Tópicos de História da Matemática

através de problemas

João C.V. Sampaio

Universidade Federal de São Carlos

Departamento de Matemática

São Carlos, 2025

Sumário

1 Aritmética e geometria do Egito antigo **3**

1.1 A aritmética básica dos egípcios . . . 3
1.2 Aritmética das frações no Egito antigo . . . 6
1.3 Problemas de partilha e o algoritmo de Fibonacci . . . 7
1.4 Bits de geometria no Egito antigo . . . 9
1.5 Equações do primeiro grau no papiro Rhind . . . 11

2 Eventos da história da aritmética babilônica antiga **13**

2.1 O sistema de numeração babilônico . . . 13
2.2 Investigações da aritmética babilônica . . . 15
2.3 Raízes quadradas na aritmética babilônica . . . 17
2.4 A surpreendente eficiência do método babilônico . . . 18
2.5 Ternos pitagóricos na matemática babilônica . . . 18

3 Miscelânia de eventos da história da geometria **23**

3.1 A aurora da matemática dedutiva . . . 23
3.2 Explorando a estrela de Pitágoras . . . 24
3.2.1 Recortes de estrelas pitagóricas, uma atividade experimental para todos os níveis . . . 25
3.3 Apreciando Euclides, *Os Elementos*, Livro XIII, Proposição 10 . . . 27
3.4 Construindo decágono e pentágono regulares, incritos na circunferência . . . 27
3.5 Incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado . . . 28
3.5.1 O "Teorema de Tales" . . . 29
3.6 Eratóstenes de Cirene, Aristarco de Samos e Hipócrates de Quios . . . 30

4 Miscelânia adicional de eventos da história da geometria **33**

4.1 Trigonometria das cordas, de Hiparco e Ptolomeu . . . 33
4.2 Momentos da história das construções geométricas não euclidianas . . . 35
4.3 Descartes e a algebrização dos problemas de construções geométricas . . . 39
4.4 Construções geométricas impossíveis são reveladas . . . 40

5 Eventos da história das equações polinomiais **43**

5.1 Equações do segundo grau, dos babilônios a al-Khwarizmi . . . 43
5.2 Bháskara e poesia nas equações do segundo grau . . . 46
5.3 Equações do terceiro grau com Arquimedes e Omar Khayyam . . . 46

5.4 Os italianos propõem "fórmulas" para equações do terceiro grau 47
5.5 Deduzindo a fórmula de Cardano 48
5.6 Euler e Descartes nos ensinam a buscar raízes racionais 49
5.7 O método trigonométrico de François Viète 50
5.8 Natureza das raízes da cúbica conforme o sinal do discriminante 51
5.9 Equações do quarto grau. Um discípulo ensina seu mestre 52

Apresentação

Este livro nasceu como material de apoio a um curso de História da Matemática nos mestrados profissionais em Matemática, PROFMAT e PPGECE, da UFSCar. Seu propósito, porém, vai além: mostrar que a história da matemática não é apenas um repositório de fatos, nomes e datas, mas um terreno fértil para a resolução de problemas que continuam a instigar o pensamento até hoje.

A seleção de problemas reflete escolhas pessoais do autor, feitas a partir de leituras da literatura consagrada sobre o tema, em parte citada nas referências. Não se trata, portanto, de substituir as obras já existentes, mas de oferecer um caminho diferente: vivenciar a história por meio da resolução de problemas. Muitos desses desafios já foram trabalhados em aulas de Licenciatura em Matemática e de mestrado profissional, e mostraram-se eficazes para despertar a curiosidade e estimular a reflexão.

O texto não segue rigidamente a cronologia dos acontecimentos. Ao contrário, busca permitir que o leitor explore os problemas com os recursos de sua própria formação, sem impor métodos de resolução. Assim, cada questão é um convite a pensar, recriar e, sobretudo, experimentar a matemática de outras épocas com os olhos de hoje.

É natural que o leitor encontre lacunas, temas ausentes ou trechos ainda inacabados. O foco principal na escolha de temas e problemas é a matemática do ensino básico. Este é um projeto em construção, aberto a revisões e ampliações. O autor agradece sugestões, críticas e apontamentos, que podem ser enviados ao e-mail `sampaio@ufscar.br`.

Que estas páginas sejam, acima de tudo, um convite: apreciar a matemática como criação cultural, fruto da imaginação e da engenhosidade humanas, e redescobrir no passado problemas que ainda têm o poder de nos ensinar e encantar.

1

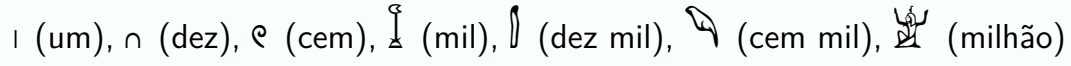
Aritmética e geometria do Egito antigo

Neste capítulo exploramos a aritmética e a geometria desenvolvidas no Egito Antigo, principalmente por volta do século XVI a.C., por meio de uma seleção de temas e problemas escolhidos para revelar ao leitor a beleza dessa tradição matemática. Os registros que chegaram até nós são escassos e encontram-se preservados em raros papiros, dos quais se destacam o Papiro Ahmes (ou Papiro Rhind) e o Papiro de Moscou, que constituem as principais fontes utilizadas na escolha dos problemas aqui apresentados.

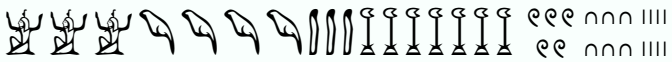
1.1 A aritmética básica dos egípcios

Primeiros bits de História

Os antigos egípcios, do segundo milênio a.C., usavam um sistema de numeração de base dez, porém não posicional, mas simplesmente aditivo. Adiante isto é explicado melhor. Os numerais egípcios para representar números naturais, em escrita hieroglífica, eram os seguintes.

