Os Sistemas Completos de Desigualdades Propostos por Santaló

Bruno Mendonça Rey dos Santos[a]

Guillermo Antonio Lobos Villagra[b]

Universidade Federal de São Carlos

Departamento de Matemática

[a]bruno@dm.ufscar.br [b]lobos@dm.ufscar.br

1 Introdução

Santaló introduziu em [15] o conceito de *sistemas completos de desigualdades* para a família dos corpos convexos do plano e propôs que fosse encontrado um *sistema completo de desigualdades* para cada par e cada tripla das seguintes funções: A (área), p (perímetro), D (diâmetro), r (inraio), R (circunraio) e ω (largura mínima). Ele resolveu esse problema para todos os pares, para as triplas (A, p, r), (A, p, R), (A, p, ω), (A, D, ω), (p, D, ω) e (D, r, R) e estudou os casos (D, R, ω) e (r, R, ω), mas sem concluir esses últimos dois.

Neste trabalho apresentamos a técnica utilizada por Santaló para mostrar que um conjunto de desigualdades é um *sistema completo de desigualdades*.

Definição 1.1 *Sejam $\mathscr{F}$ uma família de subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$ e $a_1, \ldots, a_m \colon \mathscr{F} \to \mathbb{R}_+$ funções. Dizemos que k desigualdades $d_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, d_k(x_1, \ldots, x_m)$ são, ou formam, um **sistema completo de desigualdades** se:*

1. *para todo $C \in \mathscr{F}$, as imagens $a_1(C), \ldots, a_m(C)$ satisfazem as desigualdades $d_1\big(a_1(C), \ldots, a_m(C)\big), \ldots, d_k\big(a_1(C), \ldots, a_m(C)\big)$ e*
2. *se $A_1, \ldots, A_m$ são números não-negativos que satisfazem as desigualdades $d_1(A_1, \ldots, A_m), \ldots, d_k(A_1, \ldots, A_m)$, então existe um conjunto $C \in \mathscr{F}$ tal que $a_1(C) = A_1, \ldots, a_m(C) = A_m$.*

2 A Técnica Utilizada: O Diagrama de Blaschke.

A técnica utilizada por Santaló — desenvolvida anteriormente por Blaschke [1] — para mostrar que um conjunto de desigualdades é um *sistema completo de desigualdades* consiste em considerar duas funções e verificar se ambas possuem a mesma imagem.

Por exemplo, para mostrar que as desigualdades da Tabela 1 formam um *sistema completo de desigualdades* são usadas as funções $\varphi : \mathscr{C}^* \to \mathbb{R}^2$ e $\varphi' : X \to \mathbb{R}^2$, definidas por

$$\varphi(K) = \left(\frac{\omega(K)}{D(K)}; \frac{4A(K)}{\pi D^2(K)}\right) \quad \text{e} \quad \varphi'(A', D', \omega') = \left(\frac{\omega'}{D'}; \frac{4A'}{\pi (D')^2}\right),$$

em que $\mathscr{C}^* := \{K \subset \mathbb{R}^2 |\, K \text{ é um corpo convexo e não é um ponto}\}$ e X é conjunto das triplas de números não negativos $(A', D', \omega') \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem as desigualdades da Tabela 1.

Tabela 1: Desigualdades envolvidas no problema (A, D, ω).

Índices	Desigualdades	Igualdade	Condições
d_2	$4A \le \pi D^2$	◯	
d_{15}	$\omega \le D$	$\omega = c$	
D_{14}	$D \cdot \omega \le 2A$	$\triangle_D^\omega$	$\omega \le \frac{\sqrt{3}}{2} D$
D_{15}	$^{iv}A \ge 3\omega \cdot \left[\eta + \omega\left(\arcsin\rho - \frac{\pi}{3}\right)\right] - \frac{\sqrt{3}}{2}D^2$	⌷	$\omega \ge \frac{\sqrt{3}}{2} D$
D_{16}	$^{iv}2A \le \omega\eta + D^2 \arcsin\rho$	⦶	

$^{iv}\eta = \sqrt{D^2 - \omega^2}$, $\rho = \frac{\omega}{D}$

Se $\textsc{Im}\varphi = \textsc{Im}\varphi'$, então as desigualdades da Tabela 1 formarão um sistema completo de desigualdades, pois a $\varphi(K) = \varphi(K')$ sempre que K e K' forem semelhantes.

