FUNÇÕES ELÍTICAS

Kelly Roberta Mazzutti Lübeck
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE, Brasil

Valério Ramos Batista
Universidade Federal do ABC - UFABC, Brasil

Resumo: Em 1989, H.Karcher re-escreveu a teoria de funções elíticas utilizando uma abordagem bem mais geométrica do que analítica. Com isso, obteve um ótimo controle sobre o comportamento e valores-imagem destas funções, permitindo sua larga aplicação em superfícies mínimas. Este trabalho destina-se a apresentar a teoria de funções elíticas segundo Karcher, bem como algumas aplicações desta em superfícies mínimas.

Índice

Capítulo 1
Funções Elíticas 1
1. Introdução 1
2. A relação entre P e $\wp$ 3
3. Uma observação importante 5

Capítulo 2
A função $\wp$-Weierstraß Simétrica 6
1. Resultados básicos 6
2. A função $\wp$-Weierstraß simétrica 9
3. A equação algébrica do toro 14
4. A constante c 16

Capítulo 3
A função γ 19

Capítulo 4
Aplicações 25
1. Resultados clássicos 25
2. Exemplo de superfície mínima 27

Referências 39

Capítulo 1

Funções Elíticas

1. Introdução

Dizemos que $F : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ é uma *função elítica* se ela for *duplamente periódica* e *meromorfa*. Ou seja, em primeiro lugar, existe uma *base* $\{w_1, w_2\}$ de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, como espaço vetorial real, de modo que $F(z+w_1) = F(z+w_2) = F(z)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Neste sentido, subentende-se que w_1 e w_2 são os *períodos* de F, donde $\forall\, w$ tal que $F(\cdot+w) \equiv F$ implica $w = nw_1+mw_2$ para certos $m, n \in \mathbb{Z}$.

Note que isso nos impede de estabelecer $\{w_1, w_2\}$ no caso de funções constantes. Assim, em segundo lugar, os conjuntos $A = F^{-1}(\mathbb{C})$ e $B = F^{-1}(\hat{\mathbb{C}}^*)$ são ambos não-vazios, e desta forma exigimos que $F|_A$ e $1/F|_B$ sejam funções *complexas analíticas*. Essa propriedade traduz o que quizemos dizer por "F meromorfa".

Quanto às funções constantes, iremos também considerá-las elíticas por extensão. Isso porque, deste modo, podemos dizer que *toda* função elítica está definida num toro.

De fato, dada uma base $\{w_1, w_2\} \in \mathbb{C}$, esta determina um *reticulado* $\Gamma = \{nw_1 + mw_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e a relação $z \sim \zeta \Leftrightarrow z - \zeta \in w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$, que é de *equivalência*. As propriedades reflexiva e simétrica são óbvias, enquanto que $z \sim \zeta \sim w \Rightarrow \zeta - w = Nw_1 + Mw_2$, $z - \zeta = nw_1 + mw_2$, donde $z - w = (n+N)w_1 + (m+M)w_2 \in \Gamma$. Com isso temos as *classes de equivalência* $[z]$, onde z é sempre um representante qualquer, e o conjunto de tais classes é o *toro* $T = \mathbb{C}/\Gamma$. Podemos então introduzir a *função quociente*

$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$, dada por $p(z) = [z]$.

Note uma sutileza: apesar de $\Gamma = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$, usamos sempre $w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$ na definição das classes de equivalência. Com isso, os reticulados $w + \Gamma$, $\forall\, w \in \mathbb{Z}$, são todos distintos, mas definem exatamente o *mesmo* toro.

Definição 1.1. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $r : Y \to X$ é dita *recobrimento* se qualquer $x \in X$ admite uma vizinhança aberta U tal que $r^{-1}(U) = \dot{\cup}_\lambda V_\lambda$, onde os V_λ são abertos de Y, dois a dois disjuntos, e $r|_{V_\lambda}$ é um *homeomorfismo* $\forall\, \lambda$.

De acordo com a Definição 1.1, vemos facilmente que $p : \mathbb{C} \to T$ é um recobrimento. Assim, qualquer função elítica $F : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ com períodos $w_{1,2}$ pode ser vista como $f : T \to \hat{\mathbb{C}}$ simplesmente por $f([z]) = F(z)$, e é claro que isso inclui as funções constantes.

Mais tarde veremos que toda função elítica é a inversa de uma *integral elítica*, que define-se como do tipo $\int_c^x R(t, \sqrt{q(t)})dt$, onde R é função racional, q é um polinômio de grau 3 ou 4 sem raízes múltiplas, e c é uma constante. O exemplo que originou esta denominação foi $\displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{(1-t^2)(1+\kappa^2 t^2)}}{1-t^2}dt$, representando o comprimento de arco da *elipse* com raios principais 1 e κ.

Uma das primeiras funções elíticas, cujo estudo encontramos com detalhes em várias literaturas de análise complexa, é a função "P de Weierstraß", simbolizada por $\wp$. Entretanto, aqui reservaremos este símbolo para a "P de Weierstraß simétrica", a ser introduziada no Capítulo 2. Quanto à "P de Weierstraß clássica", esta denotaremos simplesmente por P. Sua definição original é dada por uma soma sobre $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{0\}$, qual seja

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Gamma^*} \Big[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\Big]. \tag{1}$$

Prova-se que (1) está bem definida, isto é, independe de como se enumera

os elementos de Γ. Além disso, temos que P satisfaz à Equação Diferencial

$$P'^2 = 4P^3 - \alpha P - \beta,$$

Onde α, β são complexos que dependem de w_1/w_2. Dada

$$y(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - \alpha t - \beta}},$$

mostra-se ainda que $x = P(y)$. Estes fatos deixaremos aqui apenas como comentário, pois percebe-se que a definição de P é fortemente analítica, e de difícil manipulação. No Capítulo 2 iremos introduzir a funcão $\wp$, cuja inversão $1/\wp$ é apenas uma transformação linear afim de P, porém muito mais simples de ser estudada.

2. A relação entre P e $\wp$

Para deduzir a relação entre essas duas funções elíticas, é mais fácil considerar a base $\{2w_1, 2w_2\}$ e o reticulado $G = \{(2n+1)w_1 + (2m+1)w_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$. Tomando $W_{1,2} = 2w_{1,2}$ e $\Gamma = \{nW_1 + mW_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$, as respectivas bases geram as mesmas classes de equivalência para $\mathbb{C}/\Gamma$ e $\mathbb{C}/G$, donde a igualdade entre esses dois toros.

A Figura 1.1 representa um paralelogramo fundamental do reticulado G. Já vimos que P tem um *pólo* de ordem dois na origem, e (1) implica que este é seu único pólo no toro. Assim, $P(w_1) = e_1$, $P(w_2) = e_2$ e $P(w_1 + w_2) = e_3$, todos valores em $\mathbb{C}$.

Sem entrar em detalhes que serão vistos no Capítulo 2, vamos aqui somente adiantar que $\wp(0) = 0^2$ e $\wp(w_1 + w_2) = \infty^2$, sendo estes seus únicos zero e pólo em T. Como ambas são meromorfas, temos as seguintes *séries de Laurent* numa vizinhaça da origem:

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad \text{e}$$

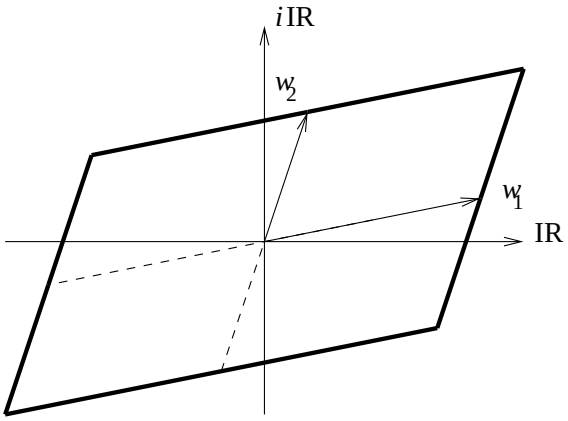


Figura 1.1: O toro T.

$$\frac{1}{\wp(z)} = \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

Assim, a funcão $f = b_{-2}P - 1/\wp$ é meromorfa no toro, mas talvez não possua nenhum pólo, o que chamaremos de *holomorfa*, termo que será melhor explicado na Seção 3. Neste caso, se f não for constante, a teoria de análise complexa garante que ela é aberta. Mas sendo T compacto, e f contínua, então $f(T) \neq \emptyset$ é ao mesmo tempo um aberto e um fechado de $\hat{\mathbb{C}}$, donde $f(T) = \hat{\mathbb{C}}$. Ou seja, f deveria assumir pólo. A única possibilidade é que seja um pólo simples na origem, donde

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{2}$$

e $c_{-1} = b_{-2}a_{-1} - b_{-1} \neq 0$. Agora usaremos o seguinte resultado da Teoria de Superfícies de Riemman:

Teorema 1.1 *Seja $f : T \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa não constante. Então $f^{-1}(z)$ e $f^{-1}(w)$ têm sempre o mesmo número de elementos, $\forall\, z, w \in \hat{\mathbb{C}}$, cada qual contando com sua "multiplicidade". Ou seja, tomando a correspondente $F : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ e $\zeta \in F^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{C}$, é "a primeira ordem $m \geq 1$ de derivação $F^{(m)}$ que não se anula em ζ" (para $z = \infty$ considera-se $(1/F)^{(m)}$).*

Chamamos *grau* de f a cardinalidade de $f^{-1}(z)$, $\forall\, z \in \hat{\mathbb{C}}$, que denotamos por $\deg(f)$. Pelo Teorema 1.1, vemos que a f encontrada em (2) é uma bijeção de T em $\hat{\mathbb{C}}$, em particular contínua. Como f é aberta, sua inversa é também contínua. Ou seja, f é um *homeomorfismo* entre T e $\hat{\mathbb{C}}$. Ocorre que $\hat{\mathbb{C}}$ é *simplesmente conexo*, mas isso não vale para T. Assim, chegamos a uma contradição, que deveu-se ao fato de supormos f não-constante.

Então, como f é uma constante, temos $P = a/\wp + b$ com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$.

