{\varphi}_j^{-1} \circ \bar{\varphi}_i|_{B^n_{(j-1)-}}\colon B^n_{(j-1)-} \to B^n_{i-} = \varphi_j^{-1} \circ \iota_{n+1} \circ \varphi_i$. Se n for [ímpar, então ι_{n+1} respeita a orientação de $\mathbb{R}^{n+1}$, portanto as duas componentes de $\bar{\varphi}_j^{-1} \circ \bar{\varphi}_i|_{B^n_{(j-1)+}}$ têm o mesmo comportamento em relação à orientação (ou seja, ambas a respeitam ou ambas a invertem). Considerando o Exercício 2.25 em relação à componente $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$, temos que, compondo com o difeomorfismo (39) todas as cartas $(\bar{U}_i, B^n, \bar{\varphi}_i)$ com i ímpar ou todas as cartas $(\bar{U}_i, B^n, \bar{\varphi}_i)$ com i par, obtemos um atlas orientado. Em particular, considerando o Exercício 2.27, para que a orientação seja a induzida por $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$, temos que inverter as cartas com i ímpar.

Podemos também considerar o atlas Ψ definido na resolução do Exercício 1.6. O resultado é o mesmo. De fato, vimos que $\psi_i^{-1} \circ \bar{\varphi}_i(x) = \big(\frac{x_1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\big)$, o qual mantém a orientação, dado que em coordenadas polares coincide com $(r, \theta_1, \dots,$

$\theta_{n-1}) \mapsto \big(\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}\big)$, com Jacobiano $\operatorname{diag}\big(\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}, 1, \dots, 1\big)$, logo com determinante $\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$. A mudança de coordenadas é irrelevante, dado que um automorfismo respeita ou não a orientação independentemente da base escolhida como representante. Por isso, o comportamento das cartas de Ψ em relação à orientação coincide com o das cartas de Φ. De todo modo, vamos verificá-lo só considerando Ψ. O Jacobiano da função de transição $(\star)$ no Exercício 1.6 é o seguinte, representando as linhas e as colunas de índice $1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-2, j-1, j, \dots, n$:

$$J(\psi_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{j-1}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{x_1}{x_{j-1}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{x_{j-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{x_{i-1}}{x_{j-1}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{x_{j-1}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{x_{j-1}} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{x_i}{x_{j-1}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{x_{j-3}}{x_{j-1}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x_{j-1}} & -\frac{x_{j-2}}{x_{j-1}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{x_j}{x_{j-1}^2} & \frac{1}{x_{j-1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{x_n}{x_{j-1}^2} & 0 & \cdots & \frac{1}{x_{j-1}} \end{bmatrix}.$$

Aplicando a Regra de Laplace à coluna $j-1$, vemos que o determinante é:

$$\det J(\psi_{ij}) = (-1)^{i+j} \frac{1}{x_{j-1}^2} \cdot \frac{1}{x_{j-1}^{(i-1)+(j-i-1)+(n-j+1)}} = (-1)^{i+j} \frac{1}{x_{j-1}^{n+1}}.$$

Quando n for ímpar, o sinal de x_{j-1}^{n+1} é sempre positivo, portanto o sinal global do Jacobiano é $(-1)^{i+j}$, que coincide com o sinal de $\bar{\varphi}_{ij}$. Por isso, valem as mesmas considerações que fizemos em relação ao atlas Φ. ♢

Exercício 2.34. *Construa um atlas orientado de $\mathbb{CP}^n$.*

Resolução. O atlas construído na resolução do Exercício 2.6, que coincide com o atlas construído no Exercício 1.7, é orientado. De fato, as funções de transição (#), sendo holomorfas como funções complexas, respeitam a orientação como funções reais. ♢

CAPíTULO 3

Exercícios da seção 3.6

EXERCÍCIO 3.1. *Sejam* $X = Y = \mathbb{R}$, $\Phi_{\mathfrak{U}} = \{(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathrm{id})\}$ *e* $\Psi_{\mathfrak{V}} = \{(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)\}$, *sendo* $\rho(x) := x^3$. *Demonstre que* $(\mathbb{R}, \Psi_{\mathfrak{V}})$ *não é uma subvariedade suave de* $(\mathbb{R}, \Phi_{\mathfrak{U}})$, *mostrando que não satisfaz a definição 3.1.12 (Cf. Observação 3.1.17).*

