1

Lógica Elementar

Neste capítulo, apresentamos uma introdução à lógica, que nos será suficiente como ferramenta de trabalho nos capítulos posteriores.

1.1 Proposições e seus conectivos

O estudo da lógica é o estudo dos princípios e métodos usados para distinguir argumentos válidos dos não válidos. O propósito deste capítulo preliminar em lógica é ajudar o leitor a entender os princípios e métodos usados em cada passo de uma demonstração.

O ponto de partida em lógica é o termo "proposição", que é usado num sentido técnico. Por uma *proposição* queremos dizer uma declaração que é verdadeira ou falsa, mas não ambos. Não é necessário que saibamos se a proposição é verdadeira ou falsa; a única qualificação exigida é que ela deve ser definitivamente uma coisa ou outra. Habitualmente, podemos determinar imediatamente se uma proposição é verdadeira ou falsa, mas em alguns casos um pouco de esforço é preciso, e em outros casos pode ser impossível chegar a uma conclusão. Os seguintes exemplos deverão ilustrar o que queremos dizer.

Exemplo 1.1 *Cada uma das seguintes frases é uma proposição.*

(a) Londrina é uma cidade no estado do Paraná.
(b) $2 + 1$ *é* 5.
(c) O dígito na 105ª casa decimal, na expansão decimal de $\sqrt{3}$, *é* 7.
(d) A lua é feita de queijo mineiro.
(e) Não há vida inteligente em Marte.
(f) Está chovendo.

Claramente, (a) é verdadeira, enquanto (b) e (d) são falsas. Podemos ter dúvidas quanto ao status *(verdadeiro ou falso) de (c) e (e). A veracidade ou falsidade da sentença (f) depende das condições meteorológicas no* instante *em que essa declaração é feita.*

Exemplo 1.2 *Nenhuma das frases seguintes é uma proposição, porque não faz sentido questionar se alguma delas é verdadeira ou falsa.*

(a) Venha à nossa festa!
(b) Tudo bem com você?
(c) Tiau, benzinho.

As proposições do Exemplo 1.1 são todas *proposições simples*. Uma combinação de duas ou mais proposições é uma *proposição composta*. Por exemplo, "$2+1$ é 5 *e* o dígito na 105ª casa decimal na expansão decimal de $\sqrt{3}$ é 7" é uma proposição composta.

Estamos familiarizados com o uso de letras para representar números na álgebra. No estudo da lógica usamos letras, tais como p, q, r, ... para representar proposições. Uma letra, tal como p, pode representar uma proposição simples ou composta. A menos que digamos em contrário, usaremos letras maiúsculas P, Q, R, ... para representar proposições compostas. Existem muitos modos de se ligar proposições tais como p, q, r, ... para formar proposições compostas, mas apenas cinco modos são usados freqüentemente. Estes cinco *conectivos* comuns são (a) "não", simbolizado por $\sim$; (b) "e", simbolizado por $\wedge$; (c) "ou", simbolizado por $\vee$; (d) "se ... então ... ", simbolizado por $\rightarrow$; e (e) " ... se e somente se ... ", simbolizado por $\leftrightarrow$.

Nesta seção discutiremos os conectivos $\sim$ e $\wedge$, adiando os demais conectivos, $\vee$, $\rightarrow$, e $\leftrightarrow$, até a próxima seção.

Seja p uma proposição. A proposição $\sim p$, lida "não p" ou "a negação de p", é verdadeira quando a proposição p é falsa, e é falsa quando p é verdadeira. Por exemplo, seja p a proposição "Este é um curso fácil". Então sua negação $\sim p$ representa "Este não é um curso fácil".

A verdade de $\sim p$ depende da verdade de p. É conveniente anotar essa dependência em uma *tabela verdade*:

Tabela 1.1:

p	$\sim p$
V	F
F	V

na qual as letras V e F significam "verdadeiro" e "falso", respectivamente. Na primeira coluna da tabela 1.1, listamos os dois possíveis *valores lógicos* da proposição p, sendo eles V e F. Cada linha em uma tabela verdade representa um caso que deve ser considerado, e claramente, nesta situação bastante simples, há apenas dois casos. Usando as linhas da Tabela 1.1 vemos que se p é verdadeira então $\sim p$ é falsa, e se p é falsa, então $\sim p$ é verdadeira. Conseqüentemente, a Tabela 1.1 nos diz o *valor verdade*[1] de $\sim p$ em cada caso.

[1] ou *valor lógico* (N. do T.)

Definição 1.1 *O conectivo $\wedge$ pode ser colocado entre duas proposições p e q para formar uma proposição composta $p \wedge q$ cujos valores verdade são dados na seguinte tabela verdade.*

Tabela 1.2:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

O símbolo $p \wedge q$ é lido "p e q" ou "*conjunção* de p e q". Por exemplo, seja p a proposição "O céu é azul" e seja q a proposição "As rosas são vermelhas". Então a conjunção $p \wedge q$ representa "O céu é azul e as rosas são vermelhas". Numa proposição composta, tal como $p \wedge q$, as proposições individuais p e q são chamadas *componentes*. Uma componente pode ser uma proposição simples ou uma proposição composta. Numa proposição composta com duas componentes, tal como $p \wedge q$, existem no máximo $4\,(= 2 \times 2)$ possibilidades, chamadas *possibilidades lógicas*, a serem consideradas; sendo elas:

(1) p é verdadeira e q é verdadeira;
(2) p é verdadeira e q é falsa;
(3) p é falsa e q é verdadeira;
(4) p é falsa e q é falsa.

Cada uma destas quatro possibilidades é coberta nas quatro linhas da Tabela 1.2. A última coluna dá os valores verdade de $p \wedge q$. Uma inspeção mostra que $p \wedge q$ é verdadeira em apenas um caso. Isto é, $p \wedge q$ é verdadeira quando ambas as componentes são verdadeiras, e nos outros três casos $p \wedge q$ é falsa. O leitor sensato perceberá que a Tabela 1.2 reflete o modo pelo qual a conjunção "e" é usada no português cotidiano.

Usando as Tabelas 1.1 e 1.2, podemos encontrar valores verdade de proposições complicadas envolvendo os conectivos $\sim$ e $\wedge$.

Exemplo 1.3 *Construa a tabela verdade para a proposição composta*

$$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$$

Solução.

Se o método usado na construção da Tabela 1.3 não é óbvio, uma palavra de explicação pode ajudar. Os cabeçalhos são selecionados de modo que a proposição composta (última coluna) é gradualmente construída a partir de suas várias componentes.