3. Uma observação importante

Na introdução deste capítulo, discutimos o que se entende por uma função F "meromorfa". Mas este conceito também compreende o fato de que $\mathrm{Dom}(F)$ é um aberto de $\mathbb{C}$ e F pode assumir o valor ∞. Quando o domínio é uma superfície compacta, ou se $\mathrm{Im}(F) \subset \mathbb{C}$, então dizemos que é uma função *holomorfa*. Além disso, se existe a inversa F^{-1}, dizemos que é *biholomorfa*. Todos esses termos admitem o prefixo *anti-* quando aplicados à conjugada $\overline{F}$. Por exemplo, F anti-holomorfa equivale a $\overline{F}$ holomorfa, etc.

Capítulo 2

A Função $\wp$-Weierstraß Simétrica

Em comparação com a P-Weierstraß clássica, a $\wp$-Weierstraß simétrica tem as seguintes vantagens: é muito fácil de ser manipulada geometricamente, e também oferece bem mais informações a respeito de seus valores-imagem ao longo do toro. Como acabamos de ver na seção anterior, ambas guardam uma relação algébrica muito simples: $P = a/\wp + b$ com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$.

1. Resultados básicos

Neste capítulo, trabalharemos com o cenceito de *superfície de Riemann*, que é um par (X, Σ), onde X é uma variedade 2-dimensional conexa e Σ é uma *estrutura complexa* em X. Além dos abertos conexos de $\hat{\mathbb{C}}$, no Capíulo 1 vimos o toro, que também é exemplo de superfície de Riemann. De fato, como $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ é recobrimento, podemos induzir a estrutura complexa de $\mathbb{C}$ em T do seguinte modo: seja $V \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto tal que quaisquer dois de seus pontos não são equivalentes módulo Γ. Então $U = p(V)$ é aberto e $p|_V : V \to U$ é um homeomorfismo. Sua *inversa local* $(p|_V)^{-1} : U \to V$ é uma *carta*, e a coleção de todas as cartas assim formadas constitui a estrutura Σ de que falamos anteriormente.

Vamos introduzir agora resultados importantes que não estão estritamente relacionados com funções elíticas. Estes resultados constituem os argumentos fundamentais para podermos analisar o comportamento das funções elíticas. Primeiramente, precisamos da seguinte definição:

Definição 2.1. Uma *involução* é uma aplicação contínua $I : S \to S$ que satisfaz $I \circ I = id$ (a identidade em S). Quando S é uma superfície compacta, a involução é chamada *hiperelítica* se S/I é homeomorfa a S^2.

Da definição acima, é imediato ver que toda involução é uma bijeção. No próximo teorema, mencionamos as *transformações de Möbius*, que são aplicações $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dadas por $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ com a, b, c, d constantes em $\mathbb{C}$ e $ad \neq bc$.

Um resultado conhecido da análise complexa é que *todo* biholomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$ é caracterizado por uma transformação de Möbius. Além disso, uma tal transformação sempre leva circunferências em circunferências (de $\hat{\mathbb{C}}$). Vejamos agora o que ocorre com as involuções:

Teorema 2.1. *Toda involução holomorfa ou anti-holomorfa em $\hat{\mathbb{C}}$ é dada por uma transformação de Möbius M ou sua conjugada $\overline{M}$.*

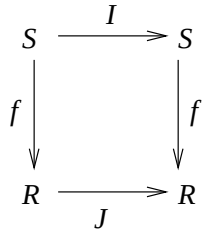
Prova: Tome uma involução $I : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Se é holomorfa, então é biholomorfa e assim uma transformação de Möbius. Se é anti-holomorfa, então $\overline{I}$ é biholomorfa, logo I é a conjugada de uma transformação de Möbius c.q.d.

Note que a recíproca do teorema acima *não* é válida, pois $z \to 2z$ não é uma involução.

Teorema 2.2. *Sejam S e R superfícies de Riemann, $I : S \to S$ uma involução e $f : S \to R$ uma função contínua, aberta e sobrejetora. Então, existe uma única involução $J : R \to R$ tal que $J \circ f = f \circ I$ se, e somente se, sempre que $f(x) = f(y)$ temos $f \circ I(x) = f \circ I(y)$.*

Prova: As hipóteses do teorema foram formuladas para garantir a comu-

tatividade do diagrama:



Admitimos que $J \circ f = f \circ I$. Se $f(x) = f(y)$ então

$$f \circ I(x) = J \circ f(x) = J \circ f(y) = f \circ I(y).$$

Suponhamos agora que $f \circ I(x) = f \circ I(y)$ quando $f(x) = f(y)$. Para cada $z \in R$ definimos $J(z) := f \circ I(x)$, para algum $x \in S$ tal que $f(x) = z$ (este elemento existe pois f é sobrejetora). Por hipótese $J : S \to S$ está bem definida. Além disso, $J \circ f = f \circ I$. A função J é contínua por causa do seguinte argumento: para qualquer subconjunto aberto $U \subset R$ temos que $I^{-1}(f^{-1}(U))$ é aberto em S. Mas $I^{-1}(f^{-1}(U)) = f^{-1}(J^{-1}(U))$, e conseqüentemente $J^{-1}(U)$ é aberto em R. Temos ainda

$$J \circ J \circ f = J \circ f \circ I = f \circ I \circ I = f.$$

Assim, J é uma involução c.q.d.

Observação. Uma versão mais geral do Teorema 2.2 é a seguinte: *Sejam S e R superfícies de Riemann, $I : S \to S$ um biholomorfismo e $p, q : S \to R$ recobrimentos. Então, $(\exists!\ J : R \to R$ biholomorfa tal que $J \circ p = q \circ I) \Leftrightarrow (q \circ I(x) = q \circ I(y) \Rightarrow p(x) = p(y))$.*

É imediato concluir que dado $F \subset R$ temos $J(F) = F$ se, e somente se, $I(f^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$.

2. A função $\wp$-Weierstraß simétrica

Como vimos no Capítulo 1, qualquer toro T é o quociente de $\mathbb{C}$ por algum reticulado $G \subset \mathbb{C}$. Podemos descrever isto por meio de números complexos não nulos w_1 e w_2, com $\dfrac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$. Assim, $G = \{(2n+1)w_1 + (2m+1)w_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $T = \mathbb{C}/G$.

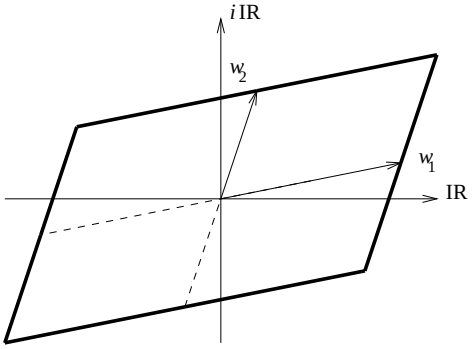


Figura 2.1: O Toro T.

No toro T a involução $I(z) = -z$ tem exatamente quatro pontos fixos: $0, w_1, w_2$ e $w_1 + w_2$. Usando a *fórmula de Euler-Poincaré* obtemos:

$$\chi(T/I) = \frac{\chi(T)}{2} + \frac{4}{2} = 2.$$

Logo, o gênero de T/I é zero e pelo *teorema de Koebe* existe um biholomorfismo $\mathcal{B} : T/I \to \hat{\mathbb{C}}$. A menos de uma transformação de Möbius a função $\mathcal{B}$ está bem definida.

Definição 2.2. A *função $\wp$-Weierstraß simétrica* é a composta $\mathcal{B} \circ (\cdot/I) : T \to \hat{\mathbb{C}}$ tal que

$$\wp(0) = 0, \quad \wp(w_1 + w_2) = \infty \quad \text{e} \quad \wp\Big(\frac{w_1 + w_2}{2}\Big) = i.$$

Devido à função quociente $\cdot/I : T \to T/I$, é imediato concluir que $\wp(-z) = \wp(z)$, para qualquer $z \in T$. Logo $\wp\Big(-\dfrac{w_1 + w_2}{2}\Big) = i$. Além disso,

deg($\wp$)=2 e seus pontos de ramo são exatamente os quatro pontos fixos de I.

Da Definição 2.1 vemos que I é hiperelítica. Vamos agora estudar outra função hiperelítica em T, que é dada por $\mathcal{H}(z) = -z + w_1 + w_2$ (rotação em torno de $\dfrac{w_1 + w_2}{2}$). Seu conjunto de pontos fixos é exatamente $\left\{\pm\dfrac{w_1 + w_2}{2}, \pm\dfrac{w_1 - w_2}{2}\right\}$. Do Teorema 2.2, $\mathcal{H}$ e $\wp$ induzem outra involução em $\hat{\mathbb{C}}$, e como ambas são meromorfas, a involução induzida também será meromorfa. Do Teorema 2.1 esta involução é uma transformação de Möbius. Como $\mathcal{H}$ intercambia 0 e $w_1 + w_2$ e deixa fixo $\dfrac{w_1 + w_2}{2}$, se J é a induzida por $\wp$ temos:

$$J(0) = J(\wp(0)) = \wp(\mathcal{H}(0)) = \wp(w_1 + w_2) = \infty;$$
$$J(\infty) = J(\wp(w_1 + w_2)) = \wp(\mathcal{H}(w_1 + w_2)) = \wp(0) = 0;$$
$$J(i) = J(\wp(\frac{w_1 + w_2}{2})) = \wp(\mathcal{H}(\frac{w_1 + w_2}{2})) = \wp(\frac{w_1 + w_2}{2}) = i.$$

Assim, a transformação de Möbius associada é

$$\wp \to -\frac{1}{\wp}. \tag{3}$$

Uma vez que os pontos $\pm\dfrac{w_1 - w_2}{2}$ permanecem fixos pela $\mathcal{H}$, neles temos $\wp^2 = -1$. Como o grau da $\wp$ é 2 e $\mathcal{H}(\pm\dfrac{w_1 + w_2}{2}) \neq \mathcal{H}(\pm\dfrac{w_1 - w_2}{2})$, temos

$$\wp\Big(\pm\frac{w_1 - w_2}{2}\Big) = -i.$$

Além disso, (3) implica que todo segmento em T com extremos p, q, e cujo centro é um ponto fixo de $\mathcal{H}$, satisfaz $\wp(q) = -1/\wp(p)$. Veja a figura abaixo.

De fato, como J é induzida de $\mathcal{H}$ pela $\wp$, temos $(\wp \circ \mathcal{H})(p) = (J \circ \wp)(p) = -1/\wp(p)$. Assim, basta mostrarmos que $\mathcal{H}(p) = q$. Tomamos v um ponto fixo de $\mathcal{H}$ e p, q os extremos de um segmento com ponto médio v. Os pontos p, q e v satisfazem: $|\overrightarrow{pq}| = 2|\overrightarrow{vq}|$, donde $p = 2v - q$. Como $2v - w_1 - w_2 \in G$, temos o resultado para $v \in \left\{\pm\dfrac{w_1 + w_2}{2}, \pm\dfrac{w_1 - w_2}{2}\right\}$.