Já sabemos que $\textsc{Im}\varphi \subset \textsc{Im}\varphi'$, resta então mostrar que $\textsc{Im}\varphi' \subset \textsc{Im}\varphi$. Isso será feito em 2 etapas: *(i)* encontrar a imagem de φ' e *(ii)* mostrar que $\textsc{Im}\varphi' \subset \textsc{Im}\varphi$.

Utilizando as desigualdades da Tabela 1, verifica-se que $\textsc{Im}\varphi'$ é o conjunto do plano que satisfaz as desigualdades (1) a (3) abaixo.

$$\frac{12}{\pi}x\left[\sqrt{1-x^2} + x\left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{3}\right)\right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \le y, \text{ se } x \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

$$\frac{2}{\pi}x \le y, \text{ se } x \le \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

$$y \le \frac{2}{\pi}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right] \tag{3}$$

Além disso, é possível ver que a curva $y = \frac{2}{\pi}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right]$ é a imagem por φ dos segmentos simétricos de círculo com raio $\frac{\omega}{2}$ e diâmetro D. A curva $\frac{2}{\pi}x \le y$ (se $x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$) é a imagem por φ dos triângulos isósceles com base (maior lado) D e altura da base ω. Já a curva $\frac{12}{\pi}x\left[\sqrt{1-x^2} + x\left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{3}\right)\right] - \frac{\sqrt{3}}{2} = y$ (se $x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$) é a imagem por φ dos conjunto de Yamanouti $\textsc{y}$ com diâmetro D e largura mínima ω, sendo $x = \frac{\omega}{D}$.

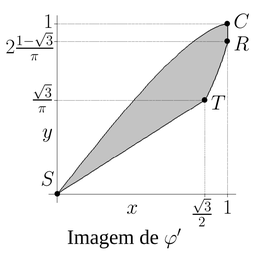
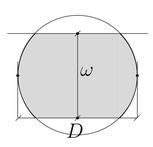
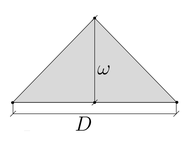


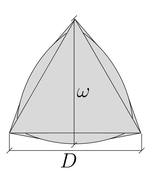
Imagem de φ'



Segmento simétrico de círculo



Triângulo isósceles



Conjunto de Yamanouti

Por último, dado um ponto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que satisfaz a desigualdade (1) e um outro ponto (x, y') que satisfaz a desigualdade (2) (ou (3)), então o segmento de reta ligando (x, y) a (x, y') está contido na imagem de φ.

De fato, tomando um segmento simétrico de círculo X com largura mínima ω e diâmetro D (com $x = \frac{\omega}{D}$) e um conjunto de Yamanouti $\textsc{y}$ (ou um triângulo isósceles) com diâmetro D e largura mínima ω, então $\varphi(X) = (x, y)$ e $\varphi(\textsc{y}) = (x, y')$.

Considere então $\textsc{y}^C := \frac{\textsc{y} - \textsc{y}}{2}$ a simetrização central de $\textsc{y}$. Mas $D\left(\alpha\textsc{y} + (1-\alpha)\textsc{y}^C\right) = D(\textsc{y})$ e $\omega\left(\alpha\textsc{y} + (1-\alpha)\textsc{y}^C\right) = \omega(\textsc{y})$, logo o segmento de reta ligando (x, y') a $\varphi(\textsc{y}^C) = (x, y'')$ está contido em $\textsc{Im}\varphi$.

