Sobre transformações de superfícies de curvatura constante

Gabriela Pereira Sander
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo
gabi@icmc.usp.br

1. Resumo

As superfícies de curvatura constante estão associadas a soluções de certas equações diferenciais parciais, não lineares, de segunda ordem. Os trabalhos dos geômetras A. Bäcklund e L. Bianchi apresentam uma maneira de encontrar novas soluções destas equações, obtendo assim, novas superfícies de mesma curvatura constante. Estas técnicas iniciam-se na interpretação analítica da teoria das transformações de superfícies de curvatura média constante ou de curvatura gaussiana constante não nula. As novas soluções são obtidas integrando uma transformação de Bäcklund e, com mais de uma solução destas equações, os Teoremas de Permutabilidade de Bianchi fornecem, algebricamente, outras soluções.

O objetivo deste poster é apresentar esta teoria para superfícies de curvatura gaussiana constante negativa. Este tópico é parte de minha dissertação de mestrado, orientada pela Profa. Irene Ignazia Onnis, ICMC - USP, com o apoio da CAPES.

2. Introdução

O estudo das superfícies pseudo-esféricas, isto é, superfícies com curvatura gaussiana constante negativa, está relacionado ao estudo das soluções da equação diferencial a derivadas parciais:

$$\phi_{uu} - \phi_{vv} = \operatorname{sen}\phi\cos\phi, \tag{1}$$

denominada equação de Sine-Gordon. Esta relação define-se melhor no seguinte resultado:

Proposição 1 *A cada superfície de curvatura gaussiana constante $K < 0$, podemos associar uma solução da equação de Sine-Gordon* (1)*. Reciprocamente, fixada $K < 0$, a cada solução não nula da equação* (1) *podemos associar, a menos de um movimento rígido de $\mathbb{R}^3$, uma superfície de curvatura gaussiana constante igual a K.*

Para desenvolvermos o nosso objetivo, faremos uma breve introdução da teoria das congruências pseudo-esféricas que deram origem à transformação de Bäcklund.

3. Congruência pseudo-esférica e a transformação de Bäcklund

Definição 1 *Sejam S e $\bar{S}$ duas superfícies parametrizadas regulares de $\mathbb{R}^3$ e $l : S \to \bar{S}$ um difeomorfismo tal que $l(p) \neq p$, para todo $p \in S$. Dizemos que l é uma congruência de retas pseudo-esférica se*

(i) para todo $p \in S$, a reta determinada por p e $\bar{p} = l(p)$ tangencia as superfícies S e $\bar{S}$, respectivamente, em p e $\bar{p}$;

(ii) a distância entre os pontos p e $\bar{p}$ é igual a uma constante r que independe de p;

(iii) o ângulo entre os vetores normais às superfícies S e $\bar{S}$ em seus respectivos pontos p e $\bar{p}$ é uma constante $\theta \in (0, \pi)$, que independe de p.

Estas congruências só existem entre superfícies de mesma curvatura gaussiana constante negativa, o que justifica o nome dado a este tipo de congruência. Mais precisamente,

Teorema 1 (Teorema de Bäcklund [Ba]) *Seja $l : S \to \bar{S}$ uma congruência de retas pseudo-esférica entre as superfícies regulares S e $\bar{S}$, tal que a distância entre os pontos correspondentes seja igual à cons- tante $r > 0$ e o ângulo entre as retas normais nesses pontos seja θ, onde $0 < \theta < \pi$. Então as superfícies S e $\bar{S}$ têm a mesma curvatura gaussiana:*

$$K = \bar{K} = -\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}.$$

Demonstração. Apresentaremos a seguir a prova dada por S. Chern em [C]. Suponha as superfícies S e $\bar{S}$ parametrizadas por $X(u, v)$ e $\bar{X}(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ um triedro móvel associado à superfície X e $\omega_1, \omega_2, \omega_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, as 1-formas associadas a este triedro. Supondo que e_1 está na direção da reta determinada pelos pontos correspondentes de S e $\bar{S}$, temos que:

$$\bar{X}(u, v) = X(u, v) + r\, e_1(u, v). \tag{2}$$

Da definição de congruência pseudo-esférica, o campo de vetores e_1 é tangente também à superfície $\bar{X}$. Assim, podemos associar a $\bar{X}$ o seguinte triedro móvel:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= e_1, \\ \bar{e}_2 &= \cos\theta\, e_2 + \operatorname{sen}\theta\, e_3, \\ \bar{e}_3 &= -\operatorname{sen}\theta\, e_2 + \cos\theta\, e_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Denote por $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_{ij}$ as 1-formas associadas ao triedro móvel de $\bar{X}$. Usando as equações de estrutura, de (2) obtemos

$$d\bar{X} = \omega_1 e_1 + (\omega_2 + r\,\omega_{12})\, e_2 + r\,\omega_{13}\, e_3.$$

Por outro lado, usando (3), resulta que

$$d\bar{X} = \bar{\omega}_1 e_1 + \bar{\omega}_2\cos\theta\, e_2 + \bar{\omega}_2 \operatorname{sen}\theta\, e_3,$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \omega_1, \\ \bar{\omega}_2\cos\theta &= \omega_2 + r\,\omega_{12}, \\ \bar{\omega}_2 \operatorname{sen}\theta &= r\,\omega_{13}. \end{aligned}$$

Das duas últimas equações, temos

$$\omega_{12} = -\frac{1}{r}\omega_2 + \cot\theta\,\omega_{13} \tag{4}$$

e, portanto, usando as equações de estrutura segue que

$$d\omega_{12} = -\frac{1}{r}\, d\omega_2 + \cot\theta\, d\omega_{13} = \left(\frac{1}{r^2} + K\cot^2\theta\right)\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Assim, da equação de Gauss, $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$, obtemos que a curvatura gaussiana de X é dada por:

$$K = -\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}. \tag{5}$$

Analogamente, pode-se provar que a superfície $\bar{X}$ tem a mesma curvatura gaussiana de X. □

Note que a existência de uma congruência pseudo-esférica entre duas superfícies implica na equação (4), denominada *transformação de Bäcklund* e denotada por $B(\theta)$, para indicar sua dependência apenas do parâmetro θ, pois $r = \operatorname{sen}\theta/\sqrt{-K}$.
O próximo resultado mostra que, integrando $B(\theta)$, obtemos, a partir de uma superfície S pseudo-esférica, satisfazendo (5), uma família a dois parâmetros de superfícies desse tipo (localmente) relacionadas a S por congruências pseudo-esféricas.

Teorema 2 (Teorema de Integrabilidade) *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular de curvatura gaussiana constante igual a*

$$K = -\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2},$$

onde $r > 0$ e $0 < \theta < \pi$ são constantes. Considere um ponto $q_0 \in U$ e um vetor unitário $w_0 \in T_{X(q_0)}S$, que não é um vetor principal. Então, existe uma única superfície $\bar{S}$ e uma congruência pseudo-esférica l, entre uma vizinhança de $p_0 = X(q_0)$ em S e $\bar{S}$, tal que $l(p_0) = p_0 + r\,w_0$ e θ é o ângulo entre os vetores normais às superfícies nos pontos p_0 e $l(p_0)$.

A superfície $\bar{S}$ é dita *transformada de Bäcklund* da superfície S. Note também que os dois parâmetros da família de superfícies são θ e aquele que corresponde à escolha do vetor unitário w_0.

4. Teorema de Permutabilidade

A transformação de Bäcklund fornece um método para a construção de novas soluções de (1) a partir de uma já conhecida.