RESOLUÇÃO. Seja (U, V, φ) uma carta suave de X em 0. Se existisse a restrição $(U, V, \varphi)|_Y$, então esta restrição coincidiria com (U, V, φ), dado que $Y = X$ como conjunto. Contudo, (U, V, φ) não pode ser uma carta suave de Y. De fato, se o fosse, seria compatível com a carta $(U, \rho^{-1}(U), \rho)$ de Y, portanto $\xi := \varphi^{-1} \circ \rho$ seria um difeomorfismo entre abertos euclidianos que contêm 0. Por isso $\rho = \varphi \circ \xi$ seria a composição de dois difeomorfismos, portanto seria um difeomorfismo entre abertos euclidianos que contêm 0, o que é absurdo, pois ρ^{-1} não é suave em 0. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 3.2. *Sejam* X *uma variedade suave de dimensão* n *e* $Y \subset X$ *uma subvariedade suave de dimensão* k. *Demonstre que, para todo* $y \in Y$, *existem uma vizinhança* U *de* y *em* X *e uma função suave* $f \colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ *tais que* 0 *é um valor regular de* f *e* $Y \cap U = f^{-1}\{0\}$.

RESOLUÇÃO. Seja (U, V, φ) uma carta local suave em de X em y que se restringe à carta local $(U, V, \varphi)|_Y$ de Y. Por definição $V = V' \times W' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Consideremos a função $g \colon V' \times W' \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto w$. Claramente $V \cap \mathbb{R}^k = V' \times \{0\} = g^{-1}\{0\}$. Ademais, 0 é um valor regular de g, pois g é uma submersão. Portanto, a função $f := g \circ \varphi^{-1}$ satisfaz a tese do exercício. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 3.3. *Sejam* X *uma variedade suave e* $\Delta \colon X \hookrightarrow X \times X$ *a diagonal. Demonstre que* Δ *é um mergulho suave próprio.*

RESOLUÇÃO. Claramente Δ é uma função suave e injetora, pois as duas componentes dela coincidem com a identidade de X. Como $d(\Delta)_x(v) = (v, v)$, temos que $d(\Delta)_x$ é injetor para todo $x \in X$, logo Δ é uma imersão injetora. Para demonstrar que é um mergulho suave, só falta verificar que é um homeomorfismo com a imagem, ou seja, que a função $\bar{\Delta}^{-1} \colon \mathrm{Im}(\Delta) \to X$ é contínua. A função $\pi_1 \colon X \times X \to X$ é contínua e $\pi_1 \circ \Delta = \mathrm{id}_X$, logo $\bar{\Delta}^{-1} = \pi_1|_{\mathrm{Im}(\Delta)}$, portanto $\bar{\Delta}^{-1}$ é contínua. Enfim, $\mathrm{Im}(\Delta)$ é fechada em X, pois X é de Hausdorff por definição, portanto Δ é um mergulho próprio. $\diamondsuit$

EXERCÍCIO 3.4 (Stack of records theorem). *Sejam* X *e* Y *variedades suaves da mesma dimensão, sendo* Y *compacta. Sejam* $f \colon Y \to X$ *uma função suave e* $x \in X$ *um valor regular de* f. *Demonstre que:*

(1) *$f^{-1}\{x\}$ é um conjunto finito;*
(2) *se $f^{-1}\{x\} = \{y_1, \dots, y_k\}$, existem uma vizinhança aberta U de x e, para todo $i \in \{1, \dots k\}$, uma vizinhança aberta V_i de y_i tais que $f|_{V_i} \colon V_i \to U$ é um difeomorfismo e $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$ (união disjunta);*
(3) *se $R \subset X$ for o conjunto dos valores regulares de f, a cardinalidade de $f^{-1}\{x\}$ é localmente constante para $x \in R$.*