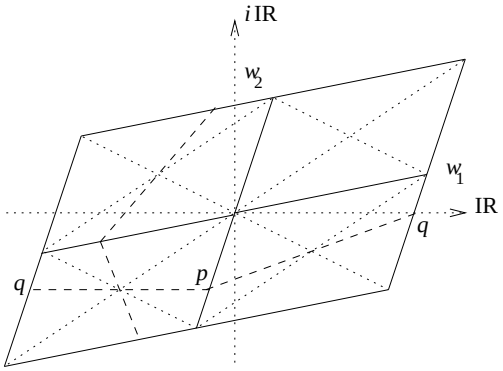


Figura 2.2: p, q diagonalmente opostos no sub-reticulado, $\wp(q) = -\dfrac{1}{\wp(p)}$.

No caso especial de um toro retangular, a menos de biholomorfismo ou anti-biholomorfismo podemos assumir que $w_1 \in \mathbb{R}_+$ e $w_2 \in i\mathbb{R}_+$. Algumas involuções adicionais também vão satisfazer as hipóteses do Teorema 2.2, a saber:

$$\begin{aligned} I_1 &: z \to \overline{z}; \\ I_2 &: z \to -\overline{z}; \\ I_3 &: z \to \overline{z} + w_2; \\ I_4 &: z \to -\overline{z} + w_1. \end{aligned}$$

Elas estão representadas na Figura 2.3:

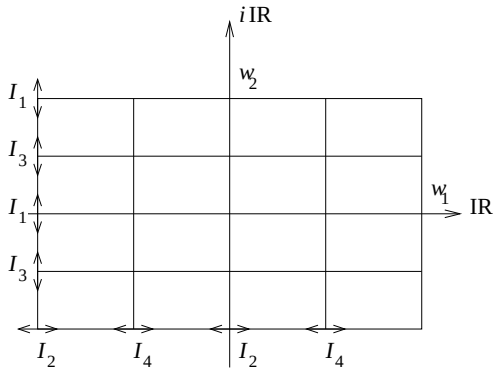


Figura 2.3: As involuções $I_{1,2,3,4}$ no toro retangular T.

Junto com $\wp$, elas induzem involuções anti-holomorfas $J_{1,2,3,4}$ em $\hat{\mathbb{C}}$ que identificaremos com o auxílio do Teorema 2.2.

Consideramos I_1 e I_2. Elas fixam alguns pontos especiais como $0, w_1+w_2$ e intercambiam $\dfrac{w_1+w_2}{2}$ e $\dfrac{w_1-w_2}{2}$. Uma vez que $\wp(0)=0$, $\wp(w_1+w_2)=\infty$ e $\wp(\dfrac{w_1+w_2}{2}) = -\wp(\dfrac{w_1-w_2}{2}) = i$, elas induzem a mesma involução em $\hat{\mathbb{C}}$, que fixa $0, \infty$ e intercambia i com $-i$. Do Teorema 2.1, esta involução é $\wp \to \overline{\wp}$. Em particular, isto significa que a imagem de $\wp$ do conjunto dos pontos fixos de $I_{1,2}$ é *real*. Assim, $\wp(w_1) = \tan\alpha$ para algum $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}$. Pela Figura 2.3, w_1 e w_2 são os extremos de um segmento com ponto médio $\dfrac{w_1+w_2}{2}$, e concluímos que $\wp(w_2) = -\cot\alpha$. Como $\tan\alpha = -\cot(\alpha+\pi/2)$, a menos de um anti-biholomorfismo podemos escolher o nosso toro de modo que $\alpha > 0$. Dessa forma, consideramos $\alpha \in (0, \pi/2)$.

A involução I_4 intercambia 0 com w_1 e w_1+w_2 com w_2. Logo, se J_4 for a involução induzida por $\wp$ (de I_4), ela será uma transformação de Möbius anti-holomorfa que satisfaz:

$J_4(0) = J_4(\wp(0)) = \wp(I_4(0)) = \wp(w_1) = \tan\alpha;$
$J_4(\infty) = J_4(\wp(w_1+w_2)) = \wp(I_4(w_1+w_2)) = \wp(w_2) = -\cot\alpha;$
$J_4(-\cot\alpha) = J_4(\wp(w_2)) = \wp(I_4(w_2)) = \wp(w_1+w_2) = \infty.$

Portanto J_4 é dada por

$$\wp \to \frac{\tan\alpha - \overline{\wp}}{1 + \tan\alpha \cdot \overline{\wp}}.$$

Os cálculos para determinar a involução induzida por I_3 são análogos. A próxima figura representa $\wp(T)$ com as suas involuções induzidas (foram dados os mesmos nomes).

Usualmente escrevem-se os valores de $\wp$ sobre o toro, como na próxima figura.

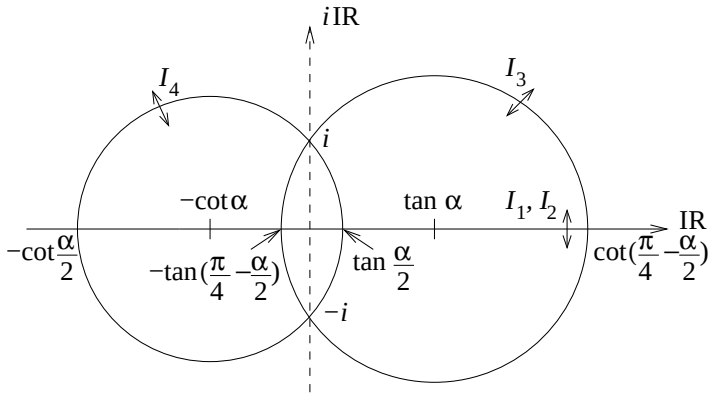


Figura 2.4: A imagem $\wp(T)$ com as involuções induzidas.

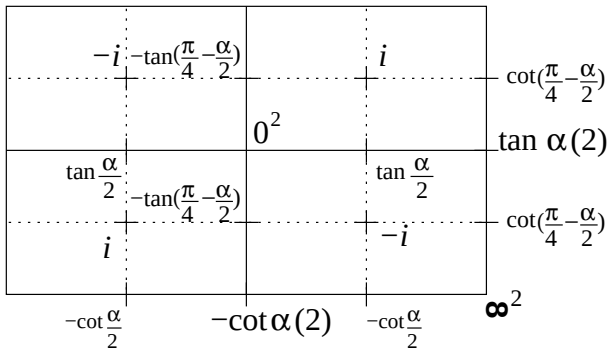


Figura 2.5: Os valores de $\wp$ no toro retangular T.

Agora estudaremos o caso especial do toro rômbico. A menos de um biholomorfismo ou anti-biholomorfismo podemos assumir que $Arg(w_1) \in (0, \pi/2)$ e $w_2 = -\overline{w}_1$. As involuções definidas anteriormente $I_{3,4}$ não são mais válidas aqui, mas $I_{1,2}$ e outras duas involuções ainda vão satisfazer as hipóteses do Teorema 2.1, a saber:

$$I_5 : z \to \overline{z} + w_1 + w_2;$$
$$I_6 : z \to -\overline{z} + w_1 - w_2.$$

Elas estão representadas na Figura 2.6.

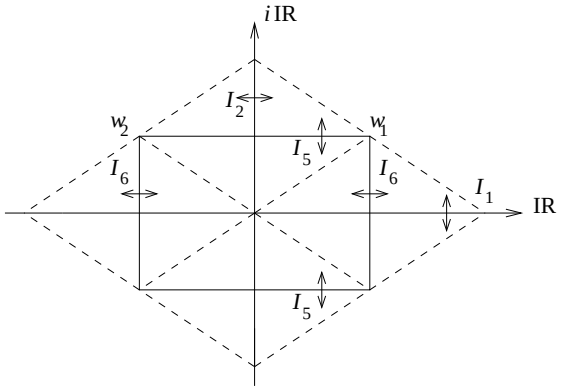


Figura 2.6: As involuções $I_{1,2,5,6}$ no toro rômbico T.

Em $\hat{\mathbb{C}}$, $I_{1,2}$ induzem a mesma involução, a saber $\wp \to -\overline{\wp}$. O mesmo ocorre com $I_{5,6}$ que também induzem a mesma involução: $\wp \to 1/\overline{\wp}$. Uma conseqüência importante da involução $\wp \to -\overline{\wp}$ em $\hat{\mathbb{C}}$ é que a imagem pela $\wp$ da diagonal de T é o eixo imaginário. Como escolhemos $\wp\Big(\dfrac{w_1+w_2}{2}\Big)= i$, a imagem pela $\wp$ da diagonal horizontal de T é $i\mathbb{R}_-$, enquanto que a imagem pela $\wp$ da diagonal vertical de T é $i\mathbb{R}_+$. Da involução $\wp \to 1/\overline{\wp}$ em $\hat{\mathbb{C}}$, temos que a imagem do sub-retângulo representado na Figura 2.6 cobre S^1. Dessa forma, $\wp(w_1) = e^{i\rho}$ para algum $\rho \in (-\pi/2, \pi/2)$. Similarmente ao caso do toro retângulo, sem perda de generalidade tomamos $\rho \geq 0$ e agora consideramos $\rho \in [0, \pi/2)$. Da Figura 2.6 concluímos que $\wp(w_2) = -e^{-i\rho}$.

No caso particular do toro quadrado, que é simultaneamente rômbico e retangular, temos $\alpha = \pi/4$ e $\rho = 0$. A próxima figura descreve os valores de $\wp$ diretamente sobre o toro.