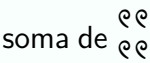


No sistema aditivo egípcio, para escrever o número 3 437 568, usando hieróglifos, os egípcios escreviam:



A escrita hieroglífica era usada para inscrições em murais.
Nos papiros egípcios, ao menos nos papiros conhecidos que tratam de matemática, era empregada uma escrita diferente, uma escrita cursiva, chamada escrita hierática.

Repare que é bem simples fazer adições no sistema egípcio. No processo de adição, 10 números são trocados por , 10 números são trocados por , e 10 são trocados por , e assim por diante.

Por exemplo, ao realizarmos a soma de  e  o resultado será 

O Papiro Rhind ou Papiro Ahmes

O Papiro Rhind é um dos mais importantes registros da matemática egípcia antiga. Copiado por um escriba chamado Ahmes, em torno de 1650 a.C., contém algoritmos para resolver problemas de aritmética envolvendo frações, multiplicações, divisões, bem como problemas de geometria elementar e de matemática recreativa. O método de multiplicação por duplicações sucessivas, que veremos a seguir, é notavelmente eficiente e lembra, em essência, o funcionamento do sistema binário usado pelos computadores modernos.

Multiplicação egípcia por duplicações

Para calcular 13×70, o Papiro Rhind (~1650 a.C.), ou Papiro Ahmes, nos ensina um algoritmo que faz uso apenas de multiplicações por 2. O algoritmo consiste em montar duas colunas, uma encabeçada pelo número 1, e a outra encabeçada pelo número 70, o *multiplicando*. Os números iniciais são dobrados e seus dobros são colocados abaixo dos números iniciais.

✓	1	70
	2	140
✓	4	280
✓	8	560
		910

Acompanhe esta explicação observando o exemplo no destaque acima. Prosseguimos dobrando cada resultado subsequente, mas somente enquanto os múltiplos da unidade não ultrapassem 13 (o *multiplicador*). Demarcamos com uma marca de seleção ✓ as linhas dos múltiplos da unidade que tenham soma igual a 13, e finalmente somamos os múltiplos de 70 das linhas demarcadas. Veja o exemplo no destaque. Isto nos dará $13 \times 70 = 70 + 280 + 560 = 910$.
O algoritmo egípcio é eficaz neste exemplo pois $13 = 1 + 4 + 8$, e então

$$13 \times 70 = (1 + 4 + 8) \times 70 = 1 \times 70 + 4 \times 70 + 8 \times 70 = 70 + 280 + 560.$$

1. Calcule 23×68 (sendo 23 o multiplicador) e depois 68×23 (sendo 68 o multiplicador) à maneira egípcia. Qual das duas multiplicações você achou mais simples. Por quê?

Multiplicação camponesa russa

O método conhecido como *multiplicação camponesa russa*, apresentado por David Burton em *The History of Mathematics*, é uma variação engenhosa do método egípcio de multiplicação, também chamado de método da *duplicação* e *divisão por dois* (ou, em termos antigos, de *duplação* e *mediação*).

70	13	✓
140	6	
280	3	✓
560	1	✓
910		

Multiplicação camponesa russa (continuação)

No exemplo no destaque do último quadro da página anterior, calculamos novamente 13×70. Em geral, o método consiste em montar duas colunas, a primeira encabeçada pelo multiplicando e a segunda pelo multiplicador. As entradas da primeira coluna são sucessivamente dobradas, enquanto as correspondentes da segunda coluna são sucessivamente divididas por 2 (subtraindo-se 1 primeiramente, se o número for ímpar).

Finalmente, as entradas na primeira coluna, ao lado de entradas ímpares da segunda coluna (as demarcadas), são somadas. *Grosso modo*, o método funciona porque as entradas ímpares na segunda coluna correspondem a 1's na expressão em base 2 do multiplicador.

2. (a) Calcule 23×68 e depois 68×23, pelo método camponês russo.

   (b) Explique por que o método funciona.

Divisão euclidiana (com quociente e resto)

No exemplo destacado, fazemos a divisão euclidiana (com obtenção de quociente e resto) de 184 por 17, à maneira egípcia.

O algoritmo de duplicações sucessivas é o mesmo empregado na multiplicação egípcia. Mas agora o foco é selecionar os múltiplos de 17 que tem soma maior possível, porém menor que ou igual a 184. Temos $34 + 136 = 170$ é a soma procurada, correspondendo aos múltiplos 2 e 8 da unidade. Acompanhe pelo diagrama ao lado.

17	1	
34	2	✓
68	4	
136	8	✓
174	10	

Como 34 e 136 foram selecionados? Iniciando com 17 (o divisor) e o número 1, e aplicando duplicações sucessivas, um egípcio terminaria o algoritmo de duplicações sucessivas em 136 porque seu dobro, 272, é maior que 184.
Em seguida, calcularia $184 - 136$, obtendo 48. Por inspeção, verificaria que o maior número, na coluna à esquerda, que "cabe" em 48, é 34.

Prosseguindo, calcularia $48 - 34 = 14$. Como 14 é menor que 17, o algoritmo termina. Tendo marcado as linhas dos múltiplos de 17 escolhidos, 136 e 34, a soma dos múltiplos da unidade correspondentes é $2 + 8 = 10$, o quociente da divisão, deixando resto 14, isto é, $184 = 170 + 14 = 17 \cdot 10 + 14$.

A questão que os egípcios respondiam, com esse algoritmo, é: *Quantas vezes* 17 *cabe em* 184 *?* Daí o procedimento de considerar múltiplos de 17 e subtraí-los de 184.
No próximo capítulo, veremos divisões "exatas" à moda egípcia, que fazem uso de frações unitárias, ou seja, frações da forma $1/n$, com $n \geq 2$ inteiro.