Proposição 2 *Sejam $\phi(u, v)$ uma solução de* (1) *e θ uma constante. Então o sistema*

$$\begin{cases} \bar{\phi}_u + \phi_v = \operatorname{sen}\bar{\phi}\cos\phi\csc\theta + \cot\theta\cos\bar{\phi}\operatorname{sen}\phi, \\ \bar{\phi}_v + \phi_u = -\cos\bar{\phi}\operatorname{sen}\phi\csc\theta - \cot\theta\operatorname{sen}\bar{\phi}\cos\phi, \end{cases} \tag{6}$$

que equivale a $B(\theta)$ dada por (4)*, é integrável. Além disso, $\bar{\phi}$ é solução de* (1)*.*

Demonstração. Como $\bar{\phi}_{vu} = \bar{\phi}_{uv}$, pelo Teorema de Frobenius, fixada a condição inicial $\bar{\phi}(u_0, v_0)$, existe uma única solução $\bar{\phi}$ do sistema (6) definida numa vizinhança de (u_0, v_0). Além disso, segue da equação de Gauss que $\bar{\phi}$ é solução de (1). □

A solução $\bar{\phi}$, obtida integrando a transformação de Bäcklund (6) com constante θ, é denominada *solução associada a ϕ por $B(\theta)$*:

$$\phi \xrightarrow{\quad B(\theta) \quad} \bar{\phi}$$

Exemplo 1 (Transformada de Bäcklund da pseudo-esfera) *Considere a parametrização da pseudo-esfera dada por:*

$$X(u, v) = (\operatorname{sech} u\cos v, \operatorname{sech} u \operatorname{sen} v, u - \tanh u). \tag{7}$$

Pela Proposição 1, pode-se provar que a função $\phi(u)$ definida por

$$\cos\phi = \tanh u, \qquad \operatorname{sen}\phi = \operatorname{sech} u$$

é uma solução da equação de Sine-Gordon que é associada à superfície X. Derivando estas relações com relação a u e v, obtemos

$$\phi_u = -\operatorname{sech} u, \qquad \phi_v = 0.$$

Logo, segue da Proposição 2 que para obter outras soluções de (1)*, basta integrar a transformação de Bäcklund:*

$$\begin{cases} \bar{\phi}_u = \operatorname{sen}\bar{\phi}\tanh u\csc\theta + \coth\theta\cos\bar{\phi}\operatorname{sech} u, \\ \bar{\phi}_v - \operatorname{sech} u = -\cos\bar{\phi}\operatorname{sech} u\csc\theta - \cot\theta\operatorname{sen}\bar{\phi}\tanh u, \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Considerando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, temos o sistema

$$\begin{cases} \bar{\phi}_u = \operatorname{sen}\bar{\phi}\tanh u, \\ \bar{\phi}_v = (1 - \cos\bar{\phi})\operatorname{sech} u, \end{cases}$$

cujas soluções são dadas por:

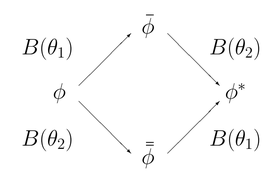
$$\cot\left(\frac{\bar{\phi}}{2}\right) = (c - v)\operatorname{sech} u, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Para cada solução $\bar{\phi}$ encontrada, a superfície dada por

$$\bar{X} = X + (\cos\bar{\phi}\coth u\, X_u + \operatorname{sen}\bar{\phi}\cosh u\, X_v) \tag{9}$$

é uma superfície de curvatura gaussiana (-1). conhecida como superfície de Kuen (veja Figura 1).

Considere $\bar{\phi}$ e $\bar{\bar{\phi}}$ soluções associadas a ϕ por $B(\theta_1)$ e $B(\theta_2)$, $\theta_1 \neq \theta_1$, respectivamente. Apresentaremos, agora, um resultado do L. Bianchi que mostra que existe uma outra solução $\phi^* \neq \phi$ associada a $\bar{\phi}$ e $\bar{\bar{\phi}}$ por transformações de Bäcklund. Mais precisamente:



Teorema 3 (Teorema de Permutabilidade de Bianchi [Bi]) *Sejam $\bar{\phi}$ e $\bar{\bar{\phi}}$ duas soluções de* (1) *que estão associadas a ϕ por $B(\theta_1)$ e $B(\theta_2)$, respectivamente. Então, se $\theta_1 \neq \theta_2$, existe uma única solução ϕ^* associada às soluções $\bar{\phi}$ e $\bar{\bar{\phi}}$ por $B(\theta_2)$ e $B(\theta_1)$, respectivamente. Além disso, ϕ^* é determinada algebricamente por*

$$\tan\frac{\phi^* - \phi}{2} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\theta_2 + \theta_1}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2}}\tan\frac{\bar{\phi} - \bar{\bar{\phi}}}{2}. \tag{10}$$

Vamos ilustrar o Teorema de Permutabilidade em uma composição de transformações de Bäcklund aplicada à pseudo-esfera.