3. A equação algébrica do toro

O teorema seguinte é um dos resultados centrais da Teoria de Superfícies de Riemman:

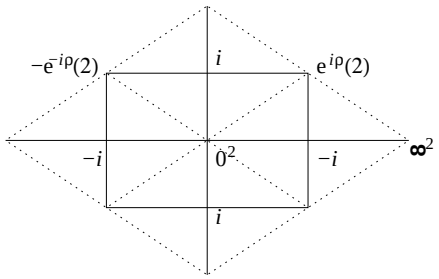
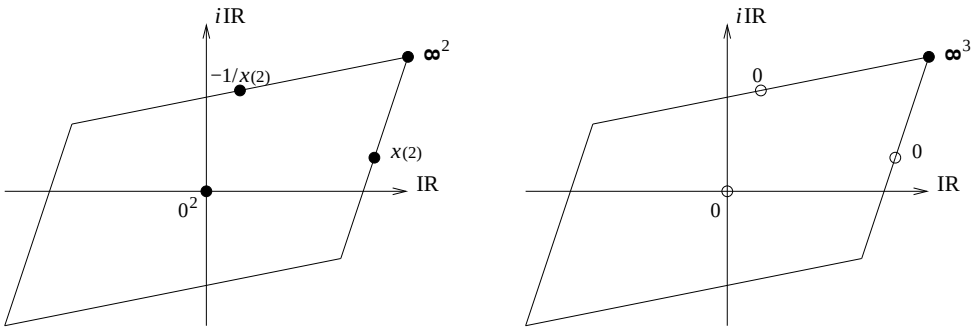


Figura 2.7: Os valores de $\wp$ no toro rômbico T.

Teorema 2.3. *Toda superfície de Riemann compacta X pode ser algebricamente descrita por duas funções $f, g : X \to \hat{\mathbb{C}}$ que satisfazem uma equação polinomial a duas indeterminadas f e g, com coeficientes constantes em $\mathbb{C}$. Reciprocamente, toda equação polinomial a duas indeterminadas f e g, com coeficientes constantes em $\mathbb{C}$, admite uma superfície de Riemann compacta X tal que f, g são funções de X em $\hat{\mathbb{C}}$.*

Com base neste teorema, vamos deduzir uma equação algébrica para o toro $T = \mathbb{C}/G$. Na Figura 2.8(a), observe os únicos pontos de ramo da $\wp$, marcados com $\bullet$, onde $x = \wp(w_1) \in \mathbb{C}^*$. Como $\deg(\wp) = 2$, estes são os únicos pontos do toro em que $\wp$ assume tais valores.



(a) (b)

Figura 2.8: (a) valores de $\wp$; (b) valores de $\wp'$.

Na Figura 2.8(b), marcamos apenas os pólos e zeros de $\wp'$. Note que esta

possui um único pólo (de ordem 3), sendo que seus zeros são todos simples, uma vez que $\deg(\wp') = 3$.

Observe agora que a função $f = \wp(\wp - x)(\wp + 1/x)$ tem exatamente os mesmos pólos e zeros que $g = \wp'^2$. Numa vizinhança de cada cada ponto $\bullet$, considere os desenvolvimentos de Laurent para f e g. Então vemos que f/g é uma função holomorfa de T em $\mathbb{C}$, uma vez que não tem pólos. Pelo que já discutimos na Seção 2.1, esta deve ser uma constante $c \in \mathbb{C}$. Além disso, $c \neq 0$ pois $f \not\equiv 0$. Assim, obtemos uma equação algébrica para T dada por

$$\wp'^2 = c\wp(\wp - x)(\wp + 1/x). \tag{4}$$

No caso particular do toro retangular, $x = \tan\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ e (4) se reescreve como

$$\wp'^2 = c\wp(\wp - \tan\alpha)(\wp + \cot\alpha).$$

No caso particular do toro rômbico, $x = e^{i\rho}$ e (4) se reescreve como

$$\wp'^2 = c\wp(\wp - e^{i\rho})(\wp + e^{-i\rho}).$$

4. A constante c

Começamos por observar que quaisquer dois toros com mesmo quociente $\dfrac{w_1}{w_2}$ são biholomorfos, e reciprocamente. Basta vermos que, se $\dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2}$, então existe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ com $g(z) = az$ e $a \in \mathbb{C}^*$ tal que $g(w_1) = \tilde{w}_1$ e $g(w_2) = \tilde{w}_2$. Da Observação do Teorema 2.2 temos que T é biholomorfo a $\tilde{T}$. A recíproca também é válida pois $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo, e da análise complexa temos que todo biholomorfismo de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ é uma transformação linear afim. Como podemos sempre tomar nossos reticulados pela origem, ela é da forma $z \mapsto az$ para algum $a \in \mathbb{C}^*$.

Consideramos agora $T = \mathbb{C}/\Gamma$ e $\tilde{T} = \mathbb{C}/\tilde{\Gamma}$, onde $\tilde{w}_1 = aw_1$ e $\tilde{w}_2 = aw_2$ e $g(z) = az + b$ com $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, conforme a Figura 2.9. Sejam $\beta(t) :=$

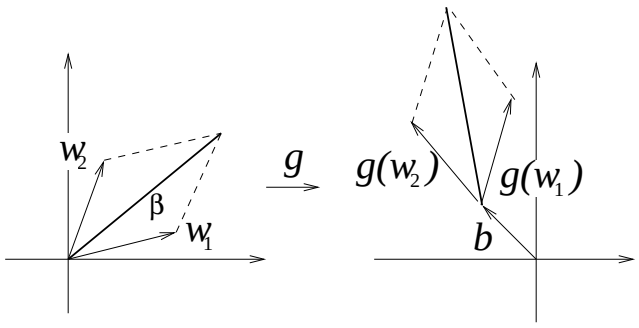


Figura 2.9: A aplicação g.

$t(w_1 + w_2)$, $0 \leq t \leq 1$ e $\tilde{\beta} = t(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2) + b = a\beta(t) + b$, $0 \leq t \leq 1$. Então $\wp(\beta(t))$ é uma curva que liga 0 a ∞ e passa por $i = \wp(\beta(\frac{1}{2}))$. Logo, $\wp(\beta(t))'|_{\frac{1}{2}} = y \in \mathbb{C}^*$, sendo que y depende apenas de $\dfrac{w_1}{w_2}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\wp(\beta(t))'|_{\frac{1}{2}}]^2 = y^2 &\Rightarrow \wp'(\beta(1/2)) \cdot [\beta'(1/2)]^2 = y^2 \\
&\Rightarrow c\, i(i-x)(i+1/x) \cdot (w_1+w_2)^2 = y^2 \\
&\Rightarrow c = \frac{y^2/w_2^2}{(1+w_1/w_2)^2(x-1/x-2i)}.
\end{aligned}$$

Assim, a relação entre c e o reticulado Γ para cada $u = \dfrac{w_1}{w_2}$ fixo é única, pois para cada par $(w_1, w_2), (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$ com $\dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2} = u$ temos:

$$c|_{(w_1,w_2)} = c|_{(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2)} \Longleftrightarrow (w_1+w_2)^2 = (\tilde{w}_1+\tilde{w}_2)^2 \Longleftrightarrow (w_1,w_2) = \pm(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2),$$

que por sua vez define o mesmo reticulado Γ. Logo, a menos de um biholomorfismo ou anti-biholomorfismo, todos os toros estão representados num quadrante de círculo, conforme a Figura 2.10.

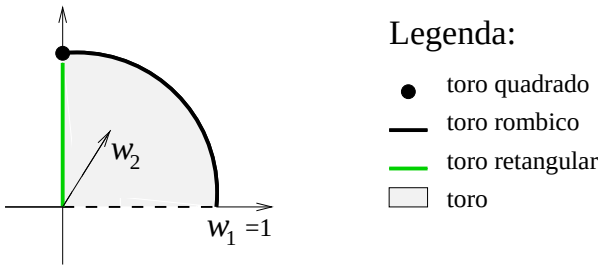


Figura 2.10: Representação dos tipos de toros.

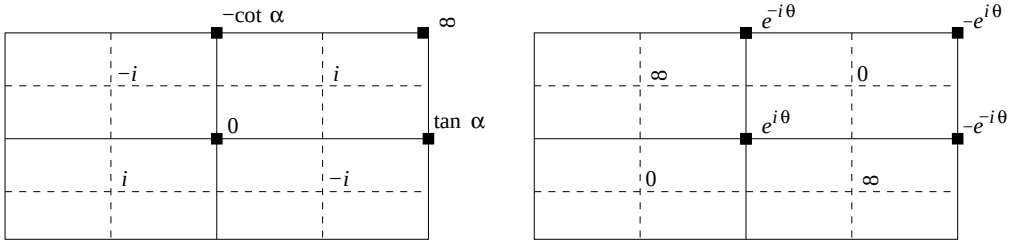
Capítulo 3

A Função γ

Apresentaremos, neste capítulo, um exemplo de função elítica que pode ser obtido da função $\wp$ de Weierstrass Simétrica através de uma transformação de Möbius adequada.

Nosso exemplo é a função γ. Para construí-la, considere a transformação de Möbius dada por $Q(z) = e^{i\theta}\dfrac{i-z}{i+z}$, onde $\theta \in (0, \pi/2)$ será determinado como função de α. Os principais valores-imagem de $\gamma = Q \circ \wp$ estão descritos na Figura 3.1.

Os pontos de ramificação de γ são as pré-imagens pela $\wp$ de $0, \tan\alpha, \infty$ e $-\cot\alpha$. Seus valores-imagem são, respectivamente, $e^{i\theta}$, $-e^{-i\theta}$, $-e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$.



(a) (b)

Figura 3.1: a) valores de $\wp$; b) valores de γ.

Apresentamos, a seguir, um estudo detalhado da função γ e de sua transformação de Möbius geradora. Neste estudo faremos uso de propriedades geométricas do toro retangular para determinar os valores esboçados na

Figura 3.1(b).

Seguindo procedimento análogo ao explicado no Capítulo 2, podemos também definir γ de modo que:

$$\gamma(0) = e^{i\theta}, \quad \gamma(w_1 + w_2) = -e^{i\theta}, \quad \gamma(\frac{w_1 + w_2}{2}) = 0.$$

Além disso,

$$\gamma(\pm\frac{w_1 + w_2}{2}) = Q(\wp(\pm\frac{w_1 + w_2}{2})) = Q(i) = 0$$

e

$$\gamma(\pm\frac{w_1 - w_2}{2}) = Q(\wp(\pm\frac{w_1 - w_2}{2})) = Q(-i) = \infty.$$

A reflexão no eixo imaginário $I_2(z) = -\bar{z}$ induz uma involução anti-holomorfa de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$ que fixa $\gamma = e^{i\theta}$ e intercambia os valores 0 e ∞. Logo, a involução induzida J_2 é dada por $\wp \to 1/\bar{\wp}$. Com isto, observamos que os pontos fixos de J_2 estão sob o círculo unitário S^1 (inclusive os pontos $\gamma(w_1), \gamma(w_2)$).