Para concluir, o segmento de reta ligando (x, y'') a (x, y) também está contido em $\textsc{Im}\varphi$ pois, sendo $\textsc{y}^C \subset X$, então $\omega(\alpha\textsc{y}^C + (1-\alpha)X) \ge \alpha\omega(Y^C) + (1-\alpha)\omega(X) = \omega(\textsc{y})$ e $\alpha\textsc{y}^C + (1-\alpha)X \subset X$, logo $\omega(\alpha\textsc{y}^C + (1-\alpha)X) = \omega(X)$. Por outro lado (rotacionando $\textsc{y}^C$ se necessário) sabemos que existem dois pontos $A, B \in \textsc{y}^C$ tais que $\mathrm{d}(A, B) = D(\textsc{y}^C) = D(X)$. Assim, $D(\alpha\textsc{y}^C + (1-\alpha)X) \le D(X)$, pois $\alpha\textsc{y}^C + (1-\alpha)X \subset X$, e $\mathrm{d}(\alpha A + (1-\alpha)A, \alpha B + (1-\alpha)B) = \mathrm{d}(A, B) = D(X)$, portando $D(\alpha\textsc{y}^C + (1-\alpha)X) = D(X)$.

Portanto as desigualdades da Tabela 1 formam um sistema completo de desigualdades.

3 Listas de desigualdades

Tabela 2: Desigualdades envolvendo pares de funções.

Funções	Índices	Desigualdades	Igualdade
A, p	d_1	$4\pi A \le p^2$	◯
A, D	d_2	$4A \le \pi D^2$	◯
A, r	d_3	$\pi r^2 \le A$	◯
A, R	d_4	$A \le \pi R^2$	◯
A, ω	d_5	$\omega^2 \le \sqrt{3}A$	△, —
p, D	d_6 | d_7	$2D \le p \le \pi D$	— | $\omega = c$
p, r	d_8	$2\pi r \le p$	◯
p, R	d_9 | d_{10}	$4R \le p \le 2\pi R$	— | ◯
p, ω	d_{11}	$\pi\omega \le p$	$\omega = c$
D, r	d_{12}	$2r \le D$	◯
D, R	d_{13} | d_{14}	$\sqrt{3}R \le D \le 2R$	$\textsc{y}^\dagger$ | Cent†
D, ω	d_{15}	$\omega \le D$	$\omega = c$
r, R	d_{16}	$r \le R$	◯
r, ω	d_{17} | d_{18}	$2r \le \omega \le 3r$	†Cent | △, —
R, ω	d_{19}	$\omega \le 2R$	◯

†existem mais figuras para as quais vale a igualdade. As desigualdades dessa tabela podem ser encontradas em [2] ou em [17].

Tabela 3: Desigualdades envolvendo triplas de funções.

