ÁRVORES DE STEINER – TEORIA, GERAÇÃO NUMÉRICA E APLICAÇÕES

Wendhel Raffa Coimbra, Valério Ramos Batista

CMCC, Universidade Federal do ABC

Av. dos Estados, 5001, Santo André, SP

wendhel.raffa@ufabc.edu.br, valerio.batista@ufabc.edu.br

0. RESUMO

Dado um conjunto de pontos no plano, prova-se que sempre existe um grafo minimal que os conecta, chamado "árvore de Steiner". Esta pode ser também realizada por películas de sabão, e por isso compartilham propriedades de Superfícies Mínimas. Na área de redes de computadores, aplicam-se árvores de Steiner na distribuição de vídeo, conferências multimídia que utilizam comunicação "multicast" para transmissão de dados.

1. INTRODUÇÃO

Em uma solução de sabão, ao mergulharmos e retirarmos duas placas paralelas ligadas por pinos, uma película irá conectá-los (vide Figuras 1 e 2). Esta representa um grafo de comprimento mínimo que interliga os pinos. Como é sabido, as películas de sabão realizam as Superfícies Mínimas.

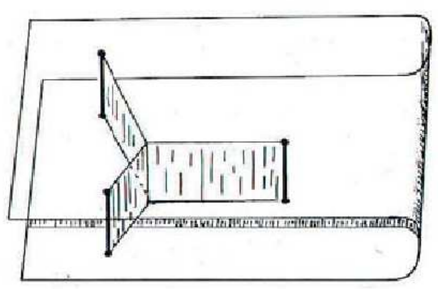


Figura 1

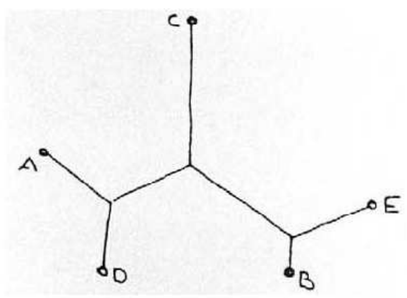


Figura 2

Dado um conjunto de pontos no plano, prova-se que sempre existe um grafo minimal que os conecta, chamado "árvore de Steiner".

Definição 1. Um *grafo* é um conjunto de pontos $V_1, \cdots, V_n$ de $\mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, chamados vértices, e de curvas $\alpha_i : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, 1 \leq i \leq m \in \mathbb{N}^*$, tal que $\alpha_i([0,1])$ são vértices. Além disso, $\forall\ V_j, V_k$ com $j \neq k$ admitem curvas α_i tal que sua concatenação têm V_j e V_k como extremo.

A tabela abaixo à direita representa a *matriz de adjacência* para o grafo da esquerda. Cada matriz de adjacência determina uma *topologia* para a árvore, e reciprocamente.

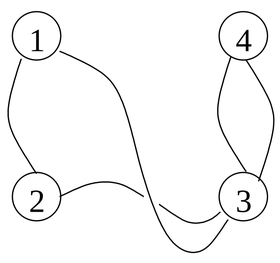


Figura 3

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	2
4	0	0	2	0

Figura 4

Definição 2. Uma *árvore* é um grafo sem ciclos.

Proposição 1. *Seja G grafo com curvas α_i e vértices A, B, C, P_1, $\cdots$, P_n, 3 a 3 distintos com n mínimo, no sentido que qualquer outro grafo com o mesmo traço $\bigcup_{i=1}^{m} \alpha_i([0,1])$ tem ao menos n vértices, além de A, B, C. Se G tem comprimento $l(\alpha_1)+\cdots+l(\alpha_n)$ mínimo, então G é uma árvore. Além disso, $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ é vazio ou unitário.*

Demonstração. Verdade se $\exists\ \alpha_i : A \sim B$ e $\alpha_I : B \sim C$. Senão, sem perda de generalidade $\exists\ \alpha_1 : A \sim P_1$ e $\alpha_2 : P_1 \sim B$. Assim, também $\exists\ \alpha_3 : P_1 \sim C$ c.q.d

Teorema 1. *Seja $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(0) = P, \alpha(1) = Q, PQ \subset Ext\ \mathcal{C}$, $\alpha \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, onde $\mathcal{C}$ é uma curva C^1 convexa, $\overleftrightarrow{PQ} \not\perp \mathcal{C}$. Se $l(\alpha)$ é mínimo, então $\alpha \cap \mathcal{C} = \{R\}$ tal que $P\widehat{R}Q$ é máximo.* (Omitimos a demonstração.)

Lema 1. *Seja $f(x) = 1 - x + 2\sqrt{x^2+1}$, que representa o comprimento da árvore abaixo descrita, com vértices $(0,0), (1, \pm 1)$ e $(1-x, 0)$. Então ela é mínima se, e somente se $\beta = 60°$.*

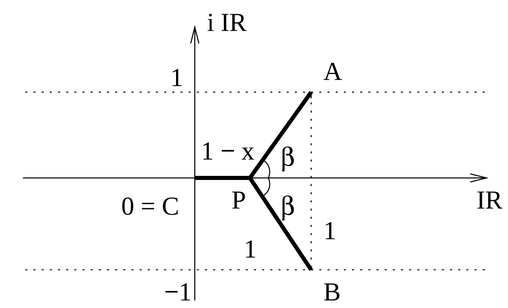


Figura 5

Demonstração. Sendo $f(x) = 1 - x + 2 \cdot \sqrt{x^2+1}$, $f' = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 60°$ c.q.d.