A rotação de 180° em torno de $\dfrac{w_1 + w_2}{2}$ é dada por $\mathcal{H}(z) = -z + (w_1 + w_2)$. A sua involução induzida intercambia $e^{i\theta}$ com $e^{-i\theta}$, e fixa 0. Assim, ela corresponde a $z \to -z$. Conseqüentemente, $\gamma(w_1) = -\gamma(w_2)$.

Aplicando a involução anti-holomorfa $I_3(z) = \bar{z} + w_2$, reflexão na reta que passa por $z = \dfrac{w_2}{2}$ e é paralela ao eixo real, observamos que a sua induzida J_3 fixa os pontos $\gamma = 0$ e $\gamma = \infty$ e intercambia $e^{i\theta}$ com $\gamma(w_2) = Q(-\cot\alpha)$. Como $J_3(z) = \bar{z}$, temos $\gamma(w_2) = e^{-i\theta}$ e então $\gamma(w_1) = -e^{-i\theta}$. Assim, obtemos a configuração esboçada na Figura 3.1(b).

Para estabelecermos uma relação entre os ângulos α e θ, observamos que $Q(\tan\alpha) = -e^{-i\theta}$, donde

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta}\frac{i-\tan\alpha}{i+\tan\alpha} = -e^{-i\theta} &\Leftrightarrow e^{i\theta}(i-\tan\alpha) = -e^{-i\theta}(i+\tan\alpha)\\
&\Leftrightarrow \tan\alpha\cdot(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) = i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\\
&\Leftrightarrow \tan\alpha = \cot\theta\\
&\Leftrightarrow \alpha+\theta = \pi/2.
\end{aligned}
$$

Para determinarmos os valores de outros pontos do toro plano, observe que:

- $\frac{w_2}{2}$ é fixado pela involução I_2, logo $\gamma(\frac{w_2}{2}) \in S^1$;
- $\frac{w_2}{2}$ é fixado pela involução I_3, logo $\gamma(\frac{w_2}{2})$ é real.

Portanto, temos $\gamma(w_2/2) = \pm 1$. Uma vez que $\alpha \in (0, \pi/2)$, então $\theta \in (0, \pi/2)$, donde $\gamma(w_2/2) = 1$. Esse valor também pode ser confirmado por $Q(-\tan(\pi/4 - \alpha/2)) = 1$, pois

$$
e^{i\theta}\cdot\frac{i+\tan(\pi/4-\alpha/2)}{i-\tan(\pi/4-\alpha/2)} = i\cdot e^{-i\alpha}\cdot\frac{i+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+1}}{i-\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+1}} = i\cdot e^{-i\alpha}\cdot\frac{i+e^{i\alpha}}{i-e^{-i\alpha}} = 1.
$$

Além disso, considere as involuções anti-holomorfas $I_1(z) = \bar{z}$ (reflexão no eixo real) e $I_4(z) = -\bar{z} + w_1$ (reflexão na reta que passa por $z = \frac{w_1}{2}$ e é paralela ao eixo imaginário). Estas involuções induzem $J_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ e $J_4(z) = -\bar{z}$, respectivamente. Disto podemos inferir que:

- $\frac{w_1}{2}$ é fixado por I_1, logo $\gamma(\frac{w_1}{2}) \in S^1$;
- $\frac{w_1}{2}$ é fixado por I_4, logo $\gamma(\frac{w_1}{2})$ é imaginário puro.

Portanto, temos $\gamma(\frac{w_1}{2}) = \pm i$. Uma vez que $\alpha \in (0, \pi/2)$, então $\theta \in (0, \pi/2)$, donde $\gamma(w_1/2) = i$. Esse valor também pode ser confirmado por $Q(\tan(\alpha/2)) = i$, pois

$$
e^{i\theta}\cdot\frac{i-\tan(\alpha/2)}{i+\tan(\alpha/2)} = i\cdot e^{-i\alpha}\cdot\frac{i-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+1}}{i+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+1}} = i\cdot e^{-i\alpha}\cdot\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{-i\alpha}} = i.
$$

Devido à relação de equivalência que define o toro, é possível "transladá-lo", de forma que seus pontos de ramo estejam no interior do retângulo, conforme a Figura 3.2.

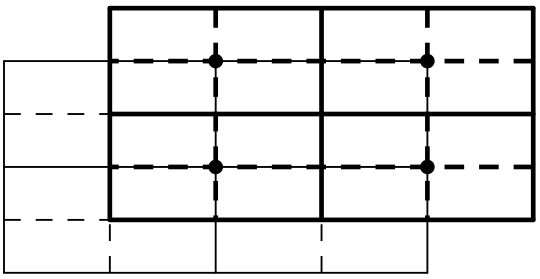


Figura 3.2: Diferentes maneiras de se representar o toro.

Dessa forma, é possível representar os valores da função $\gamma : T \to \hat{\mathbb{C}}$ sob o toro conforme a Figura 3.3, descrita abaixo.

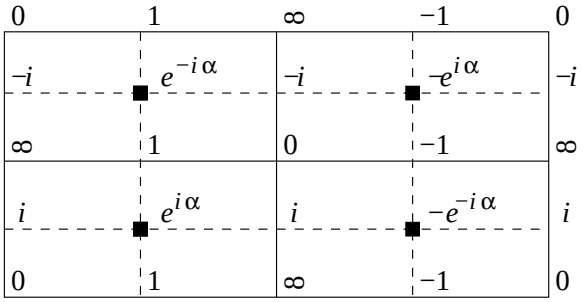
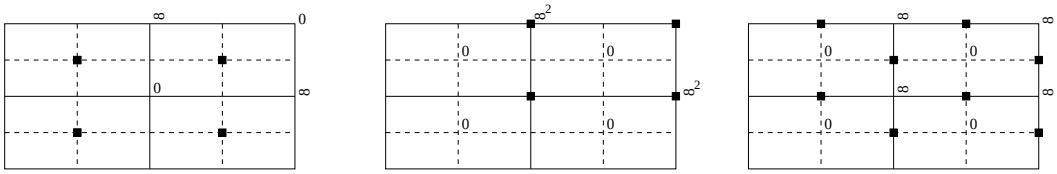


Figura 3.3: Valores da função γ.

Vamos agora determinar uma equação algébrica para este toro. Para os pontos de ramo da função γ, precisamente $\gamma^{-1}(\{\pm e^{\pm i\theta}\})$, temos que expressão $\gamma^2 + \gamma^{-2} - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}$ se anula. Considerando-se também os pólos e zeros de γ, γ' e γ'/γ, descritos na Figura 3.4, obtemos a equação

$$(\gamma'/\gamma)^2 = c_0(\gamma^2 + \gamma^{-2} - 2\cos(2\theta)),\ c_0 \in \mathbb{C}^*.$$



a) b) c)

Figura 3.4: pólos e zeros de a) γ; b) γ' e c) γ'/γ.

Para uma curva $\delta(t)$ no toro que parametriza o eixo real do plano complexo quando aplicada a γ, ou seja, $\gamma(\delta(t)) = t \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\gamma'(\delta(t)) \cdot \delta'(t) = \frac{d}{dt}(\gamma(\delta(t))) = \frac{d}{dt}(t) = 1.$$

Portanto, $\gamma'(\delta(t))^2\delta'(t)^2 = 1$.

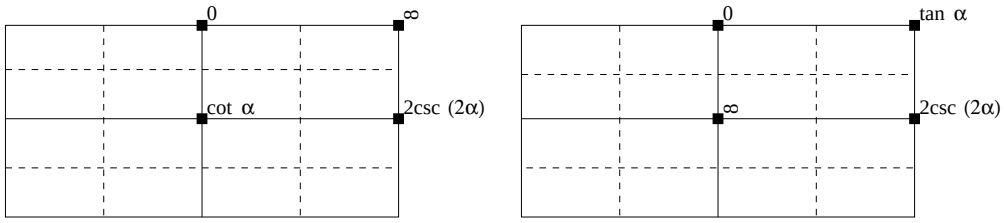
Por outro lado, como δ é uma parametrização do eixo real do toro, segue-se que $\delta'(t) = h(t) \in \mathbb{R}$. Deste modo, $\gamma'(\delta(t))^2 = \dfrac{1}{h(t)^2} \in \mathbb{R}_+$, donde $\gamma'|_\delta \in \mathbb{R}$.

Assim, $(\frac{\gamma'}{\gamma})^2|_\delta \in \mathbb{R}_+$ e $(\gamma^2 + \gamma^{-2} - 2\cos 2\theta)|_\delta \in \mathbb{R}_+$, donde temos que c_0 é real positiva. Assim, c_0 determina apenas uma dilatação do reticulado, e fixamos $c_0 = 1$. Logo, uma equação algébrica para T é dada por

$$\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 = \gamma^2 + \gamma^{-2} - 2\cos 2\theta.$$

Para finalizarmos este capítulo, apresentaremos outra relação muito usada entre as funções elíticas $\wp$ e γ, mas que não pode ser obtida pela transformação de Möbius Q, pois agora transladamos o reticulado. Para obter a nova relação, deduzimos da Figura 3.5 os pólos e zeros de

$$\wp - \frac{1}{\wp} + \tan\theta - \cot\theta = \wp - \frac{1}{\wp} + \cot\alpha - \tan\alpha = (\wp + \cot\alpha) - (\frac{1}{\wp} + \tan\alpha).$$



(a) (b)

Figura 3.5: Pólos e zeros de a) $\cot\alpha + \wp$ e b) $\tan\alpha + 1/\wp$.

Logo, é imediato observar que os pólos e zeros de $(\wp - 1/\wp + \tan\theta - \cot\theta)^{-1}$ são os mesmos (e com a mesma ordem) de γ^2 (veja a Figura 3.3). Portanto, estas equações coincidem a menos de uma constante de proporcionalidade, isto é,

$$\gamma^2 = \frac{c_1}{\wp - 1/\wp + \tan\theta - \cot\theta}\ ,\ c_1 \in \mathbb{C}^*.$$

Mas para $\wp = \tan\frac{\alpha}{2}$ a função γ assume o valor i, e como $\tan\frac{\alpha}{2} - \cot\frac{\alpha}{2} = -2\cot\alpha$ temos que $c_1 = \cot\alpha + \tan\alpha$, donde

$$\gamma^2 = \frac{\cot\alpha + \tan\alpha}{\wp - 1/\wp + \tan\theta - \cot\theta}.$$

Capítulo 4

Aplicações

1. Resultados clássicos

Neste capítulo faremos uma aplicação da teoria de funções elíticas (re)criando um exemplo de superfície mínima. Começamos por introduzir alguns resultados sobre a teoria de superfícies mínimas. Para maiores detalhes vide [1], [2], [3] ou [4].