Funções	Índice	Desigualdade	=	Condição	Ref.
A, p, D	D_1	$^i 8\phi A \le p(p - 2D\cos\phi)$	⌷	–	[13], [14] e [16]
	D_2	$16A^2 \ge p(p-2D)^2 \cdot (4D - p)$	$\triangle_{\text{is}}$	$2D \le p \le 3D$	[2] e [16]
A, p, r	D_3	$A \ge \frac{pr}{2}$	⌔	–	[2] e [16]
	D_4	$A \le r(p - \pi r)$	⬭	–	
A, p, R	D_5	$A \le R(p - \pi R)$	◯	–	[2] e [16]
	D_6	$^{ii} 8\sigma A \le p(p - 4R\cos\sigma)$	⌷, —	–	[3] e [4]
A, p, ω	D_7	$4A \le \omega(2p - \pi\omega)$	⬭	–	[13] e [14]
	D_8	$^{iii} 2A \ge \omega\left(p - \sqrt{3}\omega\sec^2\theta\right)$	$\textsc{y}$	$\pi\omega \le p \le 2\sqrt{3}\omega$	[16]
	D_9	$16A^2\omega^3 \ge p\left(p\omega - 4A\right)^2 \cdot (8A - p\omega)$	$\triangle_{\text{is}}$	$2\sqrt{3}\omega \le p$	[18]
A, D, r	D_{10}	$A \ge r\left(\sqrt{D^2 - 4r^2} + 2r\arcsin\frac{2r}{D}\right)$	⌔	–	[9]
	D_{11}	$A \le 2Dr$	—	–	[5]
A, D, R	D_{12}	$4AR^2 \ge D^3\sqrt{4R^2 - D^2}$	$\triangle_{\text{is}}$	–	[7]
	D_{13}	$2A \le 3\left[D^2\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{\sqrt{3}R}{D}\right) - \sqrt{3}R\left(R - \sqrt{D^2 - 3R^2}\right)\right]$	$\omega_A = c$	–	
A, D, ω	D_{14}	$D\omega \le 2A$	$\triangle_D^\omega$	$\omega \le \frac{\sqrt{3}}{2}D$	[16]
	D_{15}	$^{iv}A \ge 3\omega\left[\eta + \omega\left(\arcsin\rho - \frac{\pi}{3}\right)\right] - \frac{\sqrt{3}}{2}D^2$	$\textsc{y}$	$\omega \ge \frac{\sqrt{3}}{2}D$	[13]
	D_{16}	$^{iv}2A \le \omega\eta + D^2\arcsin\rho$	⦶	–	[2] e [16]
A, r, R	D_{17}	$^v A \ge 2r\left(\kappa + r\arcsin\vartheta\right)$	⌔	–	[14]
	D_{18}	$A \le 2\left(r\kappa + R^2\arcsin\vartheta\right)$	⦶	–	
A, r, ω	D_{19}	$(\omega - 2r)^2 \cdot (4r - \omega)A^2 \le r^4\omega^3$	$\triangle_{\text{is}}$	–	[9]
A, R, ω	D_{20}	$2A \le \omega\sqrt{4R^2 - \omega^2} + 4R^2\arcsin\frac{\omega}{2R}$	⦶	–	[9]
	D_{21}	$\omega^8 R^4 \ge 16A^4\left(R^2\omega^2 - A^2\right)$	$\triangle_{\text{is}}$	–	
p, D, r	D_{22}	$p \ge 2\left(\sqrt{D^2 - 4r^2} + 2r\arcsin\frac{2r}{D}\right)$	⌔	–	[9]
	D_{23}	$p \le 2D + 4r$	—	–	[5]
p, D, R	D_{24}	$Rp \ge D\left(2R + \sqrt{4R^2 - D^2}\right)$	$\triangle_{\text{is}}$	–	[7]
p, D, ω	D_{25}	$^{iv}p \ge 2\left[\eta + \omega\arcsin\rho\right]$	⌔	–	[2] e [16]
	D_{26}	$^{iv}p \le 2\left[\eta + D\arcsin\rho\right]$	⦶	–	
p, r, R	D_{27}	$^v p \le 4\left(\kappa + R^2\arcsin\vartheta\right)$	⦶	–	[14]
	D_{28}	$^v p \ge 4\left(\kappa + r\arcsin\vartheta\right)$	⌔	–	
p, r, ω	D_{29}	$(\omega - 2r)^2 \cdot (4r - \omega)p^2 \le 4r^2\omega^3$	$\triangle_{\text{is}}$		[9]
p, R, ω	D_{30}	$p \le 2\left(\sqrt{4R^2 - \omega^2} + 2\arcsin\frac{\omega}{2R}\right)$	⦶	–	[9]
D, r, R	D_{31}	$\left(D^2 - 2Rr\right) \cdot \sqrt{4R^2 - D^2} \le 4R^2 r$	$\triangle_{\text{is}}$	–	[15]
	D_{32}	$D \ge R + r$	$^\dagger\omega = c$, $\triangle_\circ$	–	
D, r, ω	D_{34}	$D^2(\omega - 2r)^2 \cdot (4r - \omega) \le 4r^4\omega$	$\triangle_{\text{is}}$	–	[6]
	D_{35}	$D \ge \sqrt{3}(\omega - r)$	$\textsc{y}$	–	
D, R, ω	D_{36}	$4R^4\omega^2 \ge \left(4R^2 - D^2\right)D^4$	$\triangle_{\text{is}}$	–	[12]
r, R, ω	D_{37}	$\omega \le r + R$	$^\dagger\triangle_\circ$, $\textsc{y}$, $\omega = c$	–	[15]
	D_{38}	$(4r - \omega) \cdot (\omega - 2r)R \le 2r^3$	$\triangle_{\text{is}}$	–	[12]

