Conjectura de Calabi Para Hipersuperfícies Mínimas com Curvatura de Ricci com Decaimento Quadrático Forte

A. Krüger (UFRGS) R. Montezuma (UFC) Q. Wang (CSUN)
Orientador: Pacelli Bessa (UFC)

1 Introdução

Eugenio Calabi, em meados de 1960, propôs duas conjecturas sobre hipersuperfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^n$. Na primeira, conjecturou que *toda hipersuperfície mínima completa do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é ilimitada*, enquanto, na segunda, conjecturou que *as hipersuperfícies não planares mínimas completas do $\mathbb{R}^n$ têm projeção ilimitada sobre todo subespaço $(n-2)$-dimensional*. Ambas as conjecturas foram provadas falsas, através dos exemplos de Jorge-Xavier e Nadirashivili.
A proposta desse trabalho é mostrar que a conjectura de Calabi vale na classe das hipersuperfícies mínimas completas com curvatura de Ricci com decaimento quadrático forte em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$.
Uma variedade Riemanniana completa M tem *curvatura de Ricci com decaimento quadrático forte* se

$$Ric_M(x) \geq -c^2[1+\rho_M^2(x)log^2(\rho_M(x)+2)]$$

onde ρ_M é a função distância em M a um ponto fixado x_0 e $c = c(x_0) > 0$ é uma constante dependendo de x_0.
A fim de demonstrar nosso resultado, provamos um teorema mais geral em relação ao espaço ambiente. Convém ressaltar que tal teorema é uma generalização do teorema principal de Bessa-Costa [1].

Teorema 1. *Seja N uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com as curvaturas seccionais radiais limitadas $K_N \leq k$. Seja $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}^l$ uma sub-variedade completa de dimensão m tal que $\varphi(M) \subset B_N(R) \times \mathbb{R}^l$, $l \leq m-1$, onde $B_N(R)$ é a bola geodésica em N centrada em x_0 e raio R, $R < \min\{\text{inj}_N(x_0), \pi/2\sqrt{k}\}$. Assuma que $\pi/2\sqrt{k} = \infty$ se $k \leq 0$. Temos que se M tem curvatura de Ricci com decaimento quadrático forte, então*

$$\sup_M |H| \geq \frac{(m-l)}{m}\mu(R), \tag{1}$$

onde μ é dada por

$$\mu(t) = \begin{cases} \sqrt{-k}\cdot\coth(\sqrt{-k}\cdot t), & se \quad k<0 \\ 1/t, & se \quad k=0 \\ \sqrt{k}\cdot\cot(\sqrt{k}\cdot t), & se \quad k>0 \ e \ t<\pi/2\sqrt{k}. \end{cases}$$

2 A Expressão do Laplaciano

Seja $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M de dimensão m em uma variedade Riemanniana completa N de dimensão n. Considere uma função suave $g : N \to \mathbb{R}$ e $f = g \circ \varphi : M \to \mathbb{R}$. Sejam $q \in M$ e $X \in T_qM$. Temos que a projeção do vetor grad g no espaço tangente a M em q, T_qM, deve ser o vetor grad f, isto é,

$$\text{grad}\, g = \text{grad}\, f + (\text{grad}\, g)^{\perp}. \tag{2}$$

Com isso, obtemos que

$$\text{Hess}\, f(q)(X,Y) = \text{Hess}\, g(\varphi(q))(X,Y) + \langle \text{grad}\, g, \alpha(X,Y)\rangle_{\varphi(q)}. \tag{3}$$

Tomando o traço em (3) com respeito a uma base ortonormal $\{e_1,\ldots,e_m\}$ do T_qM, obtemos

$$\triangle f(q) = \sum_{i=1}^{m} \text{Hess}\, g(\varphi(q))(e_i,e_i) + \langle \text{grad}\, g, \vec{H}\rangle, \tag{4}$$

onde $\vec{H}$ é o traço da segunda forma fundamental, denominado *vetor curvatura média*, e é tal que $\|\vec{H}\| = m|H|$, onde H representa a curvatura média de M.

3 Princípio do Máximo de Omori-Yau

Proposição 1. *(Princípio do Máximo de Omori-Yau) Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci com decaimento quadrático forte. Seja f uma função contínua C^2 em quase todo ponto e limitada por cima em M. Então para toda seqüência $\varepsilon_k \to 0$ de números positivos existe uma sequência de pontos $x_k \in M$ tal que:*

i. $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \sup_M f$
ii. $|grad f(x_k)| < \varepsilon_k$
iii. $\Delta f(x_k) < \varepsilon_k$.