3. Faça as divisões euclidianas $226 \div 23$ e $238 \div 19$, à maneira egípcia.

1.2 Aritmética das frações no Egito antigo

Representação hieroglífica de frações

Uma outra novidade aritmética que o Papiro Rhind nos traz é que, exceto pela fração $2/3$, os egípcios representavam frações próprias como justaposições (dispostas lado a lado, significando soma) de frações unitárias distintas.

Frações unitárias são frações da forma $\frac{1}{n}$, com $n \geq 2$.

Por exemplo, egípcios não tinham uma representação da fração $\frac{4}{5}$.

Uma representação de $\frac{4}{5}$ teria que ser como soma de frações unitárias distintas, tal como

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

As representações de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, e $\frac{1}{10}$ em escrita hieroglífica, eram, respectivamente,

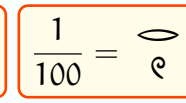


Podemos ver que o símbolo (um olho), colocado sobre um inteiro, representava uma fração unitária tendo esse inteiro como denominador.

A fração $\frac{4}{5}$ era então representada na forma 

É como se nós escrevêssemos $\frac{4}{5} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{10}$, justapondo lado a lado as frações cuja soma é $\frac{4}{5}$.

Nos dias de hoje, ainda é notação habitual escrevermos, por exemplo, $3\frac{4}{5}$ (fração mista) com o significado de $3 + \frac{4}{5}$.

Outros exemplos de escritas de frações são: $\frac{1}{50} =$  $\frac{1}{100} =$ 

A fração $\frac{1}{2}$ também era representada por 

A fração $\frac{2}{3}$ era representada por um hieróglifo parecido com o símbolo 

4. No Papiro Rhind, o escriba Ahmes se ocupa de construir uma tábua de decomposições de frações da forma $2/n$, n ímpar, $n \geq 3$, como soma de duas frações unitárias distintas.

   Mostre que se $n \geq 3$ é ímpar, então a igualdade seguinte nos dá $2/n$ como soma de duas frações unitárias distintas.

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{(n+1)/2} + \frac{1}{n(n+1)/2}$$

O escriba Ahmes pode não ter tido ciência dessa igualdade.

Utilizando-a, decomponha, como soma de duas frações unitárias distintas, cada uma das frações $2/5$, $2/7$ e $2/9$.

Escreva também as soluções na forma hieroglífica.

5. Expresse $13/14$ como uma soma de frações unitárias distintas.

   Sugestão: Faça primeiramente $13 = 1 + 4 + 8$. Empregue então, um número finito de vezes, a igualdade do problema 4.

6. Expresse todas as frações próprias, com denominador 11, à maneira egípcia.

   Sugestão: A decomposição de $\frac{2}{11}$ como soma de frações unitárias é obtida aplicando-se a fórmula do problema 4. Para frações de numeradores maiores, podemos fazer uso de igualdades tais como $\frac{3}{11} = \frac{1}{11} + \frac{2}{11}$, $\frac{4}{11} = 2 \cdot \frac{2}{11}$, $\frac{5}{11} = \frac{1}{11} + \frac{4}{11}$, etc. Use sua criatividade.

1.3 Problemas de partilha e o algoritmo de Fibonacci

O algoritmo ganancioso de Fibonacci-Sylvester

Em 1880, James Joseph Sylvester (1814–1897) demonstrou que

> *toda fração ordinária $\frac{a}{b}$, isto é, com a e b inteiros positivos $a < b$, pode ser escrita como soma de um número finito de frações unitárias distintas entre si.*

Nos próximos itens, exploraremos o teorema de Sylvester, seguindo os passos sugeridos a seguir. Note que esta demonstração do Teorema de Sylvester é construtiva, no sentido de que ela nos fornece um algoritmo para decompor qualquer fração própria como soma de frações unitárias distintas. Este algoritmo, conhecido como *algoritmo ganancioso*, já era conhecido por Fibonacci, que o explicou em seu *Liber Abaci* (1202).

7. (i) Supondo que $a \geq 2$, tome a maior fração unitária $\frac{1}{n}$ que "cabe" em $\frac{a}{b}$, isto é, tal que $\frac{1}{n} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{n-1}$. Se $\frac{1}{n} = \frac{a}{b}$, não precisamos prosseguir. Suponhamos $\frac{1}{n} < \frac{a}{b} < \frac{1}{n-1}$
   Faça então
   $$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{an - b}{nb}$$
   Mostre que $an - b < a$. Isto quer dizer que, concluído este passo, nos deparamos com uma nova fração, $\frac{an-b}{nb}$, com um numerador menor que o da fração inicial $\frac{a}{b}$.

   (ii) Mostre que a maior fração unitária que "cabe" em $\frac{an-b}{nb}$ é menor que $\frac{1}{n}$, mostrando que $\frac{an-b}{nb} < \frac{1}{n}$.

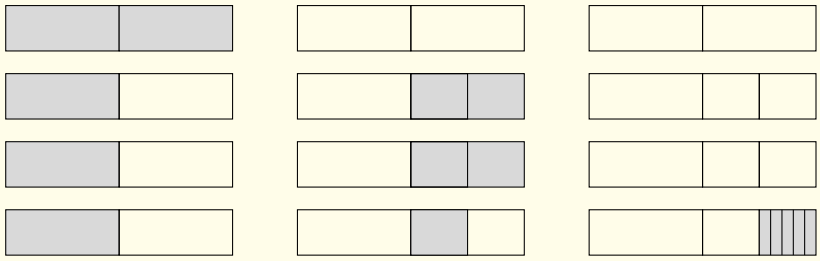
   (iii) Use os resultados dos dois itens anteriores para fazer uma demonstração do Teorema de Sylvester por indução sobre a.