Tabela 1.3:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F
Passo		1	1	2	3

As duas primeiras colunas simplesmente registram todos os casos para os valores verdade de p *e* q*. Usamos então a Tabela 1.1 para obter as entradas nas terceira e quarta colunas, os valores verdade correspondentes para* $\sim p$ *e* $\sim q$*. No próximo passo usamos as entradas das terceira e quarta colunas e a Tabela 1.2 para obter as entradas na quinta coluna. Finalmente, as entradas da quinta coluna e a Tabela 1.1 dão as entradas na sexta coluna — os valores verdade de* $\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$*. O estudante aplicado deveria agora copiar esta última proposição composta, fechar o livro, e tentar reproduzir a Tabela 1.3.*

A proposição no exemplo acima, $\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$, usa parênteses e colchetes para indicar a ordem segundo a qual os conectivos se aplicam. Freqüentemente, uma expressão pode ser simplificada se pudermos eliminar alguns dos parênteses ou colchetes. A convenção habitual é concordar que $\sim$ tem prioridade sobre $\wedge$, isto é, o conectivo $\sim$ deve ser aplicado primeiro. Assim, por exemplo, a expressão $(\sim p) \wedge (\sim q)$ é simplificada na forma $\sim p \wedge \sim q$.

1.1.1 Exercícios

Nos problemas de 1 a 10, uma sentença em português é dada. Determine se a sentença é uma proposição (S) ou não (N).

1. Em 7 de junho de 1442 nevou em algum lugar no Rio Grande do Sul.
2. Aristóteles tinha pés chatos.
3. O socialismo está errado.
4. O homem mais rico do mundo é o Sr. Malagutti, de São Carlos.
5. Joana e Pedro são pessoas boas.
6. Quanto vale este carro?
7. Saia da grama.
8. Use sempre cinto de segurança.
9. O número $2^{987654321} + 37$ é primo.
10. Beethoven escreveu algumas das músicas de Chopin.
11. Dentre as proposições dadas nos problemas de 1 a 10, indique aquelas que você acha que devem ser verdadeiras (V) ou falsas (F), e aquelas cujo status pode ser difícil determinar.

Nos problemas 12 a 19 encontre as tabelas verdade das proposições dadas. Use o formato da Tabela 1.1 ou da Tabela 1.2 para os dois ou quatro casos respectivamente.

12. $\sim(\sim p)$ 13. $\sim[\sim(\sim p)]$
14. $p \wedge p$ 15. $\sim(p \wedge \sim p)$
16. $p \wedge \sim q$ 17. $\sim p \wedge q$
18. $(p \wedge p) \wedge \sim p$ 19. $\sim(p \wedge q)$

20. Numa proposição composta, envolvendo três componentes distintas p, q e r, quantos casos são necessários para cobrir todas as possibilidades lógicas? Quantos casos são necessários se houver quatro componentes distintas? Quantos casos são necessários se houver n componentes distintas?
21. O seguinte é uma tentativa de arranjar todos os casos em uma tabela verdade, para uma proposição envolvendo três componentes p, q, e r. Complete o trabalho inacabado.

p	q	r	.
V	V		
V	V	F	
V		V	
V		F	
	V	V	
	V	F	
F	F		
	F	F	

Nos problemas 22 a 25, encontre as tabelas verdade para as proposições dadas. Use o padrão desenvolvido no problema 21 para os vários casos.

22. $(p \wedge q) \wedge r$ 23. $p \wedge (q \wedge r)$
24. $(p \wedge \sim q) \wedge r$ 25. $\sim q \wedge (r \wedge p)$

1.2 Três conectivos mais

Na língua portuguesa há uma ambigüidade envolvida no uso do "ou". A proposição "Obterei grau de mestre ou grau de doutor" indica que quem o afirma pode obter ambos, o grau de mestre e o de doutor. Mas em outra proposição, "Me casarei com Lívia ou Lúcia", a palavra "ou" significa que apenas uma das duas moças será escolhida. Na matemática e na lógica, não podemos permitir ambigüidades. Portanto, devemos nos decidir sobre o significado da palavra "ou".

Definição 1.2 *O conectivo $\vee$ pode ser colocado entre duas proposições quaisquer p e q para formar a proposição composta $p \vee q$. Os valores verdade de $p \vee q$ são definidos na Tabela 1.4. Portanto $\vee$ é definido como sendo o "ou" inclusivo, tal como usado na primeira proposição acima.*

Tabela 1.4:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

O símbolo $p \vee q$ é lido "p ou q" ou a "*disjunção* de p e q". Repare que a conjunção de p e q é verdadeira apenas quando as duas componentes são ambas verdadeiras (Tabela 1.2), enquanto que a disjunção é falsa quando e apenas quando as duas componentes são falsas (Tabela 1.4).

Comparemos as tabelas verdade de $p \vee q$ e $\sim (\sim p \wedge \sim q)$, nas Tabelas 1.3 e 1.4. Notamos que em cada caso a última coluna é $VVVF$, de modo que estas duas proposições tem os mesmos valores verdade em cada uma das quatro possibilidades lógicas. Mostrar que certas proposições tem os mesmos valores verdade em cada caso é uma parte importante da lógica. Na verdade, a lógica trata duas tais proposições como sendo uma só.

Definição 1.3 *Quando duas proposições P e Q, simples ou compostas, tem os mesmos valores verdade em cada uma de todas as possibilidades lógicas, dizemos que P é* logicamente equivalente *ou simplesmente* equivalente *a Q, e escrevemos $P \equiv Q$.*

Resumidamente, duas proposições são logicamente equivalentes desde que tenham a mesma tabela verdade. Portanto, temos

$$p \vee q \equiv \sim (\sim p \wedge \sim q)$$

Embora duas proposições equivalentes sejam consideradas como a mesma, do ponto de vista da lógica, preferimos a proposição mais simples "p ou q" em vez da proposição equivalente mais complicada "Não é verdade que nem p e nem q".

Definição 1.4 *O conectivo $\rightarrow$ é chamado* condicional *e pode ser colocado entre duas proposições p e q para formar a proposição composta $p \rightarrow q$ (lida: "se p então q"). Por definição, a proposição $p \rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim (p \wedge \sim q)$, e os valores verdade de $p \rightarrow q$ são dados na Tabela 1.5.*

Tabela 1.5:

Caso	p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q\,[\equiv \sim (p \wedge \sim q)]$
1	V	V	F	F	V
2	V	F	V	V	F
3	F	V	F	F	V
4	F	F	V	F	V

A motivação da Definição 1.4 é a seguinte. Sejam p a proposição "O sol está brilhando" e q a proposição "Eu estou jogando tênis". Então a proposição composta $p \rightarrow q$ é "Se o sol está brilhando então eu estou jogando tênis". Agora, quando é que uma tal proposição 'considerada falsa? Claramente $p \rightarrow q$ é falsa se o sol está brilhando mas eu não estou jogando tênis, e apenas neste caso. Em outras palavras $p \rightarrow q$ é falsa se $p \wedge \sim q$ é verdadeira, a apenas neste caso. Mas isto é precisamente a Definição 1.4. Estudaremos agora a tabela verdade de $p \rightarrow q$, isto é, de $\sim (p \wedge \sim q)$.