Teorema 4.1. Seja $X : R \to \mathbb{E}$ uma imersão isométrica completa de uma superfície de Riemann R sobre um espaço $\mathbb{E}$ "flat", completo e tridimensional. Se X é mínima e sua curvatura Gaussiana total $\int_R K dA$ é finita, então R é biholomorfa a uma superfície de Riemann compacta $\overline{R}$ perfurada em um número finito de pontos $\{p_1, p_2, \cdots, p_s\}$.

Teorema 4.2. (Representação de Weierstraß). Seja R uma superfície de Riemann, g e dh função e 1-forma meromorfas em R, tais que os zeros de dh coincidem com os zeros e pólos de g. Suponhamos que $X : R \to \mathbb{E}$, dada por

$$X(p) = \int^p (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{g} - g, \frac{i}{g} + ig, 2\Big)dh,$$

esteja bem definida. Então X é uma imersão mínima conforme. Reciprocamente, toda imersão mínima conforme $X : R \to \mathbb{E}$ pode ser expressa como acima para alguma função g e 1-forma dh meromorfas.

Definição 4.1. O par (g, dh) são os *dados de Weierstraß* e $\phi_{1,2,3}$ as *formas de Weierstraß* em R da imersão mínima $X : R \to X(R) \subset \mathbb{E}$.

Teorema 4.3. Nas hipóteses dos Teoremas 4.1 e 4.2, os dados de Weierstraß (g, dh) se estendem meromorficamente sobre $\overline{R}$.

Definição 4.2. Um *fim* de R é a imagem de uma vizinhança perfurada V_p de um ponto $p \in \{p_1, p_2, \cdots, p_s\}$ tal que $(\{p_1, p_2, \cdots, p_s\} \setminus p) \cap \overline{V}_p = \emptyset$. O fim é mergulhado se sua imagem é mergulhada para uma vizinhança de p suficientemente pequena.

Teorema 4.4. (Fórmula de Jorge-Meeks). Seja $X : R \to \mathbb{E}$ uma superfície mínima regular completa de curvatura total finita $\int_R KdA$. Se os fins de R são mergulhados, então

$$deg(g) = k + r - 1$$

onde k é o gênero de $\overline{R} = R \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_s\}$ e r é o número de fins.

Exemplo 4.1. O catenóide é um exemplo de superfície mínima, cujos dados de Weierstraß são $g = z$, $dh = dz/z$, e a superfície de Riemann compacta é $\hat{\mathbb{C}}$. O catenóide possui dois fins, nos pontos $p_0 = 0$ e $p_1 = \infty$.

Um cálculo simples mostra que a imersão mínima do catenóide é dada por $X(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} + x, \dfrac{y}{x^2 + y^2} + y, 2\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \right)$.

A função g é a projeção estereográfica da aplicação normal de Gauß $N : R \to S^2$ da imersão mínima X, ou seja,

$$N = \frac{1}{|g|^2 + 1}(2Re\{g\}, 2Im\{g\}, |g|^2 - 1).$$

Ela é um recobrimento (ramificado) de $\hat{\mathbb{C}}$. Além disso, $\int_R KdA = -4\pi deg(g)$.

O elemento de reta ds de $X : R \to \mathbb{E}$ é dado por

$$ds = \frac{1}{2}\left(|g| + \frac{1}{|g|} \right) |dh|$$

e a curvatura Gaussiana é dada pela seguinte fórmula:

$$K = -\Big(\frac{2}{|g| + 1/|g|}\Big)^4 \Big|\frac{dg/g}{dh}\Big|^2.$$

Teorema 4.5. Se σ é uma curva em $X(R)$ então vale:

i) σ é assintótica se, e somente se, $\frac{dg}{g}(\sigma') \cdot dh(\sigma') \in i\mathbb{R}$;
ii) σ é principal se, e somente se, $\frac{dg}{g}(\sigma') \cdot dh(\sigma') \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.6. Seja σ uma curva analítica em R tal que $g(\sigma)$ está contida em um meridiano $e^{i\theta}\mathbb{R}$ ou no equador S^1, e $dh(\sigma') \subset \mathbb{R}$ ou $dh(\sigma') \subset i\mathbb{R}$. Então σ é uma geodésica de R e uma linha de simetria.

2. Exemplo de superfície mínima

Considere a superfície da Figura 4.1, que chamaremos *campo de cateóides*. Trata-se de uma família de superfícies mínimas duplamente periódicas, cujos membros denotaremos por M.

Apresentamos a seguir a construção de M. Para a obtenção desta superfície, utilizamos o *método da construção reversa* desenvolvido por Hermann Karcher na década de 80 (vide [1]). Seu método consiste dos seguintes passos:

1. Esboço da Superfície Mínima M;
2. Compactificação $\overline{M}$ de M;
3. Hipóteses de Simetria;
4. Equação Algébrica de $\overline{M}$;
5. Obtenção dos Dados de Weierstraß de $\overline{M}$;
6. Verificação das Involuções de $\overline{M}$ e das Simetrias das Hipóteses;
7. Análise dos Períodos;
8. Verificação do Mergulho da Peça Fundamental.

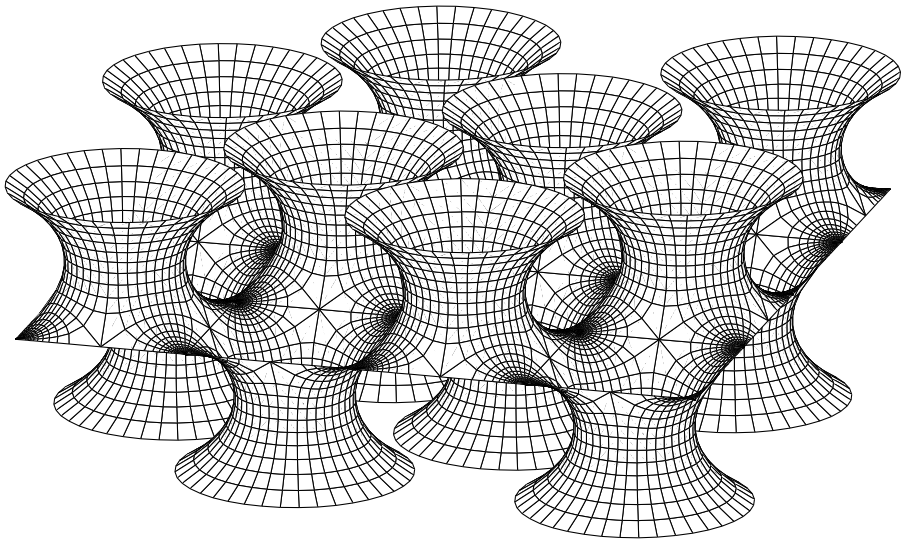
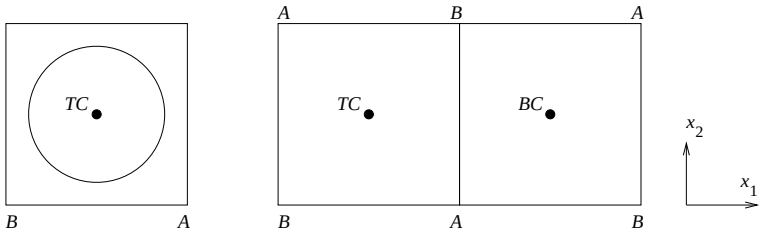


Figura 4.1: Um campo de catenóides.

Consideramos uma superfície topológica que admita uma estrutura Riemanniana e seja isometricamente imersa em $\mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades: 1) a superfície imersa é mínima; 2) ela é gerada pela rotação em torno de um segmento de reta junto com um grupo de translação horizontal, ambos aplicados sobre uma peça fundamental P, onde P é uma superfície com bordo e um fim catenoidal; 3) A projeção de ∂P ortogonalmente sobre $x_3 = 0$ consiste de um quadrado Q conforme a Figura 4.2(a).

Consideramos os eixos Ox_1 e Ox_2 conforme a Figura 4.2(b) e definimos $x_3 = x_1 \wedge x_2$. Podemos interpretar P como sendo a metade de um catenóide apoiado sobre um quadrado. Observa-se que, para a superfície quocientada pelo seu grupo de translação, o seu topo catenoidal e a sua base catenoidal não se encontram no mesmo eixo. Esta superfície duplamente periódica possui

auto-intersecções, mas elas ocorrem somente nos fins catenoidais.



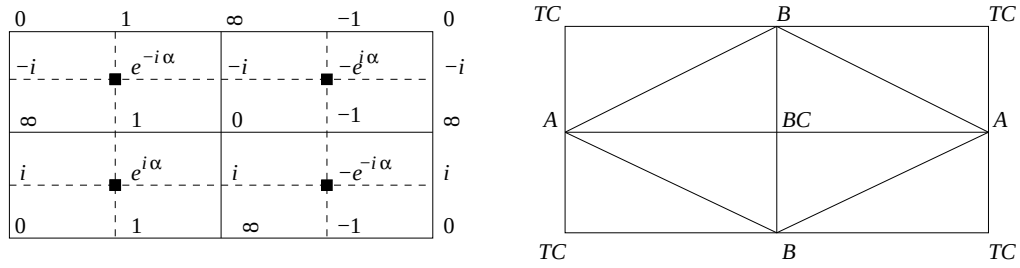
(a) (b)

Figura 4.2: a) o quadrado Q; b) a superfície compactificada $\overline{M}$.

Considerando o quociente de M pelo seu grupo de translações, seguido da compactificação dos seus fins catenoidais (TC - catenóide topo e BC - catenóide base), obtemos uma superfície topológica compacta, que denotamos $\overline{M}$ (vide Figura 4.2(b)). Desta figura vemos facilmente que o gênero de $\overline{M}$ é 1, ou seja, $\overline{M}$ é um toro.

Até aqui, completamos os itens 1 e 2 do método de Karcher. Para o item 3, vamos assumir que os trechos $A \to B$ formam as retas da superfície, enquanto que os caminhos $B \to TC$ e $A \to BC$ estão contidos em planos paralelos ao plano $x_1 = x_2$, e os caminhos $B \to BC$ e $A \to TC$ estão em planos paralelos ao $x_1 = -x_2$.

