083119 - Métodos de Matemática Aplicada - Turma A

Quarta lista de exercícios

Profa. Grazielle Feliciani Barbosa 26 de abril de 2019

Exercício 1. *Sejam f, g funções periódicas de período T. Mostre que a função*

$$h(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-y)g(y)dy$$

é periódica de período T.

Exercício 2. *Se f é periódica de período T e diferenciável. Então f' é periódica de período T.*

Exercício 3. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $2L$-periódica e integrável em $[-L, L]$ então*

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_0^{2L} f(x)dx.$$

Em geral

$$\int_{x_0-L}^{x_0+L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} f(x)dx.$$

Exercício 4. *Verifique através da série de Fourier de $f(x) = |x|, -\pi < x \leq \pi$, que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercício 5. *Encontre a série de Fourier das seguintes funções:*

$$(a) f(x) = \cos^2 x \qquad (b) f(x) = \cos^3 x$$

$$(c) f(x) = \operatorname{sen}^2 x \qquad (d) f(x) = \operatorname{sen}^3 x$$

Exercício 6. *Determine o desenvolvimento em série de senos das seguintes funções*

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(b) $f(x) = \cos x$ *para* $x \in [0, 2\pi]$.

Exercício 7. *Determine o desenvolvimento em série de cossenos das seguintes funções*

(a) $f(x) = x^2$ *para* $x \in [0, 1]$*;*

(b) $f(x) = e^{2x}$ *para* $x \in [0, 2\pi]$.

Exercício 8. *Encontre os coeficientes de Fourier das seguintes funções periódicas*

a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$

b) $f(x) = \cos(5x)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(3x) + \cos(5x)$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{5x}{2}) \operatorname{sen}(\frac{x}{2})$

e) $f(x) = \begin{cases} e^x, \ \ 0 \leqslant x < 2\pi \\ f(x + 2\pi) = f(x) \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \ \ -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 - x, \ \ 0 \leqslant x < 1 \\ f(x + 2) = f(x) \end{cases}$

Exercício 9. *(a) Encontre a série de senos para* $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, x = \pi. \end{cases}$

(b) Use o resultado do item (a) para mostrar que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Exercício 10. *Ache a série de Fourier de cada uma das seguintes funções:*

$$(a) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases} \qquad (b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, & -\pi \le x < 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, & 0 < x \le \pi, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$(c) f(x) = |x|, -\pi \le x \le \pi \qquad (d) f(x) = x^3, -\pi \le x \le \pi.$$

Exercício 11. *Sejam* $a_n, n \ge 0$ *e* $b_n, n \ge 1$ *números reais dados. Seja* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx]$$

Prove que $f(-\pi) = f(\pi)$.

Exercício 12. *Seja* $f(x) = x, -\pi \le x \le \pi$. *Existe série de Fourier que convirja uniformemente a* f *em* $[-\pi, \pi]$*? Justifique.*

Exercício 13. *Encontre os coeficientes de Fourier das seguintes funções:*

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0 \\ -1, & 0 \le x < \pi \\ f(x + 2\pi) = f(x). \end{cases} \qquad (b)\ f(x) = \begin{cases} x, & -L \le x < L \\ f(x + 2L) = f(x). \end{cases}$$

Exercício 14. *Mostre que para* $0 \le x \le \pi$,

$$(a)\ x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \Big(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots \Big)$$

$$(b)\ x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \Big(\frac{\operatorname{sen} x}{1^3} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} + \frac{\cos 5x}{5^3} + \cdots \Big)$$

Exercício 15. *Use o exercício anterior para mostrar que*

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Exercício 16. *(i) Faça um esboço do gráfico da extensão par,* $2L$*-periódica das seguintes funções:*

(a) $f(x) = x^2, \quad 0 \le x < 1, L = 1$ *(b)* $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad 0 \le x < \pi, L = \pi$

(ii) Faça um esboço do gráfico da extensão ímpar, $2L$*-periódica das seguintes funções:*

(a) $f(x) = x, \quad 0 \le x < 1, L = 1$ *(b)* $f(x) = \cos(x), \quad 0 \le x < \pi, L = \pi.$

Algumas Respostas:

(5-a) $\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$ (5-b) $\frac{1}{4}\Big(3\cos x + \cos 3x\Big)$ (5-c) $\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$ (5-d) $\frac{1}{4}\Big(3\,\mathrm{sen}\, x - \,\mathrm{sen}\, 3x\Big)$

(6-a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\,\mathrm{sen}\,(\frac{k\pi}{2}) - 2k\pi(-1)^k}{k^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\,(\frac{k\pi x}{2})$.

(6-b) $\displaystyle\sum_{k=1,k\neq 2}^{\infty} \frac{2k((-1)^k - 1)}{\pi(4-k^2)}\,\mathrm{sen}\,(\frac{kx}{2})$.

(7-a) $\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}\cos(k\pi x)$.

(7-b) $\displaystyle\frac{e^{4\pi}-1}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8((-1)^k e^{4\pi} - 1)}{\pi(16+k^2)}\cos(\frac{kx}{2})$.

(9-a) $\displaystyle\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\Big(\,\mathrm{sen}\, x + \frac{\mathrm{sen}\,(3x)}{3} + \frac{\mathrm{sen}\,(5x)}{5} + \cdots\Big)$.

(9-b) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,(nx)}{n}$.

(10-a) $\displaystyle\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,(2n-1)x}{2n-1}$; (10-c) $\displaystyle\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$;

(10-d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big[\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\Big]\,\mathrm{sen}\,(nx)$