UFSCar – Cálculo 1, turma D.
Resolução da Avaliação diagnóstica de 28 de março de 2007.

Professor João C.V. Sampaio.

1. Sendo $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, calcule $f'(x)$, calculando o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Solução. Temos, no problema,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\frac{x+\Delta x}{x+\Delta x-1} - \frac{x}{x-1}}{\Delta x} = \frac{\frac{(x+\Delta x)(x-1) - x(x+\Delta x-1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)}}{\Delta x} \\
&= \frac{x^2 - x + \Delta x \cdot x - \Delta x - x^2 - x \cdot \Delta x + x}{\Delta x \cdot (x+\Delta x-1)(x-1)} \\
&= \frac{-1}{(x+\Delta x-1)(x-1)}
\end{aligned}$$

Portanto,
$f'(x) = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

---

2. Verifique primeiramente que o ponto $P = (-2, 4)$ pertence à curva

$$(y^2 - xy - 21)^2 = 1 - xy$$

e ache a equação da reta tangente a essa curva no ponto P.

Solução. Verificamos primeiramente se é verdadeira a igualdade

$$(4^2 - (-2) \cdot 4 - 21)^2 = 1 - (-2) \cdot 4$$

Esta igualdade é equivalente à igualdade $9 = 9$. Portanto o ponto P pertence à curva.

Derivando, em relação a x, ambos os membros da equação

$$(y^2 - xy - 21)^2 = 1 - xy$$

em que y é função de x, obtemos

$$\begin{aligned}
2(y^2 - xy - 21)^1 \cdot (y^2 - xy - 21)' &= (1 - xy)' \\
2(y^2 - xy - 21) \cdot [2y \cdot y' - (xy)'] &= -(xy)' \\
2(y^2 - xy - 21) \cdot [2y \cdot y' - y - xy'] &= -y - xy'
\end{aligned}$$

Para obter $y' = \frac{dy}{dx}$ quando $x = -2$ e $y = 4$, podemos substituir os valores $x = -2$ e $y = 4$ (coordenadas do ponto P) na última equação, obtendo

$$2 \cdot (4^2 - (-2) \cdot 4 - 21) \cdot [2 \cdot 4 \cdot y' - 4 - (-2)y'] = -4 - (-2)y'$$

$$2 \cdot 3 \cdot (10y' - 4) = -4 + 2y'$$
$$60y' - 24 = -4 + 2y'$$
$$58y' = 20$$

e portanto $y' = \frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=-2\\y=4}} = \frac{20}{58} = \frac{10}{29}$ é a inclinação da reta tangente à curva dada em P. A equação dessa reta é

$$y - 4 = \frac{10}{29}(x + 2)$$

---

3. Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{6x^2 - 7x + 1}$

   Solução. O limite é indeterminado na forma $0/0$. Para contornar a indeterminação, fazemos
   $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{6x^2 - 7x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(2x+7)}{(x-1)(6x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+7}{6x-1} = \dfrac{9}{5}$

---

4. (a) Sendo $g(x)$ uma função derivável, mostre que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta g = 0$

   Sugestão. Leve em conta que $\Delta g = \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x$.

   Solução. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta g = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x = g'(x) \cdot 0 = 0.$

   (b) Sendo $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, e $g(x) \neq 0$, deduza a fórmula

   $$f'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$$

   calculando $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

   Sugestão. Considere que $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g$.

   Solução.

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{[g(x) + \Delta g]g(x)} \\ &= -g'(x) \cdot \frac{1}{[g(x)]^2} = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \text{(tendo em conta que } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta g = 0\text{)} \end{aligned}$$