Conforme a Definição 1.4, o significado da proposição condicional $p \rightarrow q$ afasta-se radicalmente do nosso uso ordinário de "Se p então q". Na nossa linguagem ordinária,[2] uma sentenção da forma "Se p então q" é considerada como querendo dizer que q é verdadeira sempre que p é verdadeira. Portanto os casos em que p é falsa não precisam ser considerados.

Por exemplo, a proposição "Se Collor atirou em Figueiredo, então Itamar foi o primeiro presidente" é considerada sem sentido, pois ambas as componentes são falsas. Conseqüentemente, no uso ordinário não se questiona se uma proposição componente é verdadeira. Ao criar a linguagem formal, o lógico deseja designar um valor verdade a $p \rightarrow q$ para cada uma das quatro possibilidades lógicas, muito embora dois dos casos pareçam ser sem sentido em nossa linguagem ordinária. Por várias razões, que aparecerão no tempo devido, os lógicos decidiram-se pela definição adotada aqui. Portanto, em nossa linguagem formal, $p \rightarrow q$ é verdadeira em todos os casos exceto no caso 2 (veja Tabela 1.5). Como conseqüência desse acerto, seremos capazes de demonstrar alguns teoremas úteis bastante simples, cujas demonstrações, sem tal acerto, seriam desajeitadas ou muito difíceis.

Introduzimos agora o último dos cinco conectivos mais comuns, um que aparece freqüentemente nos enunciados (proposições) de teoremas matemáticos.

Definição 1.5 *O conectivo $\leftrightarrow$ é chamado o* bicondicional *e pode ser colocado entre duas proposições p e q para formar a proposição composta $p \leftrightarrow q$ (lida: "p se e somente se q"). A proposição $p \leftrightarrow q$ é equivalente à proposição $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, e os valores verdade de $p \leftrightarrow q$ são dados na Tabela 1.6.*

---

[2] Em oposição à "linguagem ordinária", lógica é chamada uma linguagem formal.

Exemplo 1.4 *Encontre a tabela verdade para* $p \leftrightarrow q$.

Solução. *Seguindo o método descrito anteriormente, obtemos a Tabela 1.6.*

Tabela 1.6:

Caso	p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q\ [\equiv (p \to q) \wedge (q \to p)]$
1	V	V	V	V	V
2	V	F	F	V	F
3	F	V	V	F	F
4	F	F	V	V	V
Passo			1	1	2

Da tabela verdade acima, observamos que $p \leftrightarrow q$ *é verdadeira se ambas as componentes são verdadeiras ou ambas as componentes são falsas. Em qualquer outro caso (casos 2 e 3) a proposição* $p \leftrightarrow q$ *é falsa.*

1.2.1 Exercícios

Nos problemas de 1 a 12, construa as tabelas verdade para as proposições dadas.

1. $p \vee \sim p$ 2. $\sim (p \vee \sim p)$
3. $\sim (\sim p \vee \sim q)$ 4. $\sim p \vee q$
5. $(\sim q) \to (\sim p)$ 6. $q \leftrightarrow p$
7. $p \wedge (q \vee r)$ 8. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
9. $p \vee (q \wedge r)$ 10. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
11.$(p \vee q) \vee r$ 12. $p \vee (q \vee r)$

13. É a proposição $(\sim q) \to (\sim p)$ (Problema 5) logicamente equivalente à proposição $p \to q$?
14. É a proposição $\sim p \vee q$ (Problema 4) logicamente equivalente à proposição $p \to q$?
15. Dentre as proposições nos Problemas 1 a 12, encontre os pares de proposições logicamente equivalentes.
16. Em cada um dos seguintes itens, traduza a proposição composta dada em uma forma simbólica usando os símbolos sugeridos.
(a) Não ocorre que eu seja amigável a você. (A)
(b) Se ela é uma gata, então ela tem quatro pernas. (G, P)
(c) O preço do arroz aumenta se e somente se o suprimento de arroz não atende à demanda. (P, S)
(d) Ou os grandes laboratórios reduzem os preços ou o governo intervirá. (L, G)
(e) Se a exportação de carne aumentar ou se a produção pecuária decair, então o custo de vida subirá. (E, P, C)

1.3 Tautologia, implicação e equivalência

Examinemos a tabela verdade para a proposição $p \vee \sim p$:

Tabela 1.7:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Reparemos que a proposição $p \vee \sim p$ é verdadeira em todos os casos, isto é, em todas as possibilidades lógicas. Tal tipo importante de proposição merece um nome especial.

Definição 1.6 *Uma proposição é dita ser uma* tautologia *quando é verdadeira em cada uma de todas as possibilidades lógicas.*

Sejam P e Q duas proposições, compostas ou simples. Se a proposição condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia, a proposição é chamada uma *implicação* e é denotada por $P \Rightarrow Q$ (lê-se: P *implica* Q). Assim as seguintes proposições condicionais são tautologias:

(1) $p \rightarrow p$.
(2) $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$.
(3) $p \rightarrow p \wedge p$.
(4) $p \wedge q \rightarrow q$.[3]

Na lógica ou na matemática, "teoremas" significam proposições verdadeiras, e uma "demonstração" (de um teorema) é uma justificação do teorema.

Teorema 1.1 *Sejam p e q duas proposições quaisquer. Então*

(a) Lei da Adição (Ad.): $p \Rightarrow p \vee q$.

(b) Leis de Simplificação (Simp.): $p \wedge q \Rightarrow p, \quad p \wedge q \Rightarrow q$.

(c) Silogismo Disjuntivo (S.D.): $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$.

Demonstração. Deixamos as demonstrações de (a) e (b) ao leitor, como exercícios. A seguinte é uma tabela verdade simplificada para $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$:

Tomemos um instante para explicar a construção da tabela verdade simplificada: Os valores verdade na Tabela 1.8 são atribuídos, coluna por coluna, na ordem indicada

[3]Consideraremos $\vee$ e $\wedge$ como conectivos prioritários em relação a $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, e escreveremos $p \rightarrow p \vee q$ em lugar de $p \rightarrow (p \vee q)$, etc. Veja também o último parágrafo da seção 1.1

Tabela 1.8:

	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim p$	$\rightarrow$	q
	V	V	V	F	F	V	V
	V	V	F	F	F	V	F
	F	V	V	V	V	V	V
	F	F	F	F	V	V	F
Passo	1	2	1	3	2	4	1

pelos números que aparecem na última linha da tabela. Em uma tabela verdade simplificada, escrevemos os valores verdade diretamente, primeiro sob cada componente e então sob os conectivos. Isto poupa espaço e tempo.

Agora, retornando à demonstração do teorema, como o passo final (passo 4) na Tabela 1.8 consiste só de V's, a proposição condicional $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$ é de fato uma implicação.

Se a proposição bicondicional $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia, ela é chamada uma *equivalência* e é denotada por $P \Leftrightarrow Q$ (leia-se: P é equivalente a Q).