Resolução. (1) Sendo x um valor regular por hipótese, $f^{-1}\{x\}$ é uma subvariedade suave de Y de dimensão 0. Seja $y \in f^{-1}\{x\}$: existe uma carta local (U, V, φ) de Y em y tal que $\varphi^{-1}(U \cap f^{-1}\{x\}) = \mathbb{R}^0 = \{0\}$, portanto $U \cap f^{-1}\{x\} = \{y\}$. Isso mostra que y é um ponto isolado, logo $f^{-1}\{x\}$ é um subconjunto discreto de Y. Sendo Y compacta, se trata de um subconjunto finito. (2) Seja $f^{-1}\{x\} = \{y_1, \dots, y_k\}$. Como df_{y_i} é inversível, pelo Teorema da Função Inversa podemos encontrar uma vizinhança V_i' de y_i em Y e uma vizinhança U_i' de x em X tais que $f(V_i') = U_i'$ e $f|_{V_i'} \colon V_i' \to U_i'$ é um difeomorfismo. Sendo Y de Hausdorff, podemos reduzir as vizinhanças V_i' e U_i' de modo que $V_i' \cap V_j' = \emptyset$ para todos i e j distintos. Enfim, definimos $U := U_1' \cap \dots \cap U_k'$ e $V_i := (f|_{V_i'})^{-1}(U)$. Desta maneira obtemos a tese. (3) Pelo item anterior temos que, para todo $z \in U$, a cardinalidade de $f^{-1}(z)$ é k, logo é localmente constante. ♢

Exercício 3.5. *Seja $f \colon Y \to X$ uma submersão, sendo Y compacta. Demonstre que f é sobrejetora.*

Resolução. Sendo Y compacta, a imagem de f é compacta, logo é fechada em X. Segue imediatamente do Teorema de Submersão Local (Teorema 2.4.42) que a imagem é também aberta, portanto coincide com X. ♢

Exercício 3.6. *Seja $i \colon Y \hookrightarrow X$ uma imersão injetora e uma função aberta. Demonstre que i é um mergulho e que* $\dim Y = \dim X$.

Resolução. Seja $y_0 \in Y$ um ponto fixado qualquer. Pelo Teorema de Imersão Local (Teorema 2.4.41), existem uma carta local (U, V, φ) de Y em y_0 e uma carta local $(U', V \times W, \psi)$ de X em $i(y_0)$ tais que $i(U) \subset U'$ e, se $\iota \colon V \to V \times W$ for a inclusão canônica, temos $\psi^{-1} \circ i \circ \varphi = \iota \colon V \hookrightarrow V \times W$. Dado que i é uma função aberta, a imagem de U é aberta em X, portanto é aberta também em U'. Logo, sendo φ e ψ difeomorfismos, temos que $\iota(V)$ é aberto em $V \times W$, o que só acontece quando $V \times W = V$. Portanto, $\dim Y = \dim X$ e $\psi^{-1} \circ i \circ \varphi = \mathrm{id}_V$, logo i é um difeomorfismo local. Sendo $i(Y)$ aberta em X, isso equivale a afirmar que $\bar{i} \colon Y \to i(Y)$ é um difeomorfismo local, portanto, sendo $\bar{i}$ injetora, é um difeomorfismo, logo i é um mergulho. ♢

Exercício 3.7. *Construa uma função suave $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que o conjunto dos valores críticos de f é denso em $\mathbb{R}$.*

Resolução. Seja $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o conjunto dos números racionais ordenado como sequência. Construímos uma função suave $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que no intervalo $[2n, 2n+1]$ a função assuma o valor constante q_n. Nos intervalos da forma $[2n +$

$1, 2n+2]$ e no intervalo $(-\infty, 0]$ a função f pode ser definida de qualquer maneira, desde que a colagem seja suave. Desta maneira todo número racional é um valor crítico de f, pois em um ponto $x \in (2n, 2n+1)$ temos que $f(x) = q_n$ e $f'(x) = 0$. ♢

EXERCÍCIO 3.8. *Sejam X, Y e Z variedade suaves, $i\colon Y \hookrightarrow X$ um mergulho suave e $f\colon Z \to Y$ uma função. Demonstre que f é suave se, e somente se, $i \circ f$ é suave.*

RESOLUÇÃO. ($\Rightarrow$) Óbvio. ($\Leftarrow$) Seja $z_0 \in Z$ um ponto fixado qualquer e seja $y_0 := f(z_0)$. Pelo Teorema de Imersão Local (Teorema 2.4.41), existem uma carta local (U, V, φ) de Y em y_0 e uma carta local $(U', V \times W, \psi)$ de X em $i(y_0)$ tais que $i(U) \subset U'$ e, se $\iota\colon V \to V \times W$ for a inclusão canônica, temos $\psi^{-1} \circ i \circ \varphi = \iota\colon V \hookrightarrow V \times W$. Seja (U'', V'', η) uma carta local de Z em z_0. Por hipótese a função $\tilde{f} := \psi^{-1} \circ i \circ f \circ \eta\colon U'' \to U'$ é de classe C^∞. Esta função coincide com $\iota \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \eta$. Dado que ι é a inclusão canônica, isso implica que $\varphi^{-1} \circ f \circ \eta$ é de classe C^∞, portanto f é suave em z_0. Como isso vale para qualquer $z_0 \in Z$ fixado, f é suave. ♢