8.

Problemas de partilha do Papiro Rhind

O Papiro Rhind (ou Papiro Ahmes, Ahmes sendo o nome de seu escriba) é uma espécie de manual instrucional de matemática básica dos egípcios. Chama a atenção, nos primeiros problemas propostos e resolvidos do papiro, o modo como os egípcios resolviam problemas de partilha de um certo número de pães para um certo número de pessoas.
Por exemplo, para dividir 4 pães para 5 pessoas, nos tempos atuais nós diremos que cabe, a cada uma, $4/5$ de um pão, e isto implica, de certa forma, em "cortar" todos os pães em 5 partes e distribuir 4 partes a cada pessoa. Mesmo que não cortemos todos os pães em 5 partes, algumas pessoas receberão pães quase inteiros e outras irão receber pedaços menores. Como os egípcios faziam para resolver este problema? A resposta é encontrada nos primeiros problemas do Papiro Rhind.

Por um método que chamaremos de *divisão humanitária*, primeiramente eles cortariam os 4 pães ao meio e distribuiriam $1/2$ pão a cada pessoa (1º diagrama abaixo). Depois, tendo restado 3 metades, eles as dividiriam ao meio e distribuiriam cinco metades de metades, ou seja $1/4$ de pão a cada pessoa (2º diagrama). Finalmente, o quarto de pão restante seria dividido em 5 fatias, cabendo portanto mais $1/20$ de pão a cada pessoa (3º diagrama). Isso nos dá finalmente $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$, ou seja, a cada uma caberia de pão.



(a) Escreva a fração $\frac{5}{7}$ como soma de frações unitárias distintas, usando o procedimento de dividir 5 pães para 7 homens, pelo método de "divisão humanitária" egípcio. Faça desenhos para raciocinar.

(b) Escreva a fração $\frac{5}{7}$ como soma de frações unitárias distintas, usando o algoritmo de Sylvester, descrito no problema 7.

(c) Verifique que, ao dividir 5 pães para 7 homens, pelo método de "divisão humanitária" egípcio, item a, decompomos a fração $\frac{5}{7}$, como soma de frações unitárias distintas, de maneira diferente daquela obtida no item b.

(d) O escriba, ao dividir 5 pães para 7 homens, optou por utilizar inicialmente a fração egípcia . Como fica agora a divisão de 5 pães para 7 homens?

9. (a) Mostre que $2/9$ se escreve, como soma de duas frações unitárias distintas, de pelos menos duas maneiras diferentes.

(b) Mostre que $2/15$ se escreve, como soma duas frações unitárias distintas, de pelo menos três maneiras diferentes.

10. (a) Mostre que sendo $n \geq 3$ um inteiro ímpar, $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, com a e b inteiros positivos, se e somente se $(2a - n)(2b - n) = n^2$.

    (b) Mostre que se $n \geq 3$ é primo, $2/n$ se escreve como soma de duas frações unitárias distintas de maneira única.

    Sugestão: Use o resultado do item a e o fato de que cada inteiro positivo ou é primo ou se escreve como produto de primos positivos de uma única maneira (a menos da ordem dos fatores).

11. Mostre que $2/45$ se decompõe de 7 maneiras diferentes como soma de duas frações unitárias distintas e determine essas decomposições. *Sugestão*: Use o resultado do problema 10, item a.

12. Mostre que se $n \geq 3$ é um inteiro ímpar, o número de maneiras de se escrever $2/n$ como soma de duas frações unitárias distintas é igual a $\frac{d(n^2) - 1}{2}$, sendo $d(n^2)$ o número de divisores positivos de n^2.

    Sugestão: Use o resultado do problema 10, item a.

13. Mostre que

    (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$ é a maior fração própria que se escreve como soma de três frações unitárias distintas. *Sugestão:* Qual seria a menor soma de três frações unitárias distintas imediatamente maior que esta?

    (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43}$ é a maior fração própria que se escreve como soma de quatro frações unitárias distintas.

    (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807}$ é a maior fração própria que se escreve como soma de cinco frações unitárias distintas.

    (d) Percebeu algum padrão na formação das frações dos itens anteriores? Conjecture qual seria a maior fração própria que se escreve como soma de seis frações unitárias distintas. Mostre que sua afirmação é verdadeira.

14. Escreva o número 1 como soma de exatamente

    (a) 3 frações unitárias distintas;

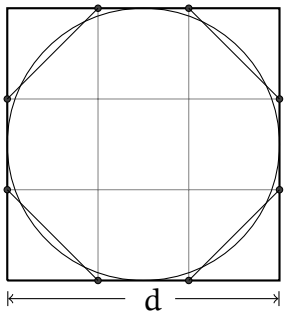
    (b) 4 frações unitárias distintas.

1.4 Bits de geometria no Egito antigo

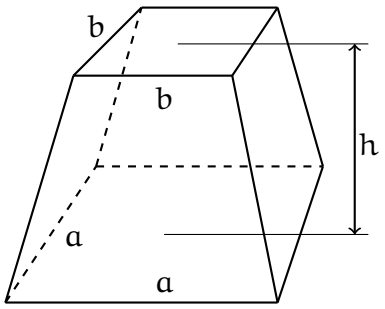
15. O problema 50 do papiro Ahmes (ou papiro Rhind) constitui-se no cálculo da área de um círculo.

    Segundo o escriba, ela é dada por $\left(\frac{8}{9} d\right)^2$, sendo d o diâmetro do círculo.

Qual seria a aproximação de π, obtida segundo essa fórmula e a fórmula atualmente conhecida para a área do círculo?
Deduza a aproximação egípcia da área do círculo, inscrevendo o círculo em um quadrado de lado d, trisseccionando cada lado do quadrado em três partes iguais, e então aproximando a área do círculo pela área do octógono mostrado no diagrama ao lado.