$^i\phi$ é solução da equação $2\phi D = p\sin(\phi)$

$^{ii}\sigma$ é solução da equação $p\sin\sigma = 4R\sigma$

$^{iii}\theta$ é solução da equação $6\omega(\tan\theta - \theta) = p - \pi\omega$

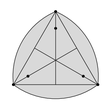
$^{iv}\eta = \sqrt{D^2 - \omega^2}$, $\rho = \frac{\omega}{D}$

$^v\vartheta = \frac{r}{R}$, $\kappa = \sqrt{R^2 - r^2}$

†existem mais conjuntos que satisfazem a igualdade.

Tabela 4: Legenda.

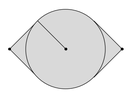
◯	círculo
△	triângulo equilátero
$\triangle_{\text{is}}$	triângulo isósceles cujo lado desigual é menor ou igual aos outros dois
$\triangle_\circ$	triângulo circular
—	segmento de reta
$\omega = c$	figuras de largura constante
$\textsc{y}$	conjuntos de Yamanouti
Cent	conjuntos convexos centralmente simétricos
⬭	salsicha
⦶	segmento simétrico de círculo
⌔	lente simétrica
⌷	capbody
$\triangle_D^\omega$	triângulo com base D e altura ω



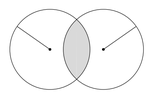
Triângulo Circular



Salsicha



Capbody



Lente Simétrica

4 Outros problemas resolvidos

Trabalhos posteriores ao de Santaló foram feitos por M. A. Hernández Cifre, S. Segura Gomis e G. Salinas Martínez que resolveram os casos (A, D, R), (A, r, R), (p, D, R), (p, r, R), (D, r, ω), (D, R, ω) e (r, R, ω) (ver [6], [7], [12] e [9]), mas ainda existem sete casos abertos para os quais as desigualdades existentes não formam um sistema completo de desigualdades: (A, p, D), (A, D, r), (A, r, ω), (A, R, ω), (p, D, r), (p, r, ω) e (p, R, ω).

Mantendo as funções A, p, D, r, R e w e restringindo a família de figuras para a família dos corpos convexos 3-rotacionalmente simétricos de $\mathbb{R}^2$, foram resolvidos (em [10]) 14 dos 20 possíveis casos envolvendo triplas de funções. Já para a família dos corpos convexos centralmente simétricos de $\mathbb{R}^2$, os 20 casos se reduzem a 4 que foram todos resolvidos em [11].

Também são objetos de investigação alguns sistemas completos de desigualdades para famílias de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^3$ (ver [8]).