Da definição 1.5 e da Tabela 1.6, $P \Leftrightarrow Q$ se P e Q tem os mesmos valores verdade em cada uma de todas as possibilidades lógicas, e reciprocamente, P e Q tem os mesmos valores verdade em cada uma de todas as possibilidades lógicas se $P \Leftrightarrow Q$. Portanto, pela definição 1.3, $P \Leftrightarrow Q$ e $P \equiv Q$ tem o mesmo significado, e portanto podemos trocar $\Leftrightarrow$ por $\equiv$ e vice-versa.

Teorema 1.2 *Sejam p e q duas proposições quaisquer. Então*

(a) Lei da Dupla Negação (D.N.): $\sim(\sim p) \equiv p$.

(b) Leis Comutativas (Com.): $p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \vee q \equiv q \vee p$,

(c) Leis de Idempotência (Idemp.): $p \wedge p \equiv p, \quad p \vee p \equiv p$,

(d) Lei Contrapositiva (Contrap.): $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$.

Demonstração. Deixaremos as demonstrações das partes (a), (b) e (c) para o leitor, como exercícios, e delinearemos a demonstração de (d).

Temos a seguinte tabela verdade simplificada para a proposição bicondicional $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$:

Tabela 1.9:

	$(p$	$\to$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim q$	$\to$	$\sim p)$
	V	V	V	V	F	V	V
	V	F	F	V	V	F	F
	F	V	V	V	F	V	V
	F	V	F	V	V	V	V
Passo	1	2	1	4	2	3	2

Logo, a Tabela 1.9 mostra que $p \leftrightarrow q$ é equivalente a $\sim q \to \sim p$.

O seguinte teorema, creditado a Augustus De Morgan (1806–1871), é uma das ferramentas mais convenientes da lógica.

Teorema 1.3 (Leis de De Morgan (De M.)) *Sejam p e q duas proposições quaisquer. Então*

$$\begin{aligned} \sim (p \wedge q) &\equiv \sim p \vee \sim q, \text{ e} \\ \sim (p \vee q) &\equiv \sim p \wedge \sim q. \end{aligned}$$

Demonstração. Demonstraremos a primeira parte deste teorema e deixaremos a outra parte ao leitor, como exercício. Construímos uma tabela verdade simplificada para a bicondicional $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$:

Tabela 1.10:

	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$
	F	V	V	V	V	F	F	F
	V	V	F	F	V	F	V	V
	V	F	F	V	V	V	V	F
	V	F	F	F	V	V	V	V
Passo	3	1	2	1	4	2	3	2

A tabela verdade acima mostra que $\sim (p \wedge q)$ é equivalente a $\sim p \vee \sim q$.

Teorema 1.4 *Sejam p, q e r proposições quaisquer. Então*

(a) Leis Associativas (Assoc.): $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

(b) Leis Distributivas (Dist.): $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(c) Lei Transitiva (Trans.): $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$.

Demonstração. Deixaremos as demonstrações das Leis Associativas e da segunda Lei Distributiva para o leitor, como exercícios.

Demonstremos que $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Como isto envolve três componentes, existem $2^3 = 8$ possibilidades lógicas a considerar. A seguinte tabela verdade mostra que $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ tem os mesmos valores verdade em cada uma das oito possibilidades lógicas. Portanto, $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ são equivalentes.

Tabela 1.11:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Por simplicidade e por economia de espaço, construímos uma tabela verdade simplificada, como apresentado na Tabela 1.8, para $(p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to r)$.

Tabela 1.12:

	$(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$r)$	$\to$	$(p$	$\to$	$r)$
	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
	V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
	F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
Passo	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

Como o último passo (passo 4) consiste inteiramente de valores V, a Lei Transitiva está demonstrada.

Por causa das Leis Associativas, os parênteses em $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ e

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ tornam-se desnecessários, e as expressões $p \wedge q \wedge r$ e $p \vee q \vee r$ tem agora significados definidos, bem como $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ e $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$.

Teorema 1.5 *Sejam p, q, r e s proposições quaisquer. Então*

(a) Dilemas Construtivos (D.C.):

$$(p \to q) \wedge (r \to s) \quad \Rightarrow \quad (p \vee r \to q \vee s),$$
$$(p \to q) \wedge (r \to s) \quad \Rightarrow \quad (p \wedge r \to q \wedge s).$$

(b) Dilemas Destrutivos (D.D.):

$$(p \to q) \wedge (r \to s) \quad \Rightarrow \quad (\sim q \vee \sim s \to \sim p \vee \sim r),$$
$$(p \to q) \wedge (r \to s) \quad \Rightarrow \quad (\sim q \wedge \sim s \to \sim p \wedge \sim r).$$

Demonstração. A demonstração do Teorema 1.5 é deixada ao leitor como exercício.

Teorema 1.6 *Sejam p e q duas proposições. Então*

(a) Modus Ponens *(M.P.): $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$.*
(b) Modus Tolens *(M.T.): $(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$.*
(c) Reductio ad Absurdum *(R.A.): $(p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \to q \wedge \sim q)$.*

Demonstração. Exercício.

1.3.1 Exercícios

1. Demonstre as partes (a) e (b) do Teorema 1.1.
2. Demonstre as partes (a), (b) e (c) do Teorema 1.2.
3. Demonstre que $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.
4. Demonstre a parte (a) do Teorema 1.4.
5. Demonstre que $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
6. Demonstre que $(p \to q) \Rightarrow (p \wedge r \to q \wedge r)$.
7. Demonstre que $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.
8. Usando as Leis de De Morgan, escreva em linguagem ordinária a negação da proposição "Esta função tem uma derivada ou eu sou burro."
9. Demonstre as seguintes Leis de De Morgan para três componentes.
(a) $\sim (p \wedge q \wedge r) \equiv \sim p \vee \sim q \vee \sim r$
(b) $\sim (p \vee q \vee r) \equiv \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$.
10. Pode você generalizar, sem demonstração, as Leis de De Morgan para n componentes? Veja o Problema 9 para $n = 3$.
11. Demonstre as seguintes *Leis de Absorção*.
(a) $p \wedge (p \vee r) \equiv p$
(b) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
12. Demonstre o Teorema 1.5.
13. Demonstre o Teorema 1.6.

1.4 Contradição

Em contraste com as tautologias, há proposições cujos valores verdade são todos F, para cada uma das possibilidades lógicas. Tais proposições são chamadas *contradições*. Por exemplo, $p \wedge \sim p$ é uma contradição.

É obvio que se t é uma tautologia, então $\sim t$ é uma contradição; reciprocamente, se c é uma contradição, então $\sim c$ é uma tautologia.

Teorema 1.7 *Sejam* t, c e p, *uma tautologia, uma contradição e uma proposição arbitrária, respectivamente. Então*

(a) $p \wedge t \Leftrightarrow p$,
$p \vee t \Leftrightarrow t$.
(b) $p \vee c \Leftrightarrow p$,
$p \wedge c \Leftrightarrow c$.
(c) $c \Rightarrow p$, e $p \Rightarrow t$.

