083119 - Métodos de Matemática Aplicada - Turma A

Sétima lista de exercícios

Profa. Grazielle Feliciani Barbosa 27 de maio de 2019

Exercício 1. *Classifique como hiperbólica, parabólica e elíptica as EDP´s abaixo:*

(a) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$
(b) $3u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} = 0$
(c) $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$
(d) $u_{xx} - u_{xy} - 3u_{yy} = 0$
(e) $u_{xx} = 9u_{xy}$
(f) $u_{xy} - u_{yy} + 2u_x = 0$
(g) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - 6u_y = 0$
(h) $u_{xx} + u_{yy} = u$

Exercício 2. *Considere o problema de valor de contorno:*

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,x) = f(x), \quad 0 < x < L, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Usando o método de separação de variáveis, mostre que a solução do problema é dada por

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

onde $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$.

Exercício 3. *Considere o problema de valor de contorno:*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x) \quad 0 < x < L, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Usando o método de separação de variáveis, mostre que a solução do problema é dada por

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos \frac{n\pi at}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big),$$

onde $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$ *e* $B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$.

Exercício 4. *Considere o problema de valor de contorno:*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,x) = f(x), & u_t(0,x) = g(x) \quad 0 < x < L, \\ u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Usando o método de separação de variáveis, mostre que a solução do problema é dada por

$$u(t,x) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos \frac{n\pi at}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big),$$

onde $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ *e* $B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ *e* $B_0 = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) dx$.

Exercício 5. *(a) Mostre que a equação*

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

pode ser colocada na forma $u_{\eta\xi} = 0$ *mediante a mudança* $\xi = x + at$ *e* $\eta = x - at$.

(b) Mostre que

$$u = F(x+at) + G(x-at)$$

é uma solução da equação, com F e G funções arbitrárias, duas vezes diferenciáveis.

Exercício 6. *Determine a temperatura $u(t,x)$ em uma haste de comprimento L, se a temperatura inicial é $f(x)$ e se as extremidades $x=0$ e $x=L$ são isoladas.*

Exercício 7. *Encontre $u = u(t,x)$ que é solução da equação $u_{xx} = u_t$, sujeita às condições abaixo:*

$$(a)\quad \begin{matrix} u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \end{matrix} \qquad (b)\quad \begin{matrix} u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = x(L-x). \end{matrix}$$

Exercício 8. *Resolva o problema de valores de contorno*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\pi) \\ u(0,x) = 2 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \quad x \in (0,\pi), \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, t > 0. \end{cases}$$

Exercício 9. *Encontre $u = u(t,x)$ que é solução da equação $u_{xx} = u_{tt}$, sujeita às condições abaixo:*

$$(a)\quad \begin{matrix} u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = \frac{1}{4}x(L-x) \\ u_t(0,x) = 0 \end{matrix} \qquad (b)\quad \begin{matrix} u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = x(L-x). \end{matrix}$$

Exercício 10. *Encontre $u = u(t,x)$ que seja solução do problema*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,1) \\ u(0,x) = 6 \operatorname{sen}(\pi x) - \operatorname{sen}(4\pi x), \quad x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, t > 0. \end{cases}$$

Exercício 11. *Encontre $u = u(x,y)$ que é solução da equação de Laplace, onde:*

$$(a)\quad \begin{matrix} u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = f(x). \end{matrix}$$

$$(b)\quad \begin{matrix} u(0,y) = f(y), \quad u(a,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0. \end{matrix}$$

$$(c)\quad \begin{matrix} u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = 0. \end{matrix}$$

Exercício 12. *Encontre $u = u(r,\theta)$ que é solução da equação de Laplace na região circular de raio 1, onde*

$$(a)\quad u(1,\theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases} \qquad (b)\quad u(1,\theta) = 2\pi\theta - \theta^2, \quad 0 < \pi < 2\theta.$$