EXERCÍCIO 3.9. *Sejam X, Y e Z variedade suaves, $\pi\colon Z \to Y$ uma submersão sobrejetora e $f\colon Y \to X$ uma função. Demonstre que f é suave se, e somente se, $f \circ \pi$ é suave.*

RESOLUÇÃO. ($\Rightarrow$) Óbvio. ($\Leftarrow$) Seja $y_0 \in Y$ um ponto fixado qualquer. Por hipótese existe $z_0 \in Z$ tal que $\pi(z_0) = y_0$. Pelo Teorema de Submersão Local (Teorema 2.4.42), existem uma carta local $(U, V' \times W', \varphi)$ de Z em z_0 e uma carta local (U', V', ψ) de Y em y_0 tais que $\pi(U) = U'$ e, se $p\colon V' \times W' \to V'$ for a projeção canônica, temos $\psi^{-1} \circ \pi \circ \varphi = p$. Consideremos o mergulho canônico $\iota\colon V' \to V' \times W'$, $v' \mapsto (v', 0)$. Claramente $p \circ \iota = \mathrm{id}_{V'}$. Fica definida a função suave $i = \psi \circ \iota \circ \varphi^{-1}\colon U' \to U$, que satisfaz a identidade $\pi \circ i = \mathrm{id}_{U'}$, logo $f|_{U'} = (f \circ \pi) \circ i$, portanto $f|_{U'}$ é suave. Como isso vale em uma vizinhança U' de qualquer $y_0 \in Y$ fixado, a função f é globalmente suave. ♢

EXERCÍCIO 3.10. *Sejam X, Y e Z variedade suaves, $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Z$ submersões sobrejetoras tais que f é constante nas fibras de g e g é constante nas fibras de f. Demonstre que existe um único difeomorfismo $h\colon Y \to Z$ tal que $g = h \circ f$.*

RESOLUÇÃO. Fixado $y \in Y$, por hipótese existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, logo, para que $g = h \circ f$, a única possibilidade é definir $h(y) := g(x)$. Vamos verificar que h está bem definida e é um difeomorfismo, necessariamente único porque a imagem de qualquer $y \in Y$ já está fixada pela identidade $h(y) = g(x)$. `Passo I:` h `está bem definida.` De fato, sejam $x, x' \in X$ tais que $f(x) = f(x') = y$, portanto $h(y) = g(x)$ e $h(y) = g(x')$. Como $f(x) = f(x')$, temos que x e x' pertencem à mesma fibra de f, logo por hipótese $g(x) = g(x')$, portanto h não depende da escolha de x. `Passo II:` h `é bijetora.` De fato, dado $z \in Z$, por hipótese existe $x \in X$ tal que $g(x) = z$, portanto $h(f(x)) = z$, logo h é sobrejetora. Suponhamos que $h(y) = h(y')$. Sejam $x, x' \in X$ tais que $f(x) = y$ e $f(x') = y'$. Como $h(y) = g(x)$ e $h(y') = g(x')$, temos que $g(x) = g(x')$, portanto x e x' pertencem à mesma fibra de g. Por hipótese isso implica que $f(x) = f(x')$, ou seja, $y = y'$, logo h é injetora. `Passo III:` h `e` h^{-1} `são suaves.` Seja $y \in Y$ e seja $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Pelo Teorema de Submersão Local (Teorema 2.4.42), existem uma carta local $(U, V' \times W', \varphi)$ de X em x e uma carta local (U', V', ψ) de Y em y tais que $f(U) = U'$ e, se $\pi\colon V' \times W' \to V'$ for a projeção canônica, temos $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \pi$. Seja $\iota\colon V' \to V' \times W'$, $v' \mapsto (v', 0)$. Temos que $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{V'}$, portanto fica definida a função suave $i = \varphi^{-1} \circ \iota \circ \psi\colon U' \to U$, que satisfaz a identidade $f \circ i = \mathrm{id}_{U'}$. Logo, como $f(i(y)) = y$, por definição $h(i(y)) = g(y)$, ou seja, $h|_{U'} = g \circ i$, portanto $h|_{U'}$ é suave. Como isso vale em uma vizinhança U' de qualquer $y \in Y$, a função h é globalmente suave. O mesmo raciocínio, trocando os papeis de f e g, demonstra que h^{-1} é suave. ♢