16. O problema 14 do Papiro Matemático de Moscou propõe (e resolve) o cálculo do volume de um tronco de pirâmide. *Grosso modo*, um tronco de pirâmide é o sólido que resta de uma pirâmide quando uma pirâmide semelhante é cortada de seu topo. Mais precisamente, um tronco de uma pirâmide (sólida) pode ser definido como uma parte da pirâmide compreendida entre sua base e um plano paralelo à base, de modo que a distância da base ao plano seja menor que a altura da pirâmide. Tal distância é a altura do tronco.
Se o tronco de pirâmide resultante tem uma base quadrada de lado a, e um topo quadrado de lado b, e se sua altura é h, então, como perceberam os egípcios antigos, o volume do tronco de pirâmide é

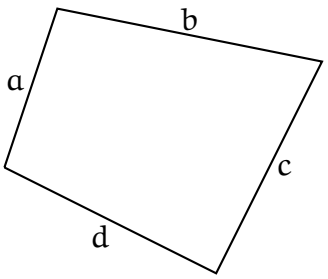


$$\frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Repare que se $b = 0$, obtemos a fórmula para o volume de uma pirâmide de base quadrada: $a^2h/3$.

Usando o fato de que o volume de uma pirâmide de altura h é dado por $\frac{1}{3} \times$ base $\times$ altura, mostre que a fórmula egípcia para o volume do tronco de pirâmide está correta.

17. Howard Eves diz, em seu *Introdução à História da Matemática*, que um papiro egípcio, posterior ao papiro Rhind, emprega uma *fórmula inexata* para o cálculo da área K de um quadrilátero convexo de lados consecutivos a, b, c e d. A fórmula dada pelo papiro é:



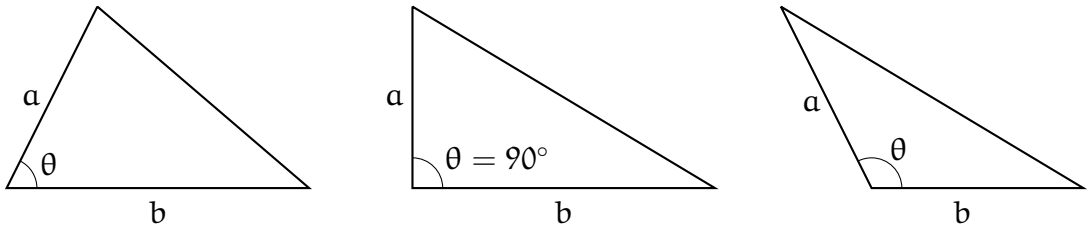
$$K = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

Neste exercício, veremos que esta fórmula determina um valor maior que a área do quadrilátero, quando este não é um retângulo.

(a) Mostre que, o triângulo de lados a e b, sendo θ o ângulo entre eles, tem sua área T dada por $T = \frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen}\theta$.

(b) Fazendo uso da fórmula para a área de um triângulo, dada no item anterior, deduza uma expressão para a área de um quadrilátero convexo, em função dos quatro lados e seus quatro ângulos internos. *Sugestão:* Subdivida o quadrilátero em dois triângulos, de duas maneiras diferentes.

(c) Mostre que a área A de um quadrilátero convexo, de lados consecutivos a, b, c e d, satisfaz $A \leq K = \dfrac{a+c}{2} \cdot \dfrac{b+d}{2}$.



(d) Mostre que $A = K$ se, e somente se o quadrilátero é um retângulo.

1.5 Equações do primeiro grau no papiro Rhind

No *Papiro Rhind*, encontramos as primeiras equações do primeiro grau, na forma de *problemas "aha"*. *Aha* significava *quantidade*. Como exemplo desse tipo de problema temos o seguinte.

(Problema 24) *Uma quantidade e seu sétimo, somadas juntas, dão 19. Qual é a quantidade?*

Em linguagem moderna, o problema traduz-se em uma equação: $x + \frac{x}{7} = 19$. Para resolver problemas desse tipo, o escriba *Ahmes* do papiro Rhind empregava o *método da falsa posição*, procedendo da seguinte maneira.

Escolhemos, ao acaso, uma quantidade inteira divisível por 7, digamos 7. Um sétimo de 7 é igual a 1. Somando 7 a $\frac{1}{7}$ de 7 obtemos 8. O escriba então buscava a solução como se resolvesse uma *regra de três simples*:

quantidade	resultado
7	8
x	19

ou seja, a quantidade procurada é $x = 7 \cdot 19 \div 8$, que nos dá, em egípcio, $x = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

18. Na verdade, as equações do primeiro grau propostas no Papiro Rhind reduzem-se todas a problemas de proporcionalidade, ou seja, a equações do tipo $ax = b$, com a e b reais, $a \neq 0$. Mostre que o método usado pelo escriba nos dá a solução correta.

19. Resolva os seguintes problemas aha do papiro Rhind pelo método da falsa posição.

    (a) (Problema 25) Uma quantidade e sua metade, somadas juntas, resultam 16. Qual é a quantidade?

    (b) (Problema 26) Uma quantidade e 2/3 dela são somadas. Subtraindo-se, desta soma, 1/3 dela, restam 10. Qual é a quantidade?

2

Eventos da história da aritmética babilônica antiga

2.1 O sistema de numeração babilônico

Neste capítulo exploramos o formidável sistema de numeração sexagesimal babilônico desenvolvido na antiga Mesopotâmia, no período do século XVI a.C. ao século III a.C. Os registros que chegaram até nós são escassos e encontram-se preservados em tabletes de argila descobertos principalmente em escavações arqueológicas na região da antiga Mesopotâmia – o atual Iraque, além de partes da Síria e do Irã. A maior parte dos tabletes está espalhada em museus e bibliotecas do mundo.