Demonstração.

(a) A seguinte tabela verdade para $p \wedge t \leftrightarrow p$ mostra que $p \wedge t$ é equivalente a p.

Tabela 1.13:

	p	$\wedge$	t	$\leftrightarrow$	p
	V	V	V	V	V
	F	F	V	V	F
Passo	1	2	1	3	1

A outra equivalência, $p \vee t \Leftrightarrow t$, pode ser demonstrada analogamente.

(b) Da seguinte tabela verdade, concluímos que a proposição condicional $p \vee c \leftrightarrow p$ é uma tautologia, e portanto $p \vee c \Leftrightarrow p$.

Tabela 1.14:

	p	$\vee$	c	$\leftrightarrow$	p
	V	V	F	V	V
	F	F	F	V	F
Passo	1	2	1	3	1

A demonstração de $p \wedge c \Leftrightarrow p$ é similar.

(c) As tabelas verdade de $c \to p$ e $p \to t$ mostram que as duas proposições são tautologias, logo $c \Rightarrow p$ e $p \Rightarrow t$.

Tabela 1.15:

c	$\to$	p
F	V	V
F	V	F

p	$\to$	t
V	V	V
F	V	V

No restante deste livro, *o símbolo c, com ou sem índice, denotará uma contradição; e o símbolo t, com ou sem índice, denotará uma tautologia.*

1.4.1 Exercícios

1. Demonstre que $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \wedge c \Leftrightarrow c$.
2. Demonstre que $\sim t \Leftrightarrow c$ e $\sim c \Leftrightarrow t$.
3. Demonstre a seguinte *Reductio ad Absurdum*.

$$(p \wedge \sim q \to c) \Leftrightarrow (p \to q)$$

4. Demonstre que $p \wedge (p \to q) \wedge (p \to \sim q) \Leftrightarrow c$.
5. Demonstre que $(p \to q) \Rightarrow (p \vee r \to q \vee r)$, para qualquer proposição r.

1.5 Raciocínio dedutivo

As 17 leis sumarizadas nos Teoremas de 1.1 a 1.6 são ferramentas muito úteis para justificar equivalências lógicas e implicações, como ilustrado nos Exemplos de 1.5 a 1.7. Chamaremos estas 17 leis de *regras de inferência*. Chamamos a atenção para o fato de que estas regras foram selecionadas como referências convenientes e não precisam ser independentes entre si. Por exemplo, a Lei Contrapositiva pode ser estabelecida "dedutivamente" pelo uso de outras leis e de definições relevantes, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 1.5 *Demonstre a Lei Contrapositiva, $(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$, usando definições relevantes e outras regras de inferência.*

Solução.

$$\begin{aligned}
(p \to q) &\equiv \sim (p \wedge \sim q) && \textit{Def. 1.4} \\
&\equiv \sim (\sim q \wedge p) && \textit{Com.} \\
&\equiv \sim [\sim q \wedge \sim (\sim p)] && \textit{D.N.} \\
&\equiv (\sim q \to \sim p) && \textit{Def. 1.4}
\end{aligned}$$

Portanto, $(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$, *pela Lei Transitiva.*

O método de demonstração usado no Exemplo 1.5 é chamado *raciocínio dedutivo*[4] ou *método dedutivo*, e difere do método de demonstração por tabelas verdade.

Em geral, no raciocínio dedutivo, quaisquer axiomas, definições, teoremas e regras de inferência, previamente enunciados, podem ser usados.

Exemplo 1.6 *Prove o Silogismo Disjuntivo por raciocínio dedutivo.*

Solução.

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge \sim p &\equiv \sim p \wedge (p \vee q) && \textit{Com.}\\
&\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) && \textit{Dist.}\\
&\equiv c \vee (\sim p \wedge q) && \sim p \wedge p \equiv c\\
&\equiv (\sim p \wedge q) \vee c && \textit{Com.}\\
&\equiv \sim p \wedge q && \textit{Teorema 1.7(b)}\\
&\Rightarrow q && \textit{Simp.}
\end{aligned}$$

Finalmente, pela Lei Transitiva, $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$.

Exemplo 1.7 *Demonstre a seguinte* Lei de Exportação*:*

$$(p \wedge q \to r) \equiv [p \to (q \to r)]$$

por raciocínio dedutivo.

Solução.

$$\begin{aligned}
p \to (q \to r) &\equiv [p \to \sim (q \wedge \sim r) && \textit{Definição 1.4}\\
&\equiv \sim [p \wedge (q \wedge \sim r)] && \textit{Def. 1.4, D.N.}\\
&\equiv \sim [(p \wedge q) \wedge \sim r] && \textit{Assoc.}\\
&\equiv (p \wedge q \to r) && \textit{Definição 1.4}
\end{aligned}$$

Portanto, $(p \wedge q) \to r \equiv [p \to (q \to r)]$.

Exemplo 1.8 *Demonstre que* $(p \to r) \vee (q \to s) \equiv (p \wedge q \to r \vee s)$ *por raciocício dedutivo.*

Solução.

$$\begin{aligned}
(p \to r) \vee (q \to s) &\equiv \sim (p \wedge \sim r) \vee \sim (q \wedge \sim s) && \textit{Definição 1.4}\\
&\equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s) && \textit{De M., D.N.}\\
&\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s) && \textit{Com., Assoc.}\\
&\equiv \sim [(p \wedge q) \wedge \sim (r \vee s)] && \textit{De M., D.N.}\\
&\equiv (p \wedge q \to r \vee s) && \textit{Definição 1.4}
\end{aligned}$$

[4] ou *argumentação dedutiva* (N. do T.)

O porquê de querermos usar raciocício dedutivo, em oposição a tabelas verdade, pode ser visto da seguinte comparação: Para verificar a equivalência no Exemplo 1.8, pelo método das tabelas verdade, teríamos que construir uma grande tabela verdade com $16\,(=2^4)$ casos (veja Problema 20 dos Exercícios 1.1.1 ou Problema 12 dos Exercícios 1.3.1); por outro lado, na solução do Exemplo 1.8, acima, estabelecemos tal equivalência em apenas cinco passos.

1.5.1 Exercícios

Demonstre as seguintes tautologias pelo método dedutivo.