Teorema 2. *Sejam A, B, C não colineares. Então $\exists!\ P$ tal que a árvore com vértices A, B, C, P é mínima. Além disso, se $P \notin \{A, B, C\}$ então $A\widehat{P}B = B\widehat{P}C = C\widehat{P}A = 120°$.*

Demonstração. Da Proposição 1, caso o conjunto $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\} = \emptyset$, tome sem perda de generalidade $A\widehat{C}B$ como o maior ângulo do $\triangle ABC$. Então é claro que $AC \cup CB$ realiza a árvore mínima, pois $|AB| \geq \max\{|AC|, |CB|\}$, donde $\exists!\ P = C$. Caso $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\} = \{P\} \neq \emptyset$ da Proposição 1, seja $c = |CP| > 0$ e $\mathcal{C}(C, c)$. Vejamos que $AB \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Como $P \notin \{A, B, C\}$, então $P \in AB \perp \mathcal{C}$ ou sem perda de generalidade $A \in int\ \mathcal{C}$, donde $|\underbrace{AP}_{a}| + |\underbrace{PB}_{b}| \geq |AB|$ e como $|AC| < c$ teríamos $a + b + c > |AB| + |AC|$, absurdo! Também não pode $P \in AB \perp \mathcal{C}$ pelo Lema 1, pois sem perda de generalidade $|\ proj_{i\mathbb{R}} AP\ | = |\ proj_{i\mathbb{R}} PB\ | = 1$.

Assim, $AB \cap \mathcal{C} = \emptyset$, donde o Teorema 1 implica que $A\widehat{P}B$ é máximo com $\overleftrightarrow{CP}$ bissetriz. Analogamente, $\overleftrightarrow{AP}$ bissetriz de $B\widehat{P}C$ e $\overleftrightarrow{BP}$ bissetriz de $A\widehat{P}C$, donde todos valem 120° por opv c.q.d.

Corolário 1. *Se $P = C$, $A\widehat{C}B$ maior ângulo do $\triangle ABC$, então $A\widehat{C}B \geq 120°$.*

Demonstração. Se $A\widehat{C}B < 120°$, do Lema 1 mais o Teorema 2 teríamos uma contradição c.q.d.

2. RESULTADOS SOBRE ÁRVORES DE STEINER

2.1. NÚMEROS DE PONTOS STEINER. Sendo $A_1, \cdots, A_n$ os terminais e $S_1, \cdots, S_s$ os pontos Steiner da árvore, então $s \leq n - 2$. Vale a igualdade $\Leftrightarrow$ de cada A_i parte só uma aresta.

2.2. PROPRIEDADE DA CUNHA.

Teorema 3. *Seja W uma região aberta qualquer em forma de cunha que tem ângulo de 120° ou mais e contendo nenhum dos $A_1, \cdots, A_n$. Então W não contém pontos Steiner de uma árvore relativamente mínima.*

Corolário 2. (Envelope Convexo) Em uma árvore relativamente mínima todos os pontos Steiner encontram-se no envelope convexo de $A_1, \cdots, A_n$.

2.3. UNICIDADE DAS ÁRVORES MÍNIMAS RELATIVAS. Como existe apenas um número finito de matrizes de adjacência, então o número de topologias é finito.

3. RESULTADOS SOBRE ÁRVORES MÍNIMAS DE STEINER

3.1. PROPRIEDADE DA LUA. Seja AB uma aresta de uma árvore mínima. Seja $L(A, B)$ a região consistindo de todos os pontos X satisfazendo $|XA| < |AB|$ e $|XB| < |AB|$. Se YZ é qualquer outra aresta da árvore, então $L(A, B) \cap YZ = \emptyset$.

3.2. PROPRIEDADE DIAMANTE. Numa aresta AB, o diamante $\mathcal{D}(A, B)$ é o conjunto dos pontos P tais que $\max\{P\widehat{A}B, P\widehat{B}A\} < 30°$. Ou seja, $\mathcal{D}(A, B)$ é interior do losango com ângulos internos 60° e 120°, tendo AB como diagonal maior. Considerando $\mathcal{D}(V_i, V_j)$ e $\mathcal{D}(V_k, V_h)$ numa árvore mínima de Steiner, temos que $\{i, j\} \neq \{k, h\} \Rightarrow \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{D}_{kh} = \emptyset$.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R. L. Wheeden & A. Zygmund, *Measure and integral*. Marcel Dekker ed., New York, 1977.

[2] R Courant & H. Robbins, *O que é matemática?*. Ed. Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2000.

Realização: DM ufscar, IM-AGIMB

Apoio: CAPES, CNPq, FAPESP