Segue uma lista das soluções dos problemas propostos por Santaló.
(A, p, r) : d_1, d_8, D_3 e D_4.
(A, p, R) : d_1, d_9 e D_6.
(A, p, ω) : d_5, d_{11}, D_7, D_8 e D_9.
(A, D, R) : d_4, d_{13}, d_{14}, D_{12} e D_{13}.
(A, D, ω) : d_2, d_5, D_{14}, D_{15} e D_{16}.
(A, r, R) : d_4, d_{16}, D_{17} e D_{18}.
(p, D, R) : d_7, d_{13}, d_{14} e D_{24}
(p, D, ω) : d_7, d_{15}, D_{25} e D_{14}.
(p, r, R) : d_{10}, d_{16}, D_{27} e D_{28}.
(D, r, R) : d_{13}, d_{14}, d_{16}, D_{31} e D_{32}.
(D, r, ω) : d_{12}, d_{15}, d_7, D_{34} e D_{35}.
(D, R, ω) : d_{13}, d_{14}, d_{15}, d_{19} e D_{36}.
(r, R, ω) : d_{16}, d_7, d_{19}, D_{37} e D_{38}.

Referências

[1] Blaschke, W. Eine frage über konvexe körper. *Jahresbericht Deutsch. Math. Ver. 25* (1916), 121.

[2] Bonnessen, T., and Fenchel, W. *Theorie der Konvexen Köper*. Springer, 1934.

[3] Favard, J. Problèmes d'extremuns relatifs aux courbes convexes I. *Ann. École norm. 46* (1929), 345–369.

[4] Favard, J. Problèmes d'extremuns relatifs aux courbes convexes II. *Ann. École norm. 47* (1930), 313–324.

[5] Henk, M., and Tsintsifas, G. Some inequalities for planar convex figures. *Elem. Math. 49*, 3 (1994), 120–125.

[6] Hernández Cifre, M. A. Is there a planar convex set with given width, diameter an inradius? *Amer. Math. Monthly 107* (2000), 893–900.

[7] Hernández Cifre, M. A. Optimizing the perimeter an the area of convex sets with fixed diameter an circunradius. *Arch. Math. (Basel) 79*, 2 (2002), 147–157.

[8] Hernández Cifre, M. A., Pastor Gonzáles, J. A., Salinas Martínez, G., and Segura Gomis, S. Complete systems of inequalities for centrally simetric convex sets in the n-dimensional space. *Arch. Inequal. Appl. 1*, 2 (2003), 155–167.

[9] Hernández Cifre, M. A., and Salinas Martínez, G. Some optimization problems for planar convex figures. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., part I*, 70 (2002), 395–405.

[10] Hernández Cifre, M. A., Salinas Martínez, G., and Segura Gomis, S. Complete systems of inequalities. *J. Ineq. Pure Appl. Math. 2*, 1 (2001), 39–49.

[11] Hernández Cifre, M. A., Salinas Martínez, G., and Segura Gomis, S. Complete systems of inequalities for centrally symmetric planar convex sets. *Intern. Math. J. 2*, 1 (2002), 39–49.

[12] Hernández Cifre, M. A., and Segura Gomis, S. The missing boundaries of the santaló diagrams for the cases (d, ω, R) and (ω, r, R). *Discrete Comput. Geom. 23*, 3 (2000), 381–388.

[13] Kubota, T. Einige ungleischheitsbeziehungen über elinien und eiflächen. *Sci. Rep. Tôhoku Univ. 12* (1923), 45–65.

[14] Salinas Martínez, G., Hernández Cifre, M. A., and Böröczky, K. Optimizing area and perimeter of convex sets for fixed circumradius and inradius. *Monatsh. Math. 138*, 2 (2003), 95–110.

[15] Santaló, L. A. Sobre los sistemas completos de desigualdes entre tres elementos de una figura convexa plana. *Math. Notae. 17* (1961), 82–104.

[16] Sholander, M. On certain minimum problems in the theory of convex curves. *Trans. Amer. Math. Soc. 73* (1952), 139–173.

[17] Yaglom, I. M., and Boltyanskii, V. G. *Convex Figures*. Reinehart and Winston, 1961.

[18] Yamanouti, M. Notes on closed convex figures. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 14* (1932), 605–609.

Apoio: CAPES e FAPESP.