# Cargas conservadas em teorias de sólitons


*Anjos, R.C.; Ferreira, L.A.*

*Grupo de Física Teórica, Dep. de Física e Ciência dos Materiais, Instituto de Física de São Carlos*

*Universidade de São Paulo.* Cx. Postal: 369 – CEP: 13560-970 – São Carlos – SP – Brasil

**e-mail**: rita@ursa.ifsc.usp.br **e-mail:** laf@ifsc.usp.br


## Resumo


**As soluções solitônicas para os modelos de Toda admitem uma representação de suas equações de movimento em termos da curvatura nula, isto é, existem potenciais que são funcionais dos campos da teoria e pertencem a uma álgebra de Kac-Moody tal que a condição de curvatura nula seja equivalente às equações de movimento. Para a construção das soluções solitônicas também são necessários a gradação inteira da álgebra de Kac-Moody e a existência de soluções de vácuo, de forma que os potenciais assumam valores em uma subálgebra abeliana (a menos de termos centrais) quando calculados nestas soluções de vácuo.**

**As cargas conservadas são então construídas partindo de soluções da órbita do vácuo por meio de transformações de dressing, que consistem na aplicação da decomposição de Gauss para a produção de um potencial transformado à partir de duas transformações de Gauge.**

**Neste trabalho mostramos como obter as cargas conservadas em (1+1) dim e que no caso dos modelos de Toda Afim Conforme essas cargas são termos de superfície, ou seja, dependem apenas do valor dos campos nas extremidades.**


## Obtenção das cargas conservadas

**Condição de Curvatura Nula:** $F_{\mu\nu} = [\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0$

**Gradação da álgebra:** $A_\mu = \Sigma_{n=N_-}^{N_+} A_\mu^n$ $\quad A_\mu^{(n)} \in G_n$ $\quad [G_n, G_m] \subset G_{n+m}$

**A representação do modelo de Toda sl(2) em termos de condição de curvatura nula envolve potenciais que vivem na álgebra sl(2), uma álgebra de Lie infinita sem termo central. Para o cálculo das cargas fazemos uso da representação de peso máximo, garantindo uma álgebra de Kac-Moody sl(2) completa. Para tornar o modelo invariante conforme adicionamos uma campo escalar.**

**Os potenciais para o modelo de sl(2) tem a forma**

$$A_+ = \frac{1}{2}e^{\eta}(cos\varphi b_1 + isen\varphi F_1)$$

$$A_- = -\frac{1}{2}b_1 - \frac{i}{2}\partial_-\varphi F_0 - \partial_-\eta Q - \frac{1}{4}\partial_-(\rho+\gamma)c$$

$$\partial_+\partial_-\gamma = e^{\eta}$$

**Para os potenciais de vácuo temos:** $\eta = 0$ $\quad \varphi = 0$

**Álgebra de Kac-Moody:**

$$[b_{2m+1}, b_{2n+1}] = (2m+1)\delta_{m+n+1,0}c$$

$$[b_{2m+1}, F_n] = -2F_{n+2m+1}$$

$$[F_{2m+1}, F_2n] = -2b_{2(m+n)+1}$$

$$[F_{2m+1}, F_{2n+1}] = -(2m+1)\delta_{m+n+1,0}c$$

$$[F_2n, F_n] = 2m\delta_{m+n,0}c$$

$$[Q, b_{2m+1}] = (2m+1)b_{2m+1}$$

$$[Q, F_n] = nF_n$$

**A construção das cargas é feita considerando que a equação de transporte paralelo**

$$\frac{dw}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} w = 0$$

**é satisfeita para um certo w e $\sigma$ é a parametrização do caminho no espaço tempo (x-t).**

**Fazendo uso da seguinte condição de contorno:** $A_x|_{x=L} = A_t|_{x=-L} + \beta c$

**Obtemos:** $w_t = e^{\int_0^t dt\beta c}U(t)w_0U(t)^{-1}$

**onde:** $w_{0,t} = Pe^{-\int_{-L}^{L} dxA_x|_{t=0,t}}$ $\quad U(t) = Pe^{-\int_0^t dtA_t|_{x=L}}$

**Que consiste na equação de evolução espectral; os autovalores de w são constantes no tempo quando $\beta = 0$**

**Se $\beta \neq 0$ construimos as cargas conservadas tomando $\psi_0$ tal que:**

$$w_0\psi_0 w_0^{-1} = \lambda\psi_0 \Rightarrow \psi_t = U(t)\psi_0 U(t)^{-1}$$

**Os potenciais de vácuo satisfazem a curvatura nula e então podemos escrever, para sl(2):**

$$A_\mu^{(vac)} = -\partial_\mu\psi_{(vac)}\psi_{(vac)}^{-1} = e^{-\frac{1}{2}x_+ b_1}e^{\frac{1}{2}x_- b_{-1}}$$

**Para construir as soluções com o método de dressing usamos a decomposição de Gauss:**

$$\psi_{(vac)}h\psi_{(vac)}^{-1} = G_-^{-1}G_0^{-1}G_+$$

**Onde h é um elemento constante da álgebra e os G`s são geradores de graus negativo, nulo e positivo, respectivamente. A decomposição de Gauss garante que teremos duas transformações distintas para $A_\mu^h$, com a mesma estrutura de gradação do potencial de vácuo.**

**Para o modelo sl(2) obtemos:** $w_t^{(\pm)}\psi_{2n+1}w_t^{(\pm)^{-1}} = e^{\Omega_{2n+1}^{(\pm)}c}\psi_{2n+1}$

**onde $\Omega_{2n+1}^{(\pm)}$ são as cargas conservadas que podem ser calculadas considerando os estados de peso máximo:**

$$\Omega_{2n+1} = \frac{<\lambda_i|\psi_{(vac)}h\psi_{(vac)}^{-1}b_{-2n-1}|\lambda_i>}{<\lambda_i|\psi_{(vac)}h\psi_{(vac)}^{-1}|\lambda_i>}$$

$$\Omega_{2n+1}^{-1} = \frac{<\lambda_i|b_{2n+1}\psi_{(vac)}h\psi_{(vac)}^{-1}|\lambda_i>}{<\lambda_i|\psi_{(vac)}h\psi_{(vac)}^{-1}|\lambda_i>}$$

**O Hamiltoniano dos modelos de Toda é obtido considerando as soluções onde o campo livre $\eta$ é uma constante. O momento e a energia medidos pelo tensor somem quando calculados nas soluções dos sólitons, dessa forma, o tensor energia-momento canônico do modelo fornece a forma de termos de superfície, que para o modelo sl(2) são:**

$$E = -2\partial_x\rho|_{x=-\infty}^{x=\infty} \qquad P = -2\partial_t\rho|_{x=-\infty}^{x=\infty}$$

$$E = 2(\Omega_1^+ + \Omega_1^-)$$

$$P = 2(\Omega_1^+ - \Omega_1^-)$$

## Referências


**[1] A simple formula for the conserved charges of soliton theories. L. A. Ferreira and W.J. Zakrzewski, JHEP09 (2007) 015;**
**[2] Kac-Moody construction of Toda type field theories. H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F.. Gomes and A. H. Zimerman, Phys. Lett. B 254 (1991) 372;**
**[3] Conserved charges and soliton solutions in affine Toda theory. hep-th/9408092.**



## Agradecimentos