Universidade Federal do ABC

INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Luiz Felipe Araujo Mod, Valério Ramos Batista

CMCC, Universidade Federal do ABC

Av. dos Estados, 5001, Santo André, SP

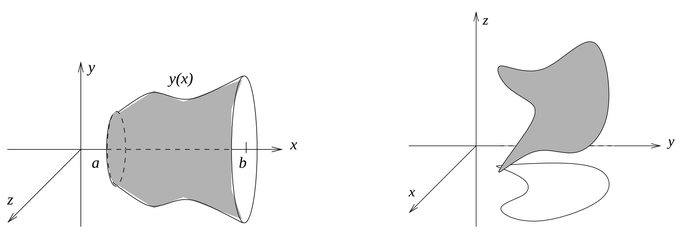
luizfelipemod@yahoo.com.br, valerio.batista@ufabc.edu.br

0. RESUMO

Neste trabalho apresentamos um breve histórico da teoria de Superfícies Mínimas e principais resultados introdutórios.

1. HISTÓRICO

Há mais de dois séculos e meio, precisamente em 1744, Euler propôs o seguinte problema de Cálculo Variacional: Para uma superfície de revolução, qual geratriz implica área mínima?



O objetivo é minimizar $I_{y(x)} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Seja $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ a função procurada e $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma *variação* de y que fixa $y(a)$ e $y(b)$. Ou seja, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ e $|\eta| < \varepsilon$ "pequeno". Assim,

$$I_{y+t\eta} = I(t) = \int_a^b F(x, y+t\eta, y'+t\eta')dx. \tag{1}$$

Se $I(0)$ é um mínimo, então (1) implica

$$I'(0) = 0 = \int_a^b \{\overbrace{F_x \cdot x_t}^{=0} + F_y \cdot \eta + F_{y'} \cdot \eta'\}dx$$

$$\underset{\text{prts}}{\overset{\text{int.}}{}} \int_a^b F_y \cdot \eta dx + F_{y'} \cdot \eta\Big|_a^b - \int_a^b (F_{y'})_x \eta dx = \int_a^b \eta[F_y - (F_{y'})_x]dx,$$

pois $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Como η é arbitrária, então chegamos à Equação Diferencial Ordinária $F_y - (F_{y'})_x = 0$. No caso, $F = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}$, donde

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0. \tag{2}$$

Solução geral de (2): $y = \cosh(\alpha x + \beta)/\alpha$, onde $\alpha y(a) = \cosh(\alpha a + \beta)$ e $\alpha y(b) = \cosh(\alpha b + \beta)$. Por exemplo, $-a = b = 1$ e $y(a) = y(b) = \cosh 1$ implica $y = \cosh x$, e $-a = b = 1/2$ e $y(a) = y(b) = \cosh 1$ implica $y \equiv \cosh(0,67x)/0,67$.

Em 1761, Lagrange estendeu o Cálculo Variacional para dimensão 2 e introduziu o problema: Dada $f : \Omega \to \mathbb{R}$, sob quais condições graf(f) tem tem área mínima com $f|_{\partial\Omega}$ fixo?

O objetivo é minimizar $A = \iint_\Omega \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$. Mais geralmente, se $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ é uma parametrização da superfície, $A = \iint_\Omega ||F_x \times F_y||\,dxdy$. No caso particular de $F = (x, y, f)$, temos a fórmula anterior. Veremos a dedução da equação diferencial parcial das superfícies mínimas nas próximas seções.