1. Modus Ponens: $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$
2. Modus Tollens: $\sim q \wedge (p \to q) \Rightarrow \sim p$
3. Reductio ad Absurdum: $(p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \to c)$
4. Silogismo Disjuntivo: $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$
5. Teorema 1.7(c): $c \Rightarrow p$
6. $(p \to q) \Leftrightarrow (p \to p \wedge q)$
7. $(p \to q) \Leftrightarrow (p \vee q \to q)$
8. $(p \to q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$
9. $(p \to r) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow (p \vee q \to r)$
10. $(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow (p \to q \wedge r)$
11. $(p \to q) \wedge (p \to \sim q) \Leftrightarrow \sim p$
12. $(p \to q) \vee (p \to r) \Leftrightarrow (p \to q \vee r)$
13. $(p \to r) \vee (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q \to r)$

1.6 Regras de quantificação

Em qualquer discussão geral, temos em mente um *universo* particular ou *domínio do discurso*, isto é, uma coleção de objetos cujas propriedades estão sob consideração. Por exemplo, na afirmação "Todos os humanos são mortais", o universo é a coleção de todos os humanos. Com este entendimento do universo, a afirmação "Todos os humanos são mortais" poder ser expressada alternativamente como:

Para todo x no universo, x é mortal.

A frase "Para todo x no universo" é chamada um *quantificador universal*, e é simbolizada por $(\forall x)$. A sentença "x é mortal" diz algo sobre x; simbolizaremos isto por $p(x)$. Usando estes novos símbolos, podemos agora escrever a afirmação geral "Todos os homens são mortais" como

$$(\forall x)(p(x))$$

Agora considere a afirmação "Alguns homens são mortais". Aqui o universo (ou domínio de discurso) é ainda o mesmo da afirmação prévia. Com este universo em mente, podemos refazer a afirmação "Alguns homens são mortais" sucessivamente como:

Existe pelo menos um indivíduo que é mortal.
Existe pelo menos um x tal que x é mortal.

e como

Existe pelo menos um x tal que $p(x)$.

A frase "Existe ao menos um x tal que" é chamada um *quantificador existencial* e é simbolizada por $(\exists x)$. Usando este novo símbolo podemos agora reescrever a afirmação "Alguns homens são mortais" como

$$(\exists x)(p(x))$$

De um modo geral, suponhamos que temos um domínio de discurso U e uma afirmação geral, $p(x)$, chamada um *predicado proposicional*, cuja "variável" x varia em U. Então $(\forall x)(p(x))$ afirma que para todo x, em U, a proposição $p(x)$, a respeito de x, é verdadeira, e $(\exists x)(p(x))$ significa que existe pelo menos um x, em U, tal que $p(x)$ é verdadeira.

Em matemática elementar, quantificadores são freqüentemente suprimidos pelo bem da simplicidade. Por exemplo, "$(x+1)(x-1) = x^2-1$", em livros do ensino básico, deve ser entendido como dizendo "para todo número real x, $(x+1)(x-1) = x^2-1$". Na matemática, "qualquer que seja" e "para todo" significam a mesma coisa e são ambos simbolizados por $\forall$; e "para algum" significa o mesmo que "existe" e é simbolizado por $\exists$. Em expressões menos formais, freqüentemente colocamos o quantificador após a afirmação. Por exemplo, a afirmação "$f(x) = 0$ para todo x" é a mesma que "$(\forall x)(f(x) = 0)$".

Na lógica e na matemática, a negação da proposição "$p(x)$ é verdadeira para todo x (em U)", $\sim [(\forall x)(p(x))]$, é considerada o mesmo que a asserção "existe pelo menos um x (em U) para o qual $p(x)$ é falsa", $(\exists x)(\sim p(x))$. Analogamente, $\sim [(\exists x)(p(x))]$ é considerada o mesmo que "não há nenhum[5] x (em U) tal que $p(x)$ é verdadeira"; ou, em outras palavras, "$p(x)$ é falsa para todo x (em U)", ou $(\forall x)(\sim p(x))$. Sumarizamos tudo isto no seguinte axioma:

Axioma 1.1 (Regra da Negação do Quantificador (N.Q.)) *Seja $p(x)$ um predicado proposicional, isto é, uma proposição sobre um objeto não especificado de um dado universo. Então*

$$\sim [(\forall x)(p(x))] \equiv (\exists x)(\sim p(x))$$

e

$$\sim [(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

---

[5] Na língua portuguesa, "não há nenhum" tem o significado de "existe nenhum" (N. do T.).

Estamos usando "$\equiv$" para denotar que as duas proposições quantificadas, nos dois lados de $\equiv$, são consideradas a mesma em lógica; este uso é consistente com o uso de $\equiv$ para equivalências lógicas, como será visto no próximo parágrafo.

Para entender melhor as proposições quantificadas $(\forall x)(p(x))$ e $(\exists x)(p(x))$, inspecionemos o caso em que o universo de discurso consiste de um número finito de indivíduos denotados por $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Então, como $(\forall x)(p(x))$ afirma que $p(x)$ é verdadeira para todos, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, a proposição $(\forall x)(p(x))$ é verdadeira se e somente se a conjunção de

$$p(a_1), p(a_2), p(a_3), \dots, p(a_n)$$

é verdadeira. Conseqüentemente,

$$(\forall x)(p(x)) \text{ corresponde a } p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$$

Analogamente,

$$(\exists x)(p(x)) \text{ significa } p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)$$

Portanto, a Regra da Negação do Quantificador pode ser vista com uma generalização das Leis de De Morgan (Teorema 1.3).

Exemplo 1.9 *Quais das seguintes proposições é equivalente à negação da proposição "Todas as cobras são venenosas"?*

(a) Todas as cobras são não venenosas.
(b) Algumas cobras são venenosas.
(c) Algumas cobras não são venenosas.

Solução. *O domínio de discurso U é a coleção de todas as cobras. Seja $p(x)$ o predicado proposicional que afirma que x é venenosa (onde a variável x varia sobre U). A afirmação "Todas as cobras são venenosas" é então traduzida em $(\forall x)(p(x))$. Conforme a regra de negação do quantificador, Axioma 1.1, $\sim [(\forall x)(p(x))]$ é equivalente a $(\exists x)(\sim p(x))$, que representa "Algumas cobras não são venenosas".*

1.6.1 Exercícios

1. Traduza a proposição da álgebra elementar "A equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ tem soluções" em linguagem lógica, usando um quantificador. Qual é o domínio de discurso aqui?
2. Encontre a proposição equivalente à negação de cada uma das seguintes proposições, usando N.Q.
(a) Todas as cobras são répteis.
(b) Alguns cavalos são mansos.
(c) Alguns matemáticos não são sociáveis.
(d) Todas as estudantes são ou inteligentes ou atraentes.
(e) Não há bebê que não seja fofo.

3. Encontre o domínio de discurso de cada uma das proposições do Problema 2.
4. Deduza

$$\sim [(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

a partir de

$$\sim [(\forall x)(q(x))] \equiv (\exists x)(\sim q(x)).$$

5. Deduza

$$\sim [(\forall x)(p(x))] \equiv (\exists x)(\sim p(x))$$

a partir de

$$\sim [(\exists x)(q(x))] \equiv (\forall x)(\sim q(x)).$$

6. Demonstre que $\sim [(\forall x)(\sim q(x))] \equiv (\exists x)(q(x))$ e $\sim [(\exists x)(\sim q(x))] \equiv (\forall x)(q(x))$. [Sugestão: Use N.Q.]