Exemplo 2 *Considere a parametrização da pseudo-esfera dada por* (7)*, que é associada à solução ϕ de* (1) *dada por $\tan\dfrac{\phi}{2} = e^u$.*
Do Exemplo 1, sua transformada de Bäcklund por $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ é a superfície (9)*, que é associada a $\bar{\phi}$ dada por* (8)*.*
Similarmente, integrando o sistema $B\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$:

$$\begin{cases} \bar{\bar{\phi}}_u = \sqrt{2}\operatorname{sen}\bar{\bar{\phi}}\tanh u + \cos\bar{\bar{\phi}}\operatorname{sech} u, \\ \bar{\bar{\phi}}_v = \operatorname{sech} u(1 - \sqrt{2}\cos\bar{\bar{\phi}}) - \operatorname{sen}\bar{\bar{\phi}}\tanh u, \end{cases}$$

obtemos

$$\tan\left(\frac{\bar{\bar{\phi}}}{2}\right) = (\sqrt{2} + 1)\frac{e^{\sqrt{2}u - v} - e^u}{1 + e^{\sqrt{2}u - v + u}}. \tag{11}$$

A solução $\bar{\bar{\phi}}$ está associada à superfície

$$\bar{\bar{X}} = X + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\bar{\bar{\phi}}\coth u\, X_u + \operatorname{sen}\bar{\bar{\phi}}\cosh u\, X_v).$$

Assim, do Teorema de Permutabilidade (interpretado geometricamente através da Proposição 1) a quarta superfície X^* está associada à solução ϕ^* de (1) *dada por:*

$$\tan\frac{\phi^* - \phi}{2} = -(1 + \sqrt{2})\tan\frac{\bar{\phi} - \bar{\bar{\phi}}}{2}.$$

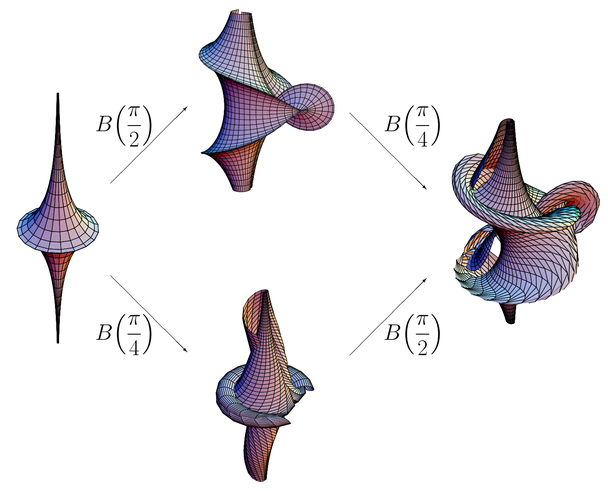


Figura 1: Diagrama de permutabilidade de Bianchi para a pseudo-esfera.

Referências

[Ba] A. V. Bäcklund, *Concerning surfaces with constant negative curvature translated by E. M. Coddington*. New Era Printing Co., Lancaster pa, 1905.

[Bi] L. Bianchi, *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante*. Ann. di Matem. Pura ed Appl. **3** (3) (1899), 185-298.

[C] S. S. Chern; C. L. Terng, *An analogue of Bäcklund's theorem in affine geometry*. Rocky Mountain J. Math, **10** (1980), 105-124.

[T] K. Tenenblat, *Transformações de Superfícies e aplicações*. XIII Col. Bras. de Mat. IMPA, 1981.

[T1] K. Tenenblat, *Transformations of manifolds and applications to differential equations*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 1998.