Numeração no antigo Iraque

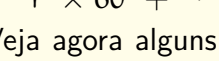
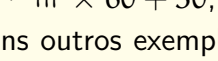
O que chamamos de matemática babilônica ou mesopotâmica é a matemática desenvolvida na região geográfica do atual Iraque, pelos povos que a habitaram entre o terceiro e o primeiro milênio a.C., a saber sumérios, babilônios, e assírios. Mesopotâmia quer dizer "terra entre rios", a saber entre os rios Tigre e Eufrates. Babilônia também é o nome da capital do império babilônico, que teve seu apogeu com Nabucodonosor, por volta de 575 a.C.

Como sistema numérico, os babilônios (cidadãos da Mesopotâmia) desenvolveram, através dos séculos, um sistema posicional *sexagesimal* incompleto. Nós adotamos um sistema posicional *decimal*, no qual usamos os dez dígitos de 0 a 9. Os babilônios representavam seus números na base 60, e seus "dígitos" eram os inteiros de 1 a 59, não havendo representação para o dígito *zero* (introduzido apenas no século III a.C.).

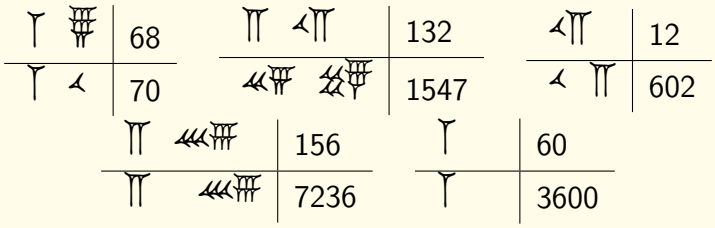
Para escrever seus dígitos, os babilônios usavam dois numerais da sua escrita cuneiforme, a saber,  representando 1, e  representando 10.

No sistema posicional babilônico, escrevia-se, por exemplo, , para representar 43,  para representar 50, e , para representar 59. Toda a escrita babilônica era feita em tabletes de argila. Tabletes de argila produzidos entre 2000 e 1600 a.C. é que nos revelam o uso do sistema de representação numérica que acabamos de descrever.

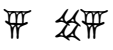
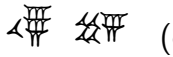
Escrevendo números naturais no sistema babilônico

Quando o escriba babilônico escrevia  ele estava representando o número  $\times 60^2 +$  $\times 60 + 30$, ou seja, 63210 (confira).

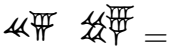
Veja agora alguns outros exemplos de representações de números em babilônico e seus correspondentes no nosso sistema decimal.

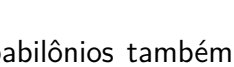


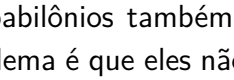
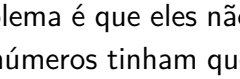
1. Confira a conversão de cada um dos números babilônicos da introdução acima, para o nosso sistema decimal. Por exemplo,  $= 25 \cdot 60 + 47 = 1547$. Traduza também, para o sistema decimal, os seguintes números:

   (a)  (b)  (c)  *Respostas:* (a) 345 (b) 8325 (c) 139743.

2. Vamos adotar uma representação de números babilônicos usando algarismos do sistema decimal, escrevendo os "dígitos" de 0 a 59 tal como fazemos habitualmente, e separando os dígitos por ";" (ponto e vírgula). Esta convenção é adotada por Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira em *Tópicos de História da Matemática*, coleção PROFMAT. Aqui vão alguns exemplos, com respectivas conversões para o sistema decimal. Com uma calculadora, se necessário, verifique a validade da igualdade apresentada em cada exemplo.

   (a)  $= 25;47 = 25 \cdot 60 + 47 = 1547$ (b)  $= 1;15 = 75$

   (c)  $= 1;24;51;10 = 305470$ (d)  $= 16;53 = 1013$

   (e)  $= 44;26;40 = 160000$ (f)  $= 1;40 = 100$

3. Os babilônios também usavam uma representação posicional para números fracionários. O problema é que eles não tinham um ponto ou vírgula, separando a parte inteira da fracionária. Os números tinham que ser interpretados dentro do contexto do problema em que apareciam. Ainda seguindo a convenção de Roque e Pitombeira, vamos usar uma vírgula, como fazemos no sistema decimal, para separar a parte inteira da parte fracionária de um número real, quando representado no sistema sexagesimal. Por exemplo, denotaremos

   $13;22,4;12 = 13 \cdot 60 + 22 + \dfrac{4}{60} + \dfrac{12}{60^2} (= 802,07)$ e $0,12;36 = \dfrac{12}{60} + \dfrac{36}{60^2} (= 0,21)$.

   Com base nos exemplos apresentados, converta para o sistema decimal os seguintes números babilônicos, dados em nossa representação sexagesimal moderna. Use uma calculadora para agilizar os cálculos.

   (a) $0,49;57$ (b) $12;22,15;54$ (c) $0,40;6$ (d) $4;48,48;0;0;36$

   Respostas: (a) $0,8325$ (b) $742,265$ (c) $0,668333\ldots$ (d) $288,800002777\ldots$

2.2 Investigações da aritmética babilônica

4. Demonstre que, sendo a e b inteiros positivos, primos entre si, a fração $\frac{a}{b}$ tem representação decimal finita se e somente se $b = 2^r \cdot 5^s$, com r e s expoentes inteiros não negativos.

   Sugestão: $\frac{a}{b}$ tem representação decimal finita quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{10^n}$ para algum inteiro positivo c e algum inteiro n.

5. Demonstre que, sendo a e b inteiros positivos, primos entre si, o número racional $\frac{a}{b}$ tem representação sexagesimal finita se e somente se $b = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^t$, com r, s e t expoentes inteiros não negativos.