Uma vez que as rotações de 180° em torno dos trechos $A \leftrightarrow B$ fixam cada qual apenas uma componente conexa de $\overline{M}$, este toro é rômbico. Note que o correspondente reticulado Γ de $\overline{M}$ *não é paralelo* aos eixos $Ox_{1,2}$, mas sim rotacionado de 45° em relação a estes eixos. Além disso, as reflexões nos caminhos $B \to TC \to B$ e $A \to BC \to A$ fixam estas duas componentes conexas, donde temos que o toro também é retangular. Conseqüentemente, $\overline{M}$ é um toro quadrado.



(a) (b)

Figura 4.3: a) Valores de γ; b) correspondência de pontos de M no toro.

Argumentos analíticos também irão mostrar que trata-se de um toro quadrado.

Do Capítulo 3 vimos que existe uma função γ definida no toro, que assume os valores descritos na Figura 4.3(a). Seus pontos de ramo são indicados por ∎, e $\alpha \in (0, \pi/2)$. As retas pontilhadas cobrem $S^1 \subset \mathbb{C}$. Observe que o toro é quadrado se, e somente se, $\alpha = \pi/4$. Uma equação algébrica para este toro é dada por

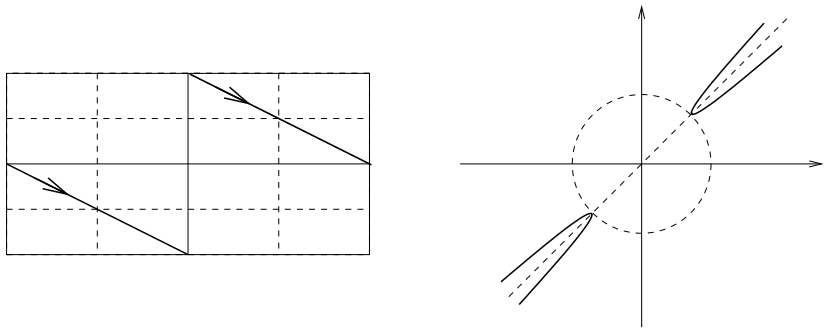
$$\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 = c_0\left(\gamma^2 + \gamma^{-2} - 2\cos 2\alpha\right),\ c_0 > 0.$$

Tomando uma curva $\beta(t)$ no toro que parametriza a diagonal do plano complexo quando aplicada a γ, ou seja, $\gamma(\beta(t)) = e^{i\pi/4}t$, $t^{-1} \in (-1, 1)$, temos

$$\gamma'(\beta(t)) \cdot \beta'(t) = \frac{d}{dt}(\gamma(\beta(t))) = \frac{d}{dt}(e^{i\pi/4}t) = e^{i\pi/4}.$$

Portanto, $\gamma'(\beta(t))^2\beta'(t)^2 = i$.

Observe a próxima figura.



a) b)

Figura 4.4: a) Curva β sobre o toro; b) imagem de β por γ.

Como $\beta(t)$ é uma parametriazação de uma diagonal do toro, temos que $\beta'(t) = f(t)e^{i\pi/4}$, onde $f(t)$ é uma função real. Deste modo:

$$\begin{aligned} \gamma'^2(\beta(t)) \cdot \beta'^2(t) = i \quad &\Leftrightarrow \quad \gamma'^2(\beta(t)) \cdot f^2(t) \cdot (-i) = i \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma'^2(\beta(t)) = \frac{-1}{f^2(t)} \in \mathbb{R}_- \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma'(\beta(t)) \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim, $(\frac{\gamma'}{\gamma})^2|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}_+$. Mas $(\gamma^2 + \gamma^{-2} - 2\cos 2\alpha)|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}_+$ se, e somente se, $\alpha = \pi/4$. Dessa forma, o toro é quadrado.

Até aqui, completamos os itens 3 e 4 do método de Karcher. Vamos agora partir para o item 5, que é a obtenção dos dados de Weierstraß de $\overline{M}$. Como a aplicação g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauß em M, observando a Figura 4.1 vemos que M possui vetores normais unitários verticais em A, B, TC e BC. Se fixarmos $g(\{BC, TC\}) = 0$ teremos $g(\{A, B\}) = \infty$. Como o gênero de $\overline{M}$ é 1 e o número de fins do quociente de M pelo seu grupo de translação é 2, pela fórmula de Jorge-Meeks temos

$$deg(g) = k + s - 1 = 1 + 2 - 1 = 2,$$

e estes são os únicos pólos e zeros da g, todos simples.

Como g e γ possuem exatamente os mesmos pólos e zeros, então $g = c_1\gamma$ com $c_1 \in \mathbb{C}^*$.

No caminho $TC \to B$ a imagem da g está contida no plano $x_1 = x_2$, logo $g(\{TC \to B\}) \in e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbb{R}_+$, enquanto que γ é real positiva neste caminho. Assim, uma equação algébrica para g é dada por

$$g = c\, e^{i\pi/4}\, \gamma,\ c > 0.$$

Para determinarmos uma equação da diferencial dh observamos que, do Teorema 4.2, se M é a imersão mínima completa de $\overline{M} \setminus \{BC, TC\}$, então todos os zeros e pólos de dh são determinados pelos pólos e zeros da g junto com os pontos regulares da M. Com isso, observamos que $dh(\{A, B\}) = 0$ e $dh(\{BC, TC\}) = \infty$. Como

$$-\chi(\overline{M}) = deg(dh) = \text{no. zeros} - \text{no. pólos},$$

a análise está concluída. Agora, $d\gamma/\gamma'$ representa uma forma holomorfa no toro. Então, da Figura 4.5 obtemos

$$dh = c_2 \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{\gamma'},\ c_2 \in \mathbb{C}^*.$$

Queremos que a imersão mínima de $\beta(t)$ em $\mathbb{R}^3$ seja uma reta horizontal. Deste modo, devemos ter $Re \int_{\beta(t)} dh = 0$, ou seja, $dh|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}$. Assim, escolhemos a constante de proporção igual a 1, pois qualquer outro real só reescalonaria a superfície, com ou sem inversão pela origem. Logo,

$$dh = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{\gamma'}.$$

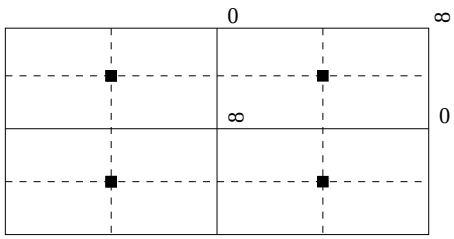


Figura 4.5: Zeros e polós de $1/\gamma$ e dh.

De posse destas informações, definimos M como a imersão mínima completa em $\mathbb{R}^3$ de $\overline{M}\setminus\gamma^{-1}(\{0\})$, sendo que a equação algébrica de M é dada por $(\gamma'/\gamma)^2 = \gamma^2 + 1/\gamma^2$, e os dados de Weierstraß da superfície estão definidos por $g = c\,e^{i\pi/4}\,\gamma$, $c > 0$, e $dh = \dfrac{d\gamma}{\gamma\gamma'}$.

Estamos agora no item 6 do método de Karcher, a *verificação das hipóteses de simetria.* Para a curva $\beta(t)$ vimos que $dh|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}$ e $g|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}$. Do Teorema 4.6, temos que β é uma geodésica e uma linha de simetria. Do Teorema 4.5, a imersão de β representa uma reta na superfície, pois $\dfrac{dg}{g}\,dh|_{\beta(t)} \in i\mathbb{R}$.

Para o caminho $A \to TC$ tomemos $\rho(t) = it, t \in \mathbb{R}$. Facilmente se verifica $\gamma'|_{\rho(t)} \in \mathbb{R}$ e além disso, $dh|_{\rho(t)} \in \mathbb{R}$ e $g|_{\rho(t)} = i\,c\,e^{i\pi/4}t$, donde temos um meridiano. Assim, ρ é uma geodésica e linha de simetria. Como $\dfrac{dg}{g}\,dh|_{\rho(t)} \in \mathbb{R}$, a imersão é uma curva plana.

Por argumentos análogos pode-se provar que todas as demais simetrias se verificam.

Para toda curva fechada em $\overline{M}\setminus\{BC, TC\}$, vamos analisar o vetor período $Re \oint \phi_{1,2,3}$, item 7 do método de Karcher.

Tomando uma curva fechada simples em $\overline{M} \setminus \{BC, TC\}$ em torno de TC, esta é homotópica a uma curva simétrica em relação aos trechos $A \to TC$ e $B \to TC$. Portanto, deve ser ortogonal a ambos os planos que contêm estas curvas. Como estes planos são perpendiculares, temos que $Re \oint \phi_{1,2,3} = 0$ sobre esta curva. De forma análoga é possível mostrar que $Re \oint \phi_{1,2,3} = 0$ sobre curvas fechadas simples em $\overline{M} \setminus \{BC, TC\}$ em torno de BC.

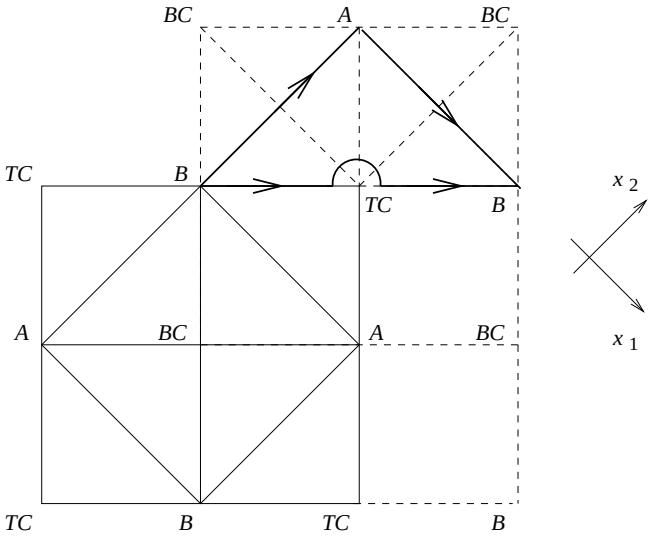


Figura 4.6: Período ao longo da curva σ.