1.7 Demonstração de validade

Uma das mais importantes tarefas de um lógico está em testar *argumentos*. Um argumento é a asserção de que uma proposição, chamada a *conclusão*, é conseqüência de outras proposições, chamadas *hipóteses* ou *premissas*. Um argumento é considerado *válido* se a conjunção das hipóteses implica a conclusão. Como exemplo, o seguinte é um argumento no qual as primeiras quatro proposições são hipóteses, e a última proposição é a conclusão.

Se ele estuda medicina, então prepara-se para ganhar uma boa renda.
Se ele estuda artes, então prepara-se para viver bem.
Se ele prepara-se para ganhar uma boa renda ou para viver bem, então suas despesas de estudos não são desperdiçadas.
Suas despesas de estudos são desperdiçadas.
Portanto, ele não estuda nem medicina e nem artes.

Este argumento pode ser simbolizado como:

H1.	$M \to R$
H2.	$A \to B$
H3.	$(R \vee B) \to \sim D$
H4.	D
C.	$\therefore\ \sim M \wedge \sim A$

Para estabelecer a validade deste argumento por meio de uma tabela verdade, precisaríamos de uma tabela com $32\,(= 2^5)$ linhas. Mas podemos demonstrar que este argumento é válido deduzindo a conclusão a partir das hipóteses em poucos passos usando as regras de inferência.

Das hipóteses H3 e H4, $(R \vee B) \to \sim D$ e D, inferimos $\sim (R \vee B)$, ou equivalentemente, $\sim R \wedge \sim B$, por Modus Tollens e Lei de De Morgan. De $\sim R \wedge \sim B$, inferimos, de maneira válida, $\sim R$ (e também $\sim B$), pelas Leis de Simplificação. De H1, $M \to R$; com $\sim R$ inferimos $\sim M$.

Analogamente, $A \rightarrow B$ (de H2), e $\sim B$, nos faz inferir $\sim A$. Finalmente a conjunção de $\sim M$ e $\sim A$ nos dá a conclusão $\sim M \wedge \sim A$. Nesta demonstração, as regras de inferência Modus Tollens (M.T.), Leis de De Morgan (D.M.), e Leis de Simplificação (Simp.) são usadas.

Um modo mais formal e conciso de expressar esta demonstração de validade, é listar as hipóteses e as proposições deduzidas a partir delas em uma coluna, com a justificação de cada passo numa coluna ao lado. Em cada passo, a "justificação" indica as afirmações precedentes das quais, e as regras de inferência pelas quais, a afirmação dada naquele passo foi obtida. Para fácil inferência, é conveniente enumerar as hipóteses e as afirmações deduzidas a partir delas e colocar a conclusão à direita da última premissa, separada desta por uma barra / que indica que todas as proposições acima são hipóteses. A demonstração de validade formal para o argumento acima pode então ser escrita como

1.	$M \rightarrow R$	(Hip.)
2.	$A \rightarrow B$	(Hip.)
3.	$(R \vee B) \rightarrow \sim D$	(Hip.)
4.	$D / \therefore \ \sim M \wedge \sim A$	(Hip./ Concl.)
5.	$\sim (R \vee B)$	3, 4, M.T.
6.	$\sim R \wedge \sim B$	5, De M.
7.	$\sim R$	6, Simp.
8.	$\sim B$	6, Simp.
9.	$\sim M$	1, 7, M.T.
10.	$\sim A$	2, 8, M.T.
11.	$\sim M \wedge \sim A$	9, 10, Conj.

Uma *demonstração formal de validade* para um dado argumento é uma seqüência de proposições, cada uma das quais é ou uma premissa do argumento ou segue de proposições precedentes por um argumento válido conhecido, terminando com a conclusão do argumento.

Exemplo 1.10 *Construir uma demonstração formal de validade para o seguinte argumento, usando os símbolos sugeridos:*

Wilson será eleito presidente do Centro Acadêmico ou ambos, Hélio e Lúcio serão eleitos vice-presidentes do Centro Acadêmico. Se Wilson for eleito presidente ou Hélio for eleito vice, então David encaminhará um protesto. Portanto, ou Wilson será eleito presidente do Centro Acadêmico ou David encaminhará um protesto. (W, H, L, D).

Demonstração.

1.	$W \vee (H \wedge L)$	
2.	$W \vee H \rightarrow D / \therefore \ W \vee D$	
3.	$(W \vee H) \wedge (W \vee L)$	*1, Dist.*
4.	$W \vee H$	*(Hip./ Concl.)*
5.	D	*2, 4, M.P.*
6.	$D \vee W$	*5, Ad.*
7.	$W \vee D$	*6, Com.*

Existe um outro método de demonstração chamado demonstração indireta, ou método de demonstração por redução ao absurdo. Uma demonstração indireta de validade, para um dado argumento, é feita incluindo-se, como premissa adicional, a negação de sua conclusão, e então derivando uma contradição; assim que uma contradição é obtida, a demonstração está completa.

Exemplo 1.11 *Dê uma demonstração indireta de validade para o seguinte argumento:*

$$p \vee q \to r$$
$$s \to p \wedge u$$
$$q \vee s \,/\therefore\; r$$

Demonstração.

1.	$p \vee q \to r$	
2.	$s \to p \wedge u$	
3.	$q \vee s \,/\therefore\; r$	
4.	$\sim r$	*P.I. (Demonstração Indireta)*
5.	$\sim (p \vee q)$	*1, 4, M.T.*
6.	$\sim p \wedge \sim q$	*5, De M.*
7.	$\sim p$	*6, Simp.*
8.	$\sim q$	*6, Simp.*
9.	s	*3, 8, S.D.*
10.	$p \wedge u$	*2, 9, M.P.*
11.	p	*10, Simp.*
12.	$p \wedge \sim p$	*7, 11, Conj.*

A proposição $p \wedge \sim p$, no passo 12, é uma contradição; portanto a demonstração indireta de validade está completa.

Em contraste a uma "demonstração indireta", a demonstração formal de validade introduzida anteriormente pode ser chamada "demonstração direta". Numa demonstração matemática, pode ser usada uma demonstração direta ou uma demonstração indireta. A escolha do método de demonstração, para um argumento matemático dado, depende da preferência e da conveniência.

1.7.1 Exercícios

Para cada um dos seguintes argumentos, dê uma demonstração direta e uma demonstração indireta de validade, e compare seus tamanhos.

1. $A \vee (B \wedge C)$
$B \to D$
$C \to E$
$D \wedge E \to A \vee C$
$\sim A \,/\, \therefore\ C$

2. $B \vee (C \to E)$
$B \to D$
$\sim D \to (E \to A)$
$\sim D \,/\, \therefore\ C \to A$

3. $(A \vee B) \to (A \to D \wedge E)$
$A \wedge D \,/\, \therefore\ E \vee F$

4. $A \vee B$
$\sim B \vee C \,/\, \therefore\ A \vee C$

5. $B \vee C \to B \wedge A$
$\sim B \,/\, \therefore\ \sim C$

6. $A \wedge B \to C$
$(A \to C) \to D$
$\sim B \vee E \,/\, \therefore\ B \to D \wedge E$

Nas demonstrações dos seguintes argumentos, use os símbolos sugeridos.