EXERCÍCIO 3.11. *Sejam X e Y variedades suaves e seja $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Sejam $i_{y_0}\colon X \hookrightarrow X \times Y$, $x \mapsto (x, y_0)$ e $i_{x_0}\colon Y \hookrightarrow X \times Y$, $y \mapsto (x_0, y)$. Demonstre que i_{y_0} e i_{x_0} são mergulhos suaves próprios.*

RESOLUÇÃO. Vamos considerar somente i_{y_0}, sendo i_{x_0} análoga. Obviamente i_{y_0} é injetora. Ademais, $d(i_{y_0})_x(v) = (v, 0)$. De fato, seja $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ uma curva regular tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$. Seja $\gamma_{y_0}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \times Y$, $t \mapsto (\gamma(t), y_0)$. Temos que $d(i_{y_0})_x(v) = (i_{y_0} \circ \gamma)'(0) = \gamma'_{y_0}(0) = (\gamma'(0), 0) = (v, 0)$. Portanto, $d(i_{y_0})_x$ é injetor para todo $x \in X$, logo i_{y_0} é uma imersão injetora. Como $\pi_X \circ i_{y_0} = \mathrm{id}_X$, temos que $\bar{i}_{y_0}$ é a restrição à imagem de i_{y_0} da função suave π_X, logo é suave. Por isso, i_{y_0} é um mergulho suave. Sendo $X \times \{y_0\}$ fechado em $X \times Y$, se trata de um mergulho próprio. ♢

EXERCÍCIO 3.12. *Sejam X e Y variedades suaves e $Z \subset Y$ uma subvariedade suave. Demonstre que uma função $f\colon Z \to X$ é suave em $z \in Z$ conforme a Definição 2.3.15 (pensando em Z como em um subconjunto de Y) se, e somente se, é suave em z como função entre as variedades Z e X.*

RESOLUÇÃO. ($\Rightarrow$) Por hipótese existem uma vizinhança aberta Ω de z em Y e uma função suave $F\colon \Omega \to X$ tal que $F|_{\Omega \cap Z} = f$. Consideremos uma carta local (U, V, φ) de Y em z tal que $U \subset \Omega$ e $\varphi^{-1}(U \cap Z) = V \cap \mathbb{R}^h$, sendo $h := \dim Z$. Fixemos também uma carta local (U', V', ψ) de X em $f(z)$. Temos que $(U, V, \varphi)|_Z$ é uma carta local de z em Z. Definimos $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{\varphi}) := (U, V, \varphi)|_Z$, logo $\bar{U} = U \cap Z$ e $\bar{V} = V \cap \mathbb{R}^h$. Por hipótese a função $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon V \to V'$ é de classe C^∞, portanto a restrição $(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)|_{\bar{V}}\colon \bar{V} \to V'$ também o é. Esta restrição coincide com $\psi^{-1} \circ f \circ \bar{\varphi}\colon \bar{V} \to V'$, portanto, compondo a função f com as cartas locais $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{\varphi})$ e (U', V', ψ), obtemos uma função de classe C^∞. Isso mostra que f é suave como função entre as variedades Z e X. ($\Leftarrow$) Consideremos uma carta local (U, V, φ) de Y em z tal que $\varphi^{-1}(U \cap Z) = V \cap \mathbb{R}^h$. Fixemos também uma carta local (U', V', ψ) de X em $f(z)$. Definimos $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{\varphi}) := (U, V, \varphi)|_Z$. A menos de restringir (U, V, φ), podemos supor que $V = \bar{V} \times \bar{\bar{V}}$, sendo $k := \dim Y$ e $\bar{\bar{V}} := V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{k-h})$. Por hipótese a função $\tilde{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \bar{\varphi}\colon \bar{V} \to V'$ é de classe C^∞. Seja $\pi\colon V \to \bar{V}$ a projeção canônica. Fica definida a função $\tilde{F} := \tilde{f} \circ \pi\colon V \to V'$ de classe C^∞, portanto a função $F := \psi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1} \colon U \to U'$ é suave. Como U é uma vizinhança aberta de z em Y e $F|_{U \cap Z} = f$, a função f é suave conforme a Definição 2.3.15. $\diamondsuit$