Considere a curva σ homotópica a $B \to TC \to B$, com desvio em TC, descrita na Figura 4.6. Observe que o trecho $B \to A$ é simétrico pela geodésica planar $BC \to TC$, donde $Re \int_{B\to A} \phi_{1,3} = 0$. Por outro lado,

$$Re \int_{B\to A} \phi_2 = 2Re \int_1^\infty i(g^{-1} + g)dh|_{\gamma(t)=te^{-i\frac{\pi}{4}}} = \pm 2 \int_1^\infty \frac{(ct + (ct)^{-1})dt}{t(t^4-1)^{1/2}} \neq 0,$$

o que nos dá um período na direção de Ox_2.

Como provamos anteriormente que $A \to TC$ é uma geodésica de reflexão, temos $|Re \int_{A\to B} \phi_1| = |Re \int_{B\to A} \phi_2| = \lambda$. Portanto, $|Re \int_{B\to TC\to B} \phi_{1,2}| = \lambda\sqrt{2} \neq 0$. Por causa das simetrias que provamos existir, também temos $|Re \int_{B\to BC\to B} \phi_{1,2}| = \lambda\sqrt{2}$.

Dessa forma, a superfície é duplamente periódica.

Finalmente, vamos mostrar que a peça fundamental da imersão é mergulhada, último item do método de Karcher.

O objetivo é verificar que as auto-interseções de M ocorrem somente nos fins catenoidais.

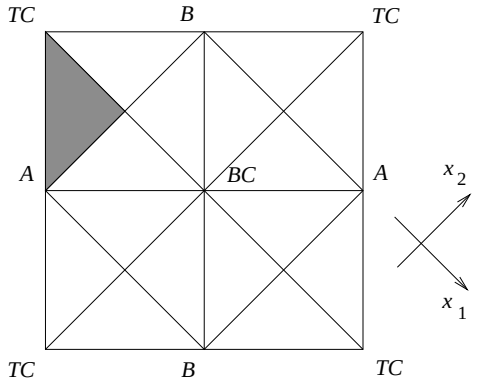
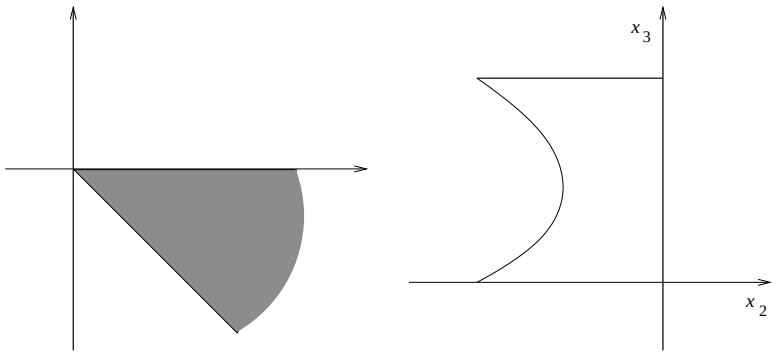


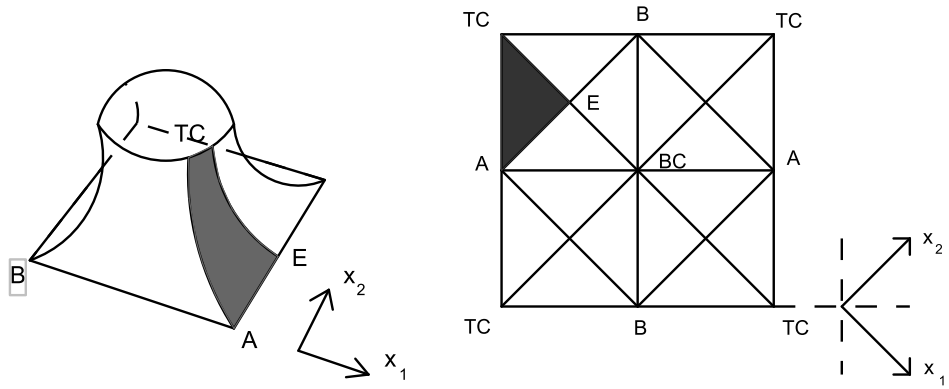
Figura 4.7: Domínio $\mathcal{R}$.

Considere a região $\mathcal{R}$ descrita na Figura 4.7. A imagem $\mathcal{D}$ desta região pela aplicação g é um setor do plano complexo descrito na Figura 4.8(a). Como g é a projeção estereográfica da normal de Gauß, temos que $N(\mathcal{R})$ está totalmente contida em um dos hemisférios de S^2. Da imagem $\mathcal{D}$, concluímos que a restrição de (x_2, x_3) ao interior de $\mathcal{R}$ é uma imersão, cuja imagem está descrita na Figura 4.8(b).



(a) (b)

Figura 4.8: a) imagem $\mathcal{D} = g(\mathcal{R})$; b) projeção $(x_2, x_3)|_{\mathcal{R}}$.



(a) (b)

Figura 4.9:a) domínio fundamental de P; b) domínio fundamental no toro.

Com mencionamos anteriormente, P é a peça fundamental de M. A região hachurada na Figura 4.9(a) representa a imagem pela imersão mínima do domínio fundamental $\mathcal{R}$, descrito pela Figura 4.9(b).

Observe que o toro é dividido em 16 regiões que são congruentes a $\mathcal{R}$ e, por sua vez, a peça fundamental também possui 8 regiões que são obtidas da região hachurada (Figura 4.9(a)) através de simetrias da superfície. Como o quociente de M pelo seu grupo de translação é gerado por P e a sua imagem por uma rotação de 180°, também obtemos 16 subregiões que formam este quociente.

Como g é uma aplicação aberta dada por $g = c\,e^{i\pi/4}\,\gamma$, $c > 0$, g aplica $\mathcal{R}$ na região descrita pela Figura 4.8(a). De fato, seja $\nu_1(t)$ uma curva no toro que descreve o caminho $TC \to A$. Logo, $\gamma(\nu_1(t)) = -it$, $t \in \mathbb{R}_+$. Aplicando esta curva em g obtemos

$$g(\nu_1(t)) = c\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,\gamma(\nu_1(t)) = c\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,\cdot(-it) = c\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\,t.$$

Tomando $\nu_2(t)$ uma curva no toro que descreve o caminho $TC \to E$, de modo que $\gamma(\nu_2(t)) = e^{-i\frac{\pi}{4}}t$, $t \in [0,1]$, obtemos

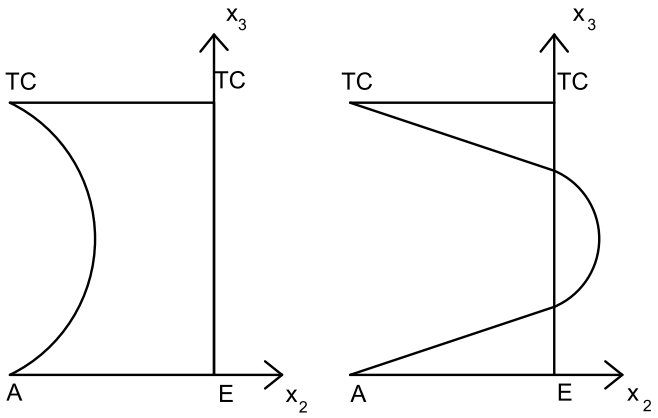
$$g(\nu_2(t)) = c\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,\gamma(\nu_2(t)) = c\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}t = c\,t.$$

Analogamente, se $\nu_3(t)$ descreve o caminho $E \to A$, então $\gamma(\nu_3(t)) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\, t$, $t \in [1, \infty]$, donde temos

$$g(\nu_3(t)) = c\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, \gamma(\nu_3(t)) = c\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} t = c\, t.$$

Como g é aberta, mas tem grau 2, então $g(\mathcal{R})$ só pode ser a região indicada na Figura 4.8(a). Assim, $N(\mathcal{R})$ está contido num hemisfério, ou seja, existe uma direção em que a projeção ortogonal do domínio fundamental é uma imersão, e por conveniência tomamos na direção de Ox_1. Dessa forma, $(x_2, x_3) : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^2$ é uma imersão quando restrita ao interior de $\mathcal{R}$.

A projeção do domínio fundamental no plano $x_1 = 0$ possui duas alternativas que estão indicadas na Figura 4.10.



(a) (b)

Figura 4.10: possíveis projeções do domínio fundamental em $x_1 = 0$.

A curva $TC \to A$ é convexa. De fato, apresentamos na Seção 1 deste capítulo a fórmula da curvatura gaussiana para superfícies mínimas. Assim, $K = 0$ se, e somente se, dg se anula em $TC \to A$. Veremos que isto não ocorre na curva $TC \to A$.

Basta observarmos que $deg(dg) = -\chi_{\bar{M}} = 0$, e que dg possui dois pólos com multiplicidade dois, logo o número de zeros de dg deve ser quatro.

Também, para o caminho $TC \to BC$, além de $g(\{TC, BC\}) = 0$ temos $g(TC \to BC) \in e^{-\frac{i\pi}{4}}\mathbb{R}_+$. Logo existe um ponto em $TC \to BC$ com $dg = 0$. Pelas simetrias da superfície, este ponto é aplicado sobre outros três pontos que também são zeros da dg. Portanto, a curvatura em $TC \to A$ nunca se anula, sendo esta curva convexa.

Como $TC \to A$ é uma geodésica planar e, portanto, uma linha de curvatura, os contornos da Figura 4.10 estão coerentes. Uma vez que (x_2, x_3) é uma imersão, ela é uma aplicação aberta e contínua, logo só pode realizar o contorno da Figura 4.10(a).

Dessa forma, (x_2, x_3) é uma imersão cujo contorno é uma *curva monótona*, ou seja, uma curva C^1 por partes tal que seu vetor tangente se anula apenas para um conjunto discreto de pontos. Além disso, a região é simplesmente conexa. Assim, $(x_1, x_2, x_3) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$ é um gráfico e, conseqüentemente, é um mergulho.

Assim, as reflexões no domínio fundamental sob a superfície geram a peça fundamental P, que não possui auto-interseções e, as interseções de M só ocorrem nos fins catenoidais.

Referências

[1] *H. Karcher*, Construction of minimal surfaces, Surveys in Geometry, University of Tokyo 1–96, 1989 and Lecture Notes **12**, SFB256, Bonn, 1989.
[2] *F.J. López* and *F. Martín*, Complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, Publicacions Matematiques **43** (1999), 341–449.
[3] *J.C.C. Nitsche*, Lectures on minimal surfaces, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
[4] *R. Osserman*, A survey of minimal surfaces, Dover, New York, 2nd ed, 1986.