2. CURVATURA MÉDIA DUMA SUPERFÍCIE

A superfície é regular se, e somente se $det\, G > 0$, onde $G = DF^{\mathrm{t}} \cdot DF$. Observe que $det\, G = ||F_x \times F_y||^2$. Logo, considerando $h : \Omega \to \mathbb{R}$ arbitrária, para cada número real λ seja $\tilde{F}_\lambda = F + \lambda hN$, onde N é o vetor normal unitário. Então $< N, F_x >= 0$, $< N, F_y >= 0$ e

$$\tilde{G} = D\tilde{F}_\lambda^{\mathrm{t}} \cdot D\tilde{F}_\lambda = (DF^{\mathrm{t}} + \lambda hDN^{\mathrm{t}} + \lambda NDh^{\mathrm{t}}) \cdot (DF + \lambda hDN + \lambda NDh)$$

$$\tilde{G} = G - 2\lambda hB + \lambda^2 C, \tag{3}$$

onde

$$B_{2\times 2} = D^2F \cdot N = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix} \cdot N$$

e C é uma função contínua em x, y, λ. Temos $\tilde{G} = \begin{bmatrix} p_{11}(\lambda) & p_{12}(\lambda) \\ p_{21}(\lambda) & p_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$, donde $det\,\tilde{G} = a_0 + a_1\lambda + O(\lambda^2)$ e $a_{0,1}$ independem de λ. Assim, $det\,\tilde{G}|_{\lambda=0} = a_0$ e $a_1 = (det\,\tilde{G})'|_{\lambda=0}$. Multiplicando (3) por G^{-1} temos

$$G^{-1}\tilde{G} = I - 2\lambda hG^{-1}B + \lambda^2 G^{-1}C = I - \lambda M,\ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Desta forma, $det\,(G^{-1}\tilde{G}) = 1 - \lambda\, trM + \lambda^2 det\, M = det\,\tilde{G}/a_0 = 1 + a_1\lambda/a_0 + O(\lambda^2)$, donde $a_1 = -a_0\, trM|_{\lambda=0} = -a_0\, tr(2hG^{-1}B) = -2h\, tr(G_{adj}B)$. Vamos definir $H = tr(G^{-1}B)/2$, chamada *curvatura média* da superfície.

3. RELAÇÃO ENTRE SUPERFÍCIES MÍNIMAS E CURVATURA MÉDIA

Vamos provar o seguinte resultado, que vale quando a superfície é gráfico:

Teorema. *Se os bordos da superfície estão fixos e $H = 0$, então a área é mínima.*

Demonstração: Considere o domínio Ω, a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e a superfície dada por $F = (x, y, f)$. Façamos uma variação $f + th$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ e $h|_{\partial\Omega} = 0$. Temos assim

$$A(t) = \iint_\Omega \sqrt{a + bt + ct^2}\,dxdy,$$

onde $a = 1 + f_x^2 + f_y^2$, $b = 2(f_xh_x + f_yh_y)$ e $c = h_x^2 + h_y^2$. Por série de Taylor em $t = 0$, $\sqrt{a+bt+ct^2} = \sqrt{a} + \frac{bt}{2\sqrt{a}} + \frac{(b^2-4ac)t^2}{8\sqrt{a^3}} + O(t^3)$.

Logo

$$\begin{aligned} A'(t)|_{t=0} &= \iint_\Omega \frac{b}{2\sqrt{a}}\,dxdy = \iint_\Omega \frac{f_xh_x + f_yh_y}{\sqrt{a}}\,dxdy \\ &= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h \cdot \frac{f_x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \cdot \frac{f_y}{\sqrt{a}}\right)\right] dxdy \\ &\quad - \iint_\Omega h\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{a}}\right)\right] dxdy. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Green

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h \cdot \frac{f_x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \cdot \frac{f_y}{\sqrt{a}}\right)\right] dxdy = 0$$

pois $h|_{\partial\Omega} = 0$. Portanto

$$A'(0) = -\iint_\Omega h\left[\left(\frac{f_x}{\sqrt{a}}\right)_x + \left(\frac{f_y}{\sqrt{a}}\right)_y\right] dxdy.$$