6. As operações elementares de adição, subtração e multiplicação, entre números sexagesimais, são realizadas de modo análogo ao que é feito no nosso sistema decimal. É importante observar que, enquanto no sistema decimal, 10 unidades significam uma dezena, 10 dezenas uma centena, 10 centenas um milhar, etc., no sistema sexagesimal, 60 unidades formam uma "sextena", 60 "sextenas" formam uma unidade do próximo grupo, e assim por diante. Além disso, as mesmas operações, realizadas entre números sexagesimais fracionários, seguem algoritmos análogos aos usados para números decimais fracionários. Por exemplo, para somar, com lápis e papel, dois números decimais fracionários, primeiro tratamos de posicioná-los um acima do outro, alinhando as vírgulas, e o mesmo pode ser feito no sistema sexagesimal.

   Com base nas analogias supracitadas, realize as seguintes operações, sem transformar os números sexagesimais em decimais.

   (a) $1;30,27;50 + 29,38;13$ (b) $2;30,4;38 - 40,5;15$ (c) $11;32 \times 25$

   (d) $37;28 \times 19$ (e) $48;32 \times 3,2$

   Respostas: (a) $2;0,6;3$ (b) $1;49,59;23$ (c) $4;48;20$ (d) $11;51;52$ (e) $2;27;13,4$.

7. Para realizar uma divisão de a por b, os babilônios multiplicavam a pelo inverso de b, calculando este previamente. Os babilônios faziam uso de tábuas de inversos de números inteiros. Se o inverso de b não tivesse uma representação sexagesimal finita, os babilônios usariam uma aproximação, jamais fazendo representações com *dízimas periódicas* (que seriam, em termos inventados aqui, *sexagésimas periódicas*), como nós aprendemos a fazer. Dízimas periódicas, no sistema decimal, tem sua origem histórica no século 16, com Simon Stevin (La Disme).

   Calcule o inverso babilônico de 45 e em seguida calcule (por multiplicação babilônica) $30 \div 45$.
   Respostas: $0,1;20$ e $0,40$.

8. Seja um babilônio moderno e represente $\frac{5}{42}$, na forma sexagesimal babilônica, usando uma dízima periódica (o mais correto seria dizer uma *sexagésima* periódica!). Faça a longa divisão de 5 por 42 na "chave", raciocinando com os n'umeros no sistema sexagesimal.

   Resposta: $0,7;8;34;17;8;34;17;\ldots = 0,7;\overline{8;34;17}$.

9. Considere todas as frações próprias positivas a/b, a e b inteiros positivos primos entre si, $a < b \leq n$, sendo $n \geq 3$ um inteiro positivo (fixado) qualquer. Explique porquê, neste

conjunto de frações, ocorrerão mais dízimas periódicas no sistema decimal do que no sistema sexagesimal.

10. Passe para a representação sexagesimal os seguintes inteiros dados na forma decimal. Use o algoritmo de divisões sucessivas por 60. Use uma calculadora para agilizar os cálculos. Pense sobre como você pode realizar divisões de inteiros (com quociente e resto) usando uma calculadora.

    (a) 425 (b) 8268 (c) 78259 (d) 458253 (e) 201658 (f) 1582421

    Respostas: (a) $7;5$ (b) $2;17;48$ (c) $21;44;19$ (d) $2;7;17;33$ (e) $56;0;58$ (f) $7;19;33;41$

11. Mostre que se um número racional positivo tem representação decimal finita, então também terá representação sexagesimal finita. *Sugestão:* Veja a sugestão dada no problema 4.

12. Sendo c um número real positivo, vamos denotar por $[c]$ a parte inteira de c. Por exemplo, $[2,31] = 2$, $[\pi] = 3$, $[1/2] = 0$, $[4] = 4$. Suponhamos que a é um número racional, com $0 < a < 1$, tendo representação decimal finita. Sua representação sexagesimal (finita) terá a forma $a = 0, a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$, sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ os "dígitos" empregados na representação sexagesimal de a. Isto significa que $a = \dfrac{a_1}{60} + \dfrac{a_2}{60^2} + \dfrac{a_3}{60^3} + \cdots + \dfrac{a_n}{60^n}$.

    Mostre que

    (i) $[60 \cdot a] = a_1$

    (ii) $[60 \cdot (60 \cdot a - a_1)] = a_2$

    (iii) $[60 \cdot (60 \cdot (60 \cdot a - a_1) - a_2)] = a_3$

    O cálculo dos demais dígitos prossegue analogamente. Escreva a expressão que nos dará o dígito a_4.

13. Use o algoritmo descrito no problema 12 para escrever os seguintes números no sistema sexagesimal.

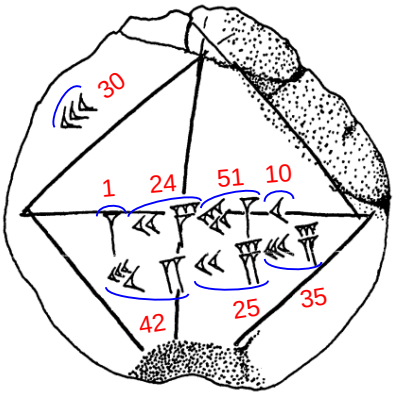
    (a) $0,125$ (b) $0,9009$ (c) $0,9386$ (d) $0,111111$

    Respostas: (a) $0,7;30$ (b) $0,54;3;14;24$ (c) $0,56;18;57;36$ (d) $0,6;39;59;58;33;36$

2.3 Raízes quadradas na aritmética babilônica

14.

