089109 - Cálculo 1 - Turma A

Sétima lista de exercícios

Profa. Grazielle Feliciani Barbosa 09 de Outubro de 2019.

---

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até 2^a ordem e g uma função definida por $g(x) = f(e^{2x})$. Verifique que $g''(x) = 4e^{2x}[f'(e^{2x}) + e^{2x}f''(e^{2x})]$.

2. Seja α uma raíz da equação $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, com a e b constantes. Se $y = e^{\alpha x}$, mostre que
$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0.$$

3. Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável tal que, para todo $x \in D_f$, o ponto $(x, f(x))$ é solução da equação $xy^3 + 2xy^2 + x = 4$. Se $f(1) = 1$, calcule $f'(1)$.

4. Calcule a derivada da função $f(x) = \ln \dfrac{\cos\sqrt{x}}{1 + \operatorname{sen}\sqrt{x}}$.

5. Se $y = e^x \cos x$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$.

6. Calcule a derivada segunda de $y = x\sqrt[5]{2x+2}$.

7. Calcule a derivada de $f(x) = 4\sec x + \operatorname{cossec} x + \ln(\operatorname{sen} x)$.

   Definição: Consideremos uma equação nas variáveis x e y. Dizemos que uma função $y = f(x)$ é dada implicitamente por tal equação se, para todo $x \in D_f$, o ponto $(x, f(x))$ for solução da equação.

8. Considere a equação $y^2 + xy - 1 = 0$.

   (a) Determine uma função que seja dada implicitamente pela equação acima.

   (b) Mostre que $(2y + x)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

9. A função $y = f(x)$, $y \geqslant 0$, é dada implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 81$.

   (a) Determine $f(x)$.

   (b) Mostre que $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ para todo $x \in D_f$.

   (c) Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

10. Seja $f(x) = x^3 - x + 3$.

    (a) Determine a equação da reta r tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.

    (b) Determine a equação da reta s normal ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.

    (c) Esboce, num mesmo desenho, os gráficos de f, r e s.

11. Determine uma reta que seja paralela à reta $x+y=1$ e que seja tangente à curva $x^2+xy+y^2=3$.

12. Supondo que $y=f(x)$ seja uma função real derivável e que satisfaz a equação $xy^2+y+x=1$, podemos afirmar que:

    (a) $f'(x)=\dfrac{-f(x)}{2xf(x)-1}$ (b) $f'(x)=\dfrac{-1-[f(x)]^2}{2xf(x)+1}$ (c) $f'(x)=\dfrac{-[f(x)]^2}{2xf(x)+1}$

    (d) $f'(x)=\dfrac{-1+[f(x)]^2}{2xf(x)+1}$ (e) $f'(x)=\dfrac{1-[f(x)]^2}{2xf(x)+1}$ (f) $f'(x)=\dfrac{-1}{2xf(x)+1}$.

13. Determine, em cada item abaixo, a conjunto de pontos de continuidade e diferenciabilidade da função dada.

    (a) $f(x)=\begin{cases}5-6x, & \text{se } x\leqslant 3\\ -4-x^2, & \text{se } x>3.\end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{se } x<1\\ (1-x)^2, & \text{se } x\geqslant 1.\end{cases}$

    (c) $f(x)=\begin{cases}x^2-7, & \text{se } 0<x\leqslant 3\\ \dfrac{6}{x}, & \text{se } x>3.\end{cases}$ (d) $f(x)=\begin{cases}x-2, & \text{se } x<0\\ x^2, & \text{se } x\geqslant 0.\end{cases}$

14. Em cada um dos ítens do Exercício 13, determine, quando existirem, f' e f''.