AS SUPERFÍCIES DE COSTA TRIPLAMENTE PERIÓDICAS

Pablo Vinicius Almeida Azevedo, Valério Ramos Batista
CMCC, Universidade Federal do ABC
Av. dos Estados, 5001, Santo André, SP
pabloviniciusazevedo@hotmail.com, valerio.batista@ufabc.edu.br

0. RESUMO

A tese de mestrado versa sobre o artigo *A family of triply periodic Costa surfaces*, que apresenta uma demonstração completa de unicidade e convergência para uma família contínua a um parâmetro de Superfícies Mínimas Triplamente Periódicas. A demonstração é norteada por simulações numéricas em MatLab, que motivam as provas teóricas.

1. INTRODUÇÃO

A família de superfícies é obtida pelo *método de construção reversa* introduzido por Karcher em 1989. Tal método consiste dos seguintes passos: 1) esboço da superfície; 2) compactificação; 3) hipóteses de simetria; 4) equação algébrica; 5) obtenção dos dados de Weierstraß; 6) verificação de involuções e hipóteses de simetria; 7) análise de períodos; e 8) mergulho. A seguir, apresentamos as ferramentas teóricas utilizadas neste método de construção.

2. FERRAMENTAS TEÓRICAS

Definição 1. Uma variedade diferenciável de dimensão 2, ou uma uma 2-variedade C^∞, é um espaço topológico M de Hausdorff com base enumerável, munido de uma família $\sum(M)$ de homeomorfismos $\varphi_i : U_i \to V_i$, U_i aberto de M, V_i aberto $\mathbb{R}^2$, tal que: (1) $\bigcup_i U_i = M$; (2) $\forall i, j$ com $U_i \bigcap U_j = W \neq \emptyset \Rightarrow \varphi_i(W)$ e $\varphi_j(W)$ são abertos de $\mathbb{R}^2$ e $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é de classe C^∞.

Definição 2. Uma *superfície de Riemann* é uma 2-variedade M de classe C^∞, onde M é conexo e as composições como em (2) na Definição 1 são todas holomorfas, com a identificação $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Teorema 3. Seja $X : R \to \mathbb{E}$ uma imersão isométrica completa de uma superfície Riemanniana R sobre um espaço $\mathbb{E}$ "flat", completo e tridimensional. Se X é mínima e a curvatura Gaussiana total $\int_R K dA$ é finita, então R é biholomorfa a uma superfície de Riemann compacta $\overline{R}$ perfurada em um número finito de pontos $\{p_1, \ldots, p_s\}$.

Teorma 4. (Representação de Weierstraß). Seja R uma superfície Riemanniana, g e dh função e 1-forma meromorfas em R, tais que os zeros de dh coincidam com os pólos e zeros de g. Suponhamos que $X : R \to \mathbb{E}$, dada por

$$X(p) := Re \int^p (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \text{ onde } (\phi_1, \phi_2, \phi_3) := \frac{1}{2}(g^{-1} - g, ig^{-1} + ig, 2)dh,$$

está bem definida. Então X é uma imersão mínima conforme. Reciprocamente, toda imersão mínima conforme $X : R \to \mathbb{E}$ pode ser expressa como acima para alguma função g e 1-forma dh meromorfas.

Definição 5. O par (g, dh) são os dados de Weierstraß e $\phi_{1,2,3}$ as formas de Weierstraß em R da imersão mínima $X : R \to X(R) \subset \mathbb{E}$.

Teorema 6. Nas hipóteses dos Teoremas 3 e 4, os dados de Weierstraß (g, dh) se estendem meromorficamente sobre $\overline{R}$.

Observação: A função g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauß $N : R \to S^2$ da imersão mínima X, ou seja,

$$N = \frac{1}{|g|^2 + 1}(2Re\{g\}, 2Im\{g\}, |g|^2 - 1).$$

Ela é um recobrimento ramificado de $\widehat{\mathbb{C}}$ e $\int_S K dA = -4\pi deg(g)$.

Definição 7. Seja M um espaço topológico, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, e α, β duas curvas tais que $\alpha, \beta : I \to M$. Diremos que α e β são *livremente homotópicas* se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \to M$ tal que $H(\cdot, 0) = \alpha$, $H(\cdot, 1) = \beta$ e $H(0, \cdot) = H(1, \cdot)$. A homotopia livre é uma relação de equivalência que denotamos por $\sim$.

Definição 8. Considere w uma 1-forma diferenciável com $dw \equiv 0$. Para cada $\alpha \in \mathcal{C}/_\sim$, o valor complexo $a_\alpha = \int_\alpha w$ é um *período de w* . Dizemos que w *não tem períodos reais* se $Re(a_\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in \mathcal{C}/_\sim$.

Teorema 8. (Fórmula de Riemann-Hurwitz). Sejam X e Y superfícies de Riemann compactas e $f : X \to Y$ uma aplicação holomorfa não constante. Se b_f é a ordem total dos ramos de f, então:

$$gen(X) = b_f/2 + \#(f)(gen(Y) - 1) + 1.$$

Uma fórmula equivalente à anterior é:

$$\chi(X) = -b_f + \#(f) \cdot \chi(Y).$$

Teorema 9. Suponhamos que X e Y são superfícies de Riemann e que $\pi : Y \to X$ é uma aplicação de recobrimento ramificado de n folhas. Se f é uma função meromorfa e $c_1, c_2, \cdots, c_n$ são as funções simétricas elementares de f, então

$$f^n + (\pi^* c_1) f^{n-1} + \cdots + (\pi^* c_{n-1}) f + \pi^* c_n = 0.$$

O monomorfismo $\pi^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ é uma extensão algébrica de um corpo de grau $\leq n$. Além disso, se existe uma $f \in \mathcal{M}(X)$ e um $x \in X$ com pré-imagens $y_1, y_2, \cdots, y_n \in Y$ tais que os valores $f(y_\nu)$ para $\nu = 1, \cdots, n$ são todos distintos, então a extensão do corpo $\pi^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ tem grau n.