7. Se a população cresce rapidamente e a produção permanece constante, então os preços sobem. Se os preços sobem, então o governo controla os preços. Se sou rico, então não me preocupo com o aumento dos preços. Não é verdade que não sou rico. O governo não controla os preços ou preocupo-me com o aumento dos preços. Portanto, não é verdade que a população cresce rapidamente e a produção permanece constante (P: A população cresce rapidamente. C: A produção permanece constante. S: Os preços sobem. G: O governo controla os preços. R: Eu sou rico. A: Eu me preocupo com o aumento dos preços.)

8. Se Wilson ou Alberto ganham então Lúcio e Susana choram. Susana não está chorando. Portanto, Alberto não ganhou. (W: Wilson ganha. A: Alberto ganha. L: Lúcio chora. S: Susana chora.)

9. Se eu me inscrevo neste curso e estudo bastante então tiro boas notas. Se tiro boas notas, fico feliz. Não estou feliz. Portanto, não me inscrevi neste curso ou não estudei bastante. (I: Me inscrevo neste curso. E: Estudo bastante. B: Tiro boas notas. F: Estou feliz.)

1.8 Indução Matemática

Um outro método de demonstração, muito útil para demonstrar a validade de uma proposição $P(n)$, envolvendo o número natural n, é o seguinte princípio de *indução matemática*.

Indução Matemática. *Se $P(n)$ é uma proposição envolvendo o número natural n, tal que*
(1) $P(1)$ é verdadeira, e
(2) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para qualquer número natural arbitrário k,
então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

O princípio acima é uma conseqüência de um dos Axiomas de Peano para os números naturais.

De modo a aplicarmos o princípio de indução matemática para demonstrarmos um teorema, o teorema tem que ser subdividido em casos, uma caso para cada número natural. Assim, devemos verificar ambas as condições (1) e (2). A verificação de (1), habitualmente fácil, nos garante que o teorema é verdadeiro pelo menos no caso $n = 1$. Para verificar a condição (2), devemos provar um teorema auxiliar cuja premissa (hipótese) é "$P(k)$ é verdadeira", e cuja conclusão (tese) é "$P(k+1)$ é verdadeira". A premissa "$P(k)$ é verdadeira" é chamada a *hipótese de indução*.

Exemplo 1.12 *Demonstre, por indução matemática, que*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstração. *Aqui $P(n)$ representa a proposição*

$$\text{“}1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\text{”}$$

Em particular, $P(1)$ representa "$1 = (1 \cdot 2)/2$", que obviamente é uma afirmação verdadeira. Portanto, a condição (1) para a indução matemática está satisfeita.

Para demonstrar que a condição (2) é satisfeita, assumimos que "$P(k)$", que é "$1 + 2 + 3 + \cdots + k = k(k+1)/2$", seja verdadeira. Então, somamos $k+1$ a ambos os membros da igualdade. Temos portanto

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

o que mostra que $P(k+1)$ é verdadeira. Mostramos assim que as condições (1) e (2) da indução matemática são satisfeitas. Portanto, pelo princípio de indução matemática, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$ é verdadeira para cada número natural n.

A idéia de indução matemática pode ser usada para fazer definições matemáticas envolvendo números naturais. Por exemplo, a definição de *potências* de um número real qualquer x podem ser definidas por:

$$\begin{aligned} x^1 &= x \\ x^{n+1} &= x^n \cdot x, \ \text{para cada número natural } n \end{aligned}$$

As duas equações acima indicam que $x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, $\ldots$ e assim por diante. Como outra aplicação, daremos a seguinte definição indutiva do símbolo $C(n, r)$.

Definição 1.7 *Sejam n um número natural e r um inteiro. O símbolo $C(n, r)$ é definido por*

$$C(0,0) = 1, \qquad C(0,r) = 0 \quad \textit{para cada } r \neq 0, \textit{ e}$$

$$C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1)$$

Teorema 1.8 *Se n e r são inteiros, tais que $0 \leqslant r \leqslant n$, então*

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

sendo $n!$ o produto $n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, dos primeiros n números naturais consecutivos, se $n > 0$ e $0! = 1$ por convenção.

Demonstração. *Exercício.*

Teorema 1.9 (O Teorema Binomial) *Se x e y são dois números reais e n é um número natural, então*

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + \cdots + C(n,r)x^{n-r}y^r + \cdots + C(n,n)y^n$$

Demonstração. Demonstraremos a validade deste teorema por indução matemática. Primeiramente, o teorema é claramente verdadeiro para $n = 1$. Para completar a demonstração, assumiremos a validade do teorema para $n = k$; isto é, assumiremos que

$$(x+y)^k = C(k,0)x^k + C(k,1)x^{k-1}y + \cdots + C(k,r)x^{k-r}y^r + \cdots + C(k,k)y^k$$

Então, multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $(x + y)$, temos

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)[x^k + C(k,1)x^{k-1}y + \cdots + C(k,r)x^{k-r}y^r + \cdots + y^k] \\
&= x^{k+1} + [C(k,0) + C(k,1)]x^k y + \cdots \\
&\qquad + [C(k,r-1) + C(k,r)]x^{(k+1)-r}y^r + \cdots + y^{k+1} \\
&= C(k+1,0)x^{k+1} + C(k+1,1)x^k y + \cdots \\
&\qquad + C(k+1,r)x^{k+1-r}y^r + \cdots + C(k+1,k+1)y^{k+1}
\end{aligned}$$

que mostra que o teorema é válido para $n = k + 1$ se for válido para $n = k$.

Assim, por indução matemática, o teorema binomial é verdadeiro para todos os números naturais n.

1.8.1 Exercícios

1. Demonstre o teorema 1.8 por indução matemática.
2. Mostre que $C(n, 0) = 1 = C(n, n)$ para todo número natural n.
3. Demonstre por indução matemática que, para todo número natural n,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + r \cdot (r+1) + \cdots + n \cdot (n+1) = \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

4. Demonstre por indução matemática que, para todo número natural n,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

5. Demonstre que para todo número natural n,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

6. Demonstre que para todo número natural n, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.
7. Demonstre que para todo número natural n,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

8. Demonstre as seguintes Leis de De Morgan Generalizadas,
   (a) $\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Leftrightarrow \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \cdots \vee \sim p_n$
   (b) $\sim (p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Leftrightarrow \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \cdots \wedge \sim p_n$
9. Demonstre as seguintes Leis Distributivas Generalizadas.
   (a) $p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \cdots \vee (p \wedge q_n)$
   (b) $p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_n) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \cdots \wedge (p \vee q_n)$