4 Demonstração

Sejam M e N variedades Riemannianas como no enunciado do Teorema 1. Defina $g : N \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ como $g(x,y) = \rho_N(x)$, onde $\rho_N(x) = dist_N(x_0,x)$ e defina $f = g \circ \varphi : M \to \mathbb{R}$. Sejam $q \in M$ e $p = \pi_1(\varphi(q)) \in N$. Considere $\{\text{grad}\rho_N, \frac{\partial}{\partial\theta_2}, ..., \frac{\partial}{\partial\theta_n}\}$ uma base ortonormal para T_pN e $\{\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, ..., \frac{\partial}{\partial t_l}\}$ uma base do $\mathbb{R}^\ell$. Então temos que o conjunto $\{\text{grad}\rho_N, \frac{\partial}{\partial\theta_2}, ..., \frac{\partial}{\partial\theta_n}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, ..., \frac{\partial}{\partial t_l}\}$ forma uma base para $T_{\varphi(q)}(N\times\mathbb{R}^\ell)$. Desse modo, tomando $\{e_1,e_2,...,e_m\}$ uma base ortonormal para T_qM, podemos escrever, para cada $i \in \{1,2,...,m\}$,

$$e_i = \alpha_i\ \text{grad}\ \rho_N + \sum_{j=2}^{n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial\theta_j} + \sum_{j=1}^{l} b_{ij}\frac{\partial}{\partial t_j}. \tag{5}$$

.
A conexão Riemanniana $\overline{\nabla}$ de $N\times\mathbb{R}^l$ se decompõe em $\overline{\nabla} = \nabla^N + \nabla^{\mathbb{R}^l}$, e segue que $\text{Hess}_{N\times\mathbb{R}^l}\rho_N(e_i,e_i) = \langle\nabla^N_{e_i}\text{grad}\rho_N,\, e_i\rangle + \langle\nabla^{\mathbb{R}^l}_{e_i}\text{grad}\rho_N,\, e_i\rangle = \text{Hess}_N\rho_N(e_i,e_i)$. Logo, para simplificar a notação, denotamos $\nabla^N = \nabla$ e $\text{Hess}\,\rho_N = \text{Hess}_{N\times\mathbb{R}^l}\rho_N$.
Utilizando a expansão dos e_i na expressão da Hessiana e eliminando os termos nulos, obtemos que:

$$\text{Hess}\,\rho_N(e_i,e_i) = \sum_{j=2}^{n}(a_{ij})^2\text{Hess}\,\rho_N(\frac{\partial}{\partial\theta_j},\frac{\partial}{\partial\theta_j}). \tag{6}$$

Substituindo a equação acima na expressão do Laplaciano obtida, ficamos com:

$$\triangle f(q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{n}(a_{ij})^2\text{Hess}\,\rho_N(p)(\frac{\partial}{\partial\theta_j},\frac{\partial}{\partial\theta_j}) + \langle\text{grad}\ g,\vec{H}\rangle. \tag{7}$$

Como $(a_{ij})^2 \geq 0$ e a curvatura seccional está limitada superiormente, podemos aplicar o Teorema da Comparação da Hessiana para encontrar a seguinte desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{n}(a_{ij})^2\text{Hess}\,\rho_N(p)(\frac{\partial}{\partial\theta_j},\frac{\partial}{\partial\theta_j}) \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{n}(a_{ij})^2\mu(\rho_N(p)). \tag{8}$$

Utilizando que $\|e_i\|^2 = 1$, que $\langle\text{grad}\ g,\vec{H}\rangle \geq -m|H|$ e a desigualdade (8) na equação (7), obtemos:

$$\triangle f(q) \geq \mu(\rho_N(p))\left(m - \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i)^2 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}(b_{ij})^2\right) - m|H|. \tag{9}$$

Como M tem curvatura de Ricci com decaimento quadrático forte e $\varphi(M) \subset B_N(R)\times\mathbb{R}^\ell$, podemos utilizar o princípio do máximo para f, logo existe uma seqüência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de pontos de M tal que:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \sup_M f, \quad \triangle f(x_k) < 1/k \quad \text{e} \quad |\text{grad}\ f(x_k)| < 1/k. \tag{10}$$

Uma vez que $\alpha_i = \langle e_i,\text{grad}\ \rho_N\rangle < 1/k$ e que $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\ell}(b_{ij})^2 \leq \ell$, temos a seguinte desigualdade:

$$1/k > (m - m(1/k)^2 - l)\mu(\rho_N(y_k)) - m|H|,$$

onde $y_k = p_1(\varphi(x_k)) \in N$.
Fazendo $k\to\infty$, utilizando que ρ_N está limitada por R e que μ é uma função decrescente, obtemos

$$\sup_M |H| \geq \frac{(m-l)}{m}\mu(R),$$

demonstrando o Teorema 1.

5 Conclusão

Teorema 2. *Sejam $\varphi : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície completa com curvatura de Ricci com decaimento quadrático forte e curvatura média H. Se $\varphi(M) \subset B_{\mathbb{R}^2}(R)\times\mathbb{R}^{n-2}$ então*

$$\sup_M |H| \geq \frac{1}{(n-1)R} > 0. \tag{11}$$

De fato, aplicando o Teorema 1 para $m = (n-1)$, $k = 0$, $N = \mathbb{R}^2$ e $\ell = 2$ obtemos a estimativa acima, logo a curvatura média não pode ser identicamente nula e M não pode ser mínima.

Referências

[1] G. Pacelli Bessa and M. S. Coste *On cylindrically Bounded H-Hypersurfaces of $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$*. Differential Geom. Appl. **26** (3) 323–326, (2008).
[2] A. Krüger, R. Montezuma and Q. Wang. *Calabi's Conjecture for Minimal Hypersurfaces with Ricci Curvature with Strong Quadratic Decay*. (2008).
[3] M. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, (1992).
[4] R. Schoen and S. Yau. *Lectures on Differential Geometry*. Conference Preceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, (1994).

Mail to: akramos7h@gmail.com