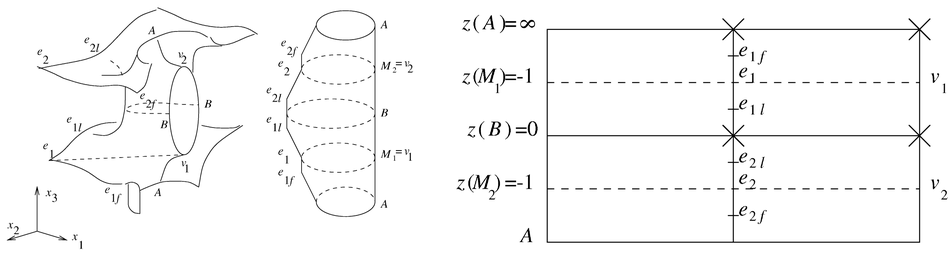
Teorema 10. Suponhamos que X é uma superfície de Riemann e

$$P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \cdots + c_n \in \mathcal{M}(X)[T]$$

é um polinômio irredutível de grau n. Então existe uma superfície de Riemann Y, um recobrimento ramificado de n folhas $\pi : Y \to X$ e uma função meromorfa $F \in \mathcal{M}(Y)$ tal que $(\pi^* P)(F) = 0$. Nestas condições a tripla (Y, π, F) é unicamente determinada. Se (Z, τ, G) têm as correspondentes propriedades, então existe exatamente uma aplicação bioholomorfa que preserva fibras $\sigma : Z \to Y$ tal que $G = \sigma^* F$.

4. CONSTRUÇÃO

Seja ρ a rotação de 180° em x_3 da peça descrita pela Figura 1, à esquerda. Com isso $\rho(S)$, é o toro descrito pela Figura 1, à direita. Após fixarmos uma identificação de S^2 com $\hat{\mathbb{C}}$, obtemos uma função elítica $Z : T \to \hat{\mathbb{C}}$.



Fazendo $z = Z \circ \rho$, e analisando o vetor normal unitário a S, chegamos à seguinte equação:

$$\left(g + \frac{1}{g}\right)^2 = \frac{cz(z-y)^2(z-\lambda^{-1})}{(z^2-1)(z-x)(z-x^{-1})}. \tag{1}$$

Por argumentos geométricos e restrições nos parâmetros $X = x + 1/x$, y e λ, prova-se que (1) é equivalente a:

$$\left(g - \frac{1}{g}\right)^2 = \frac{4(1-yz)^2(1-\lambda^{-1}z)}{(z^2-1)(z^2-Xz+1)}. \tag{2}$$

Finalmente, para aplicar o Teorema 4, deduzimos:

$$dh = \frac{dz}{\sqrt{z(\lambda z - 1)(\lambda - z)}}. \tag{3}$$

Agora, pelos Teoremas 8, 9 e 10, (1) descreve uma superfície de Riemann compacta de gênero 3 e (1), (2) e (3) nos dá a imersão do Teorema 4, restando apenas a análise de períodos.

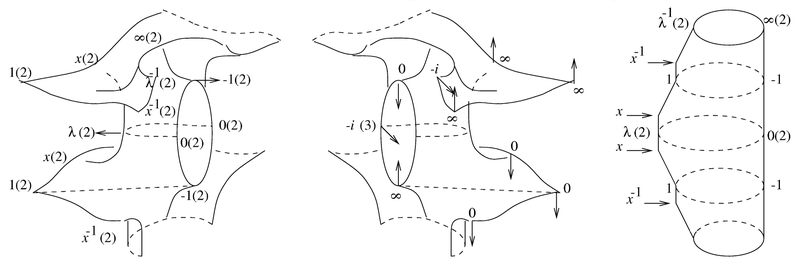


Figura 2

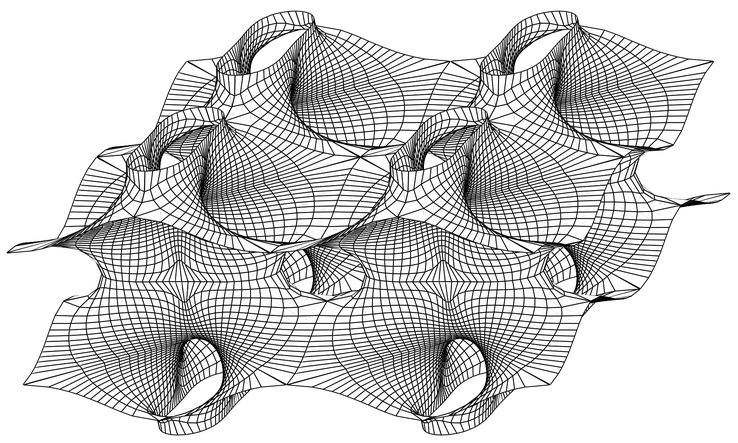


Figura 3

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1981.

[2] H. Karcher, *Construction of minimal surfaces*. Surveys in Geometry, University of Tokio, 1989.

[3] V. Ramos Batista, *Superfícies mínimas completas entre dois planos paralelos no $\mathbb{R}^3$*. Tese de Mestrado, USP, São Paulo, 1996.

[4] V. Ramos Batista, *A family of triply periodic Coasta surfaces*. Pacific Journal of Mathematics, v.212, p347-370, 2003.

Realização: DM ufscar IM-AGIMB
Apoio: CAPES CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico FAPESP