1001233 - Números e Funções Reais - Turma A

Oitava lista de exercícios

Profa. Grazielle Feliciani Barbosa 27 de maio de 2019

---

1. Enuncie e prove o teorema de Pitágoras.

2. Considere o número áureo $\phi \approx 1.618$. Mostre que o triângulo formado pelos lados $\sqrt{\phi}$, 1 e ϕ^2 formam um triângulo retângulo.

   Dizemos que um ponto C divide um segmento AB na razão áurea se

   $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

   Se $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = x$, então $\overline{CB} = a - x$. Logo

   $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \iff \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \iff x^2 + ax - a^2 = 0.$$

   Resolvendo a equação obtemos que

   $$x = -a\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou } x = a\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

   Como $x > 0$, então

   $$x = a\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

   O número áureo é definido como $\frac{a}{x}$, logo

   $$\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

3. Associe a cada medida em radianos do ângulo a respectiva medida em graus:

   (a) $5\pi/3$ **(a1)** $300°$

   (b) $3\pi/5$ **(b1)** $108°$

   (c) $2\pi/5$ **(c1)** $72°$

   (d) $3\pi/4$ **(d1)** $135°$

   (e) $7\pi/5$ **(e1)** $252°$

4. Associe a cada função no ângulo dado o valor respectivo:

   (a) sen $\frac{7\pi}{4}$ **(a1)** $-\sqrt{2}/2$

   (b) cos $\frac{7\pi}{4}$ **(b1)** $\sqrt{2}/2$

   (c) tg $\frac{7\pi}{4}$ **(c1)** -1

   (d) cossec $\frac{7\pi}{4}$ **(d1)** $-\sqrt{2}$

   (e) sec $\frac{7\pi}{4}$ **(e1)** $\sqrt{2}$

5. Associe a cada função no ângulo dado o valor respectivo:

   (a) $\operatorname{sen} \frac{-5\pi}{6}$ **(a1)** $-1/2$

   (b) $\cos \frac{-5\pi}{6}$ **(b1)** $-\sqrt{3}/2$

   (c) $\operatorname{tg} \frac{-5\pi}{6}$ **(c1)** $\sqrt{3}/3$

   (d) $\operatorname{cossec} \frac{-5\pi}{6}$ **(d1)** -2

   (e) $\sec \frac{-5\pi}{6}$ **(e1)** $-2\sqrt{3}/3$

6. Associe a cada função no ângulo dado o valor respectivo:

   (a) $\cos \frac{17\pi}{6}$ **(a1)** $-\sqrt{3}/2$

   (b) $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{6}$ **(b1)** $\sqrt{3}/3$

   (c) $\operatorname{sen} \frac{11\pi}{2}$ **(c1)** -1

   (d) $\operatorname{cossec} \frac{10\pi}{3}$ **(d1)** $-2/\sqrt{3}$

   (e) $\cos \frac{7\pi}{2}$ **(e1)** 0

7. Um ponto de uma circunferência de raio de 0,5 m girou em torno do seu centro 1800°. Quantos metros percorreu esse ponto?

8. A roda de uma bicicleta tem raio de 0,50 m. Alguém andou 5 km com a bicicleta. Quantos voltas completas girou o raio da roda com extremo no ponto de contato inicial com o piso?

9. Para todo x (em que estiver definida) use fórmulas trigonométricas para simplificar as expressões:

   (a) $\operatorname{sen}(3\pi/2 - x)$;

   (b) $\cos(3\pi/2 + x)$;

   (c) $\operatorname{tg}(3\pi/2 + x)$;

   (d) $\operatorname{cotg}(3\pi/2 - x)$;

   (e) $\cos(\pi + x)$ e $\cos(\pi - x)$;

   (f) $\operatorname{tg}^2(x + 2\pi) + 1$;

   (g) $(1 - \cos x)(1 + \cos x)$;

   (h) $(1 - \operatorname{cossec} x)(1 + \operatorname{cossec} x)$;