Como h é arbitrária, $A'(0) = 0$ se, e somente se $\left(\frac{f_x}{\sqrt{a}}\right)_x + \left(\frac{f_y}{\sqrt{a}}\right)_y = 0$. Um cálculo simples mostra que esta igualdade é equivalente a

$$(1+f_x^2)f_{yy} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_y^2)f_{xx} = 0. \tag{4}$$

Aplicando a definição $H = tr(G^{-1}B)/2$ para o caso de $F = (x, y, f)$, vemos que por sua vez (4) equivale a $H = 0$. Vamos analisar que tipo de ponto crítico é este. Temos

$$A''(t)|_{t=0} = \frac{2}{8}\iint_\Omega \frac{4ac - b^2}{8\sqrt{a^3}}\,dxdy,$$

onde $4ac - b^2 = 2(f_xh_x + f_yh_y)^2 + 4h_x^2(1+f_y^2) + 4h_y^2(1+f_x^2) \geq 0$. Mas $4ac - b^2 = 0$ se, e somente se $h_x = h_y = 0$, ou seja, $h = 0$. Logo, é ponto de mínimo local c.q.d.

4. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA CURVATURA MÉDIA

Seja S uma superfície regular parametrizada por $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$, e $p \in S$. Para cada curva $\gamma : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to S$ dada por $\gamma(t) = F(x(t), y(t))$ com $\gamma(t_0) = p$, temos que o vetor tangente a γ em p é

$$\gamma'(t_0) = F_x \cdot x'(t_0) + F_y \cdot y'(t_0).$$

Considere todas as curvas de S que passam por p. A totalidade de seus vetores tangentes forma um espaço vetorial bidimensional, chamado *plano tangente* a S em p, denotado T_pS.

A Primeira e Segunda Formas Fundamentais para superfícies são dadas por $\varphi'(t)^{\mathrm{t}} \cdot B \cdot \varphi'(t)$ e $\varphi'(t)^{\mathrm{t}} \cdot G \cdot \varphi'(t)$, respectivamente, onde $\varphi'(t) = [x'(t)\ y'(t)]^{\mathrm{t}}$. Considere agora

$$\frac{\varphi'(t)^{\mathrm{t}} \cdot B \cdot \varphi'(t)}{\varphi'(t)^{\mathrm{t}} \cdot G \cdot \varphi'(t)}. \tag{5}$$

Temos que tanto o numerador quanto o denominador de (5) são formas quadráticas no vetor tangente φ' e cujas matrizes dependem do ponto da superfície. Sua homogeneidade nas componentes de φ' mostra que ele depende somente da direção de um vetor tangente $T = DF \cdot \varphi'$ que seja unitário. Desta forma, podemos reescrever (5) como

$$k(T) = \frac{\varphi'(t)^{\mathrm{t}} \cdot B \cdot \varphi'(t)}{\varphi'(t)^{\mathrm{t}} \cdot G \cdot \varphi'(t)}, \quad T \in S^1 \subset T_pS,$$

que é uma função contínua em T, chamada *curvatura normal de S na direção T*. Os valores máximo e mínimo de k são as *curvaturas principais*, denotadas respectivamente por k_1 e k_2.

Mostremos que a curvatura média H de S em p é dada por

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Inclusive, esta é sua definição original introduzida por Meusnier em 1776. Notamos que a expressão (5) é quociente de formas quadráticas. Logo, seu máximo e seu mínimo são as raízes da equação

$$det\,(B - \lambda G) = 0.$$

De fato, como G é simétrica e positiva definida, então existe uma única $G^{\frac{1}{2}}$ que é definida positiva e simétrica. Portanto temos

$$k(T) = \frac{\varphi'(t)^{\mathrm{t}} \cdot (G^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{t}} \cdot (G^{-\frac{1}{2}})^{\mathrm{t}} \cdot B \cdot G^{-\frac{1}{2}} \cdot G^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi'(t)}{\varphi(t)^{\mathrm{t}} \cdot (G^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{t}} \cdot G^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi'(t)} = \frac{\phi^{\mathrm{t}} \cdot \mathcal{M} \cdot \phi}{\phi^{\mathrm{t}} \cdot \phi}$$