   (i) $\operatorname{sen}^3 x$;

10. Para todo x no domínio de f, vale que $f(x) = 1$ para as seguintes funções (assinale a opção falsa):

    (a) $\sec^2(x) + \operatorname{tg}^2(x) = 1$

    (b) $\operatorname{cossec}^2(x) - \operatorname{cotg}^2(x) = 1$

(c) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

(d) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 1$

(e) $2\cos^2 x - \cos 2x = 1$

11. Os arcos a e b do primeiro quadrante são tais que $\operatorname{sen}(a) = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen}(b) = \frac{12}{13}$. Calcule $\cos(a+b)$.

12. Calcule:

    (a) $y = \operatorname{sen}(15^\circ) \times \cos(15^\circ)$;

    (b) $y = \sqrt{3}\operatorname{sen}(15^\circ) + \cos(15^\circ)$;

    (c) $y = \frac{1+\operatorname{tg}(15^\circ)}{1-\operatorname{tg}(15^\circ)}$;

13. Se $\operatorname{sen}(a) = \frac{4}{5}$ e $\cos(b) = \frac{3}{5}$, sendo a do segundo quadrante e b do primeiro quadrante, calcule $\operatorname{sen}(a-b)$.

14. Se $\sec(a) = \frac{25}{24}$, com a do quarto quadrante, calcule $\operatorname{tg}(2a)$.

15. Sendo $2\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 1$, calcule $\operatorname{tg}(x)$.

16. Determine o maior ângulo de um triângulo cujos lados medem $3, 5$ e 7 centímetros.

17. Determine os lados de um triângulo ABC no qual se tem $a = 3$, $\widehat{A} = 30^\circ$ e $\widehat{B} = 45^\circ$.

18. Em um triângulo ABC com lados a, b e c, chamamos de perímetro do triângulo o número $a+b+c$ denotado por $2p$. Mostre que:

    (a) $\operatorname{sen}(\frac{\widehat{A}}{2}) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$;

    (b) $\cos(\frac{\widehat{A}}{2}) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$;

19. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ mostre que:

    (a) $1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cossec}^2(x)$;

    (b) $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)}$;

20. Determinar x tal que $0 < x < \pi$ e $\operatorname{sen}(3x) = 2$.

21. Achar as soluções de $4\operatorname{sen}^3(x) - \operatorname{sen}(x) = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

22. Se $0 \leq \theta \leq 2\pi$, os valores de θ tais que $\operatorname{sen}^2\theta = 3/4$ são:

    (a) $\pi/3$, $2\pi/3$, $4\pi/3$, $5\pi/3$

    (b) $\pi/3$, $2\pi/3$, $3\pi/3$, $4\pi/3$, $5\pi/3$

    (c) $\pi/3$, $2\pi/3$, $-2\pi/3$, $-\pi/3$

    (d) $\pi/6$, $2\pi/6$, $4\pi/6$, $5\pi/6$

    (e) $\pi/6$, $2\pi/6$, $4\pi/3$, $5\pi/6$

23. Se $0 \leq \theta \leq 2\pi$, os valores de θ tais que $\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ são:

(a) $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$

(b) π, 2π

(c) $\pi/4$, $5\pi/4$

(d) $\pi/2$, $2\pi/2$, $3\pi/2$, $4\pi/2$

(e) $\pi/6$, $2\pi/6$, $4\pi/3$, $5\pi/6$

24. Se $0 \leq \theta \leq 2\pi$, os valores de θ tais que $\operatorname{sen} 2\theta - \cos\theta = 0$ são:

(a) $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$, $3\pi/2$

(b) $\pi/2$, $3\pi/2$

(c) $\pi/6$, $2\pi/6$, $3\pi/6$, $4\pi/6$, $5\pi/6$

(d) $\pi/3$, $2\pi/3$, $3\pi/3$, $4\pi/3$

(e) $\pi/4$, $2\pi/4$, $3\pi/4$, $4\pi/4$