$$k(T) = \tilde{\phi}^{\mathrm{t}} \cdot \mathcal{M} \cdot \tilde{\phi},$$

onde $\phi = G^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi'(t)$, $\mathcal{M} = (G^{-\frac{1}{2}})^{\mathrm{t}} \cdot B \cdot G^{-\frac{1}{2}}$ e $\tilde{\phi} = \phi/||\phi||$. Inclusive, $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} = \mathcal{M}$. Sejam

$$\tilde{\phi} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

$g(X,Y) = X^2 + Y^2 - 1 = 0$ e $f(X,Y) = \tilde{\phi}^{\mathrm{t}}\mathcal{M}\tilde{\phi}$. Usando multiplicadores de Lagrange temos:

$$\begin{cases} f_X - \lambda g_X = 0; \\ f_Y - \lambda g_Y = 0. \end{cases} \tag{6}$$

É fácil ver que

$$f_X = 2[1\ 0]\,\mathcal{M}[X\ Y]^{\mathrm{t}}, \quad f_Y = 2[1\ 0]\,\mathcal{M}[X\ Y]^{\mathrm{t}}, \quad g_X = 2X, \quad g_Y = 2Y.$$

Logo, de (6) temos

$$\begin{bmatrix} f_X - \lambda g_X \\ f_Y - \lambda g_Y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathcal{M} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} - 2\lambda \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$(\mathcal{M} - \lambda I_{2x2}) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por isto, $det\,(\mathcal{M} - \lambda I) = 0$ e assim,

$$det\,(G^{\frac{1}{2}}) \cdot det\left(G^{-\frac{1}{2}} \cdot B \cdot G^{-\frac{1}{2}} - \lambda I\right) \cdot det\,(G^{\frac{1}{2}}) = 0$$

$$det\left(G^{\frac{1}{2}} \cdot G^{-\frac{1}{2}} \cdot B \cdot G^{-\frac{1}{2}} \cdot G^{\frac{1}{2}} - \lambda G^{\frac{1}{2}} \cdot I \cdot G^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

$$det\,(B - \lambda G) = 0.$$

Espandindo esta equação temos

$$\lambda^2 - \lambda\, tr(G^{-1} \cdot B) + det\,(G^{-1} \cdot B) = 0.$$

Portanto

$$H = \frac{tr(G^{-1} \cdot B)}{2}.$$

5. EXEMPLOS

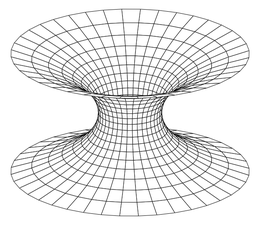


Figura 3: Catenóide

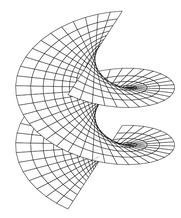


Figura 4: Helicóide

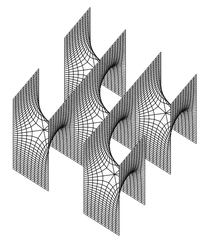


Figura 5: Scherk

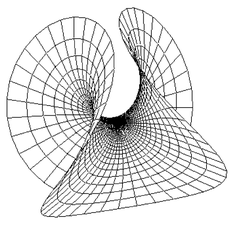


Figura 6: Enneper

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] L.F. Lopes, *Superfícies Mínimas Folheadas por Circunferências*, tese de mestrado, 2004, capítulos 1 e 3.

[2] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover, New York, 2nd ed (1986).

[3] R. Churchill, *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, capítulos 1, 2 e 5.

[4] J. Stewart, *Cálculo Vol. II*, 4^a ed, pp 872–920.

Realização: DM ufscar, IM-AGIMB

Apoio: CAPES, CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, FAPESP