Um tablete babilônico descoberto em 1912, datado de aproximadamente 1700 a.C., o tablete 7289 da Yale Babylonian Collection, conhecido como tablete YBC 7289, mostra a mais antiga aproximação de $\sqrt{2}$ registrada na história. O tablete tem formato quase circular com aproximadamente 7 cm de diâmetro. Nele são mostrados um quadrado e suas duas diagonais. Em um lado do quadrado lê-se o número 30. Em uma diagonal, lê-se o número $1;24;51;10$, e abaixo deste lê-se $42;25;35$. Confira na ilustração ao lado. Na verdade, conforme interpretado mais tarde, os números inscritos na diagonal são $1,24;51;10$ e $0,42;25;35$, respectivamente.



(a) Faça uso de uma calculadora para verificar que $1,24;51;10$ é uma aproximação de $\sqrt{2}$, sendo o erro dessa aproximação menor que 10^{-6}.

(b) Verifique também que $30 \times 1,24;51;10 = 42,25;35$.

(c) Há historiadores que interpretam a inscrição 𒌋 ao lado do quadrado, como sendo $1/2$.
Verifique que $\frac{1}{2} \times 1,24;51;10 = 0,42;25;35$, podendo ser este o número que está representado no tablete.



15. Os babilônios tinham um algoritmo de aproximações sucessivas para calcular raízes quadradas.

Sendo a um inteiro positivo, $\sqrt{a} \approx x_0$ (x_0 é uma primeira aproximação).

Buscando uma aproximação melhor, $\sqrt{a} = x_0 + h = x_1$

$a = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2$

Buscando uma boa aproximação para h, desprezamos h^2 e obtemos $a \approx x_0^2 + 2x_0h$

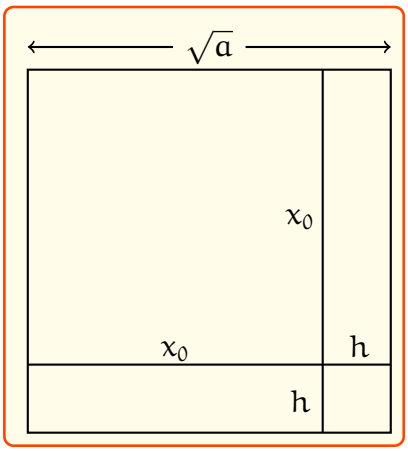
$2x_0h \approx a - x_0^2$

$h \approx \dfrac{a - x_0^2}{2x_0}$

Obtemos então uma segunda aproximação para $\sqrt{a}$.

$\sqrt{a} \approx x_1 = x_0 + h = x_0 + \dfrac{a - x_0^2}{2x_0}$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + a}{2x_0} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$$



Em linguagem moderna, o algoritmo de obtenções de aproximações de raízes quadradas se resume a calcular os termos de uma sequência $x_1, x_2, x_3, \ldots$, que se aproximam mais e mais de $\sqrt{a}$, sendo a um número racional positivo dado.

Como aproximação inicial, tomamos um inteiro $x_0 > 0$. A sequência de aproximações é então definida por:

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{a}{x_0}}{2}, \quad x_2 = \frac{x_1 + \frac{a}{x_1}}{2}, \quad x_3 = \frac{x_2 + \frac{a}{x_2}}{2}, \quad \text{etc.}$$

16. Calcule as quatro primeiras aproximações de $\sqrt{2}$, ou seja, x_0, x_1, x_2, x_3, tomando $x_0 = 1{,}5 = \frac{3}{2}$ (ou seja, $x_0 = 1{,}30_{60}$), usando o método iterativo babilônico descrito no problema 15.

Primeiramente escreva-as na forma fracionária (fração de dois inteiros) e ao final use uma calculadora para calcular as aproximações x_1, x_2, x_3, na forma decimal.

Converta cada fração obtida a uma aproximação na forma sexagesimal. Com o uso de uma (boa) calculadora, verifique que $|x_2 - \sqrt{2}| < 10^{-5}$, e $|x_3 - \sqrt{2}| < 10^{-11}$.

Resposta: $x_0 = \dfrac{3}{2} = (1,5)_{10} = (1,30)_{60}$, $x_1 = \dfrac{17}{12} = (1,41666\ldots)_{10} = (1,25)_{60}$,

$x_2 = \dfrac{577}{408} \approx (1,41421568627451)_{10} \approx (1,24;51;10;35;17)_{60}$,

$x_3 = \dfrac{665\,857}{470\,832} \approx (1,41421356237469)_{10} \approx (1,24;51;10;7;46)_{60}$.

2.4 A surpreendente eficiência do método babilônico

17. Seja a um número racional positivo. Como aproximação inicial de $\sqrt{a}$, tomemos um inteiro $x_0 > 0$. Uma sequência de aproximações sucessivas de $\sqrt{a}$ é então definida por:

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{a}{x_0}}{2}, \quad x_2 = \frac{x_1 + \frac{a}{x_1}}{2}, \quad x_3 = \frac{x_2 + \frac{a}{x_2}}{2}, \quad \text{etc.}$$

Nos itens a seguir, é proposta uma dedução de que, de fato, $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

(a) Mostre que $x_n \geq \sqrt{a}$ para cada n, $n \geq 1$.
Sugestão: Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ então $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

(b) Mostre que se $n \geq 1$, então $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})$

(c) Mostre que se $n \geq 1$, então $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2^n}(x_1 - \sqrt{a})$

(d) Use o *Teorema do Confronto* para limites de sequências para mostrar que $\lim_{n\to\infty}(x_n - \sqrt{a}) = 0$ e portanto $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.
Teorema do Confronto: Se (a_n), (b_n) e (c_n) são sequências de números reais tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para cada n, e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

2.5 Ternos pitagóricos na matemática babilônica

18. Um terno pitagórico é um *terno* ou *tripla* de números inteiros positivos (a, b, c) tais que $a^2 + b^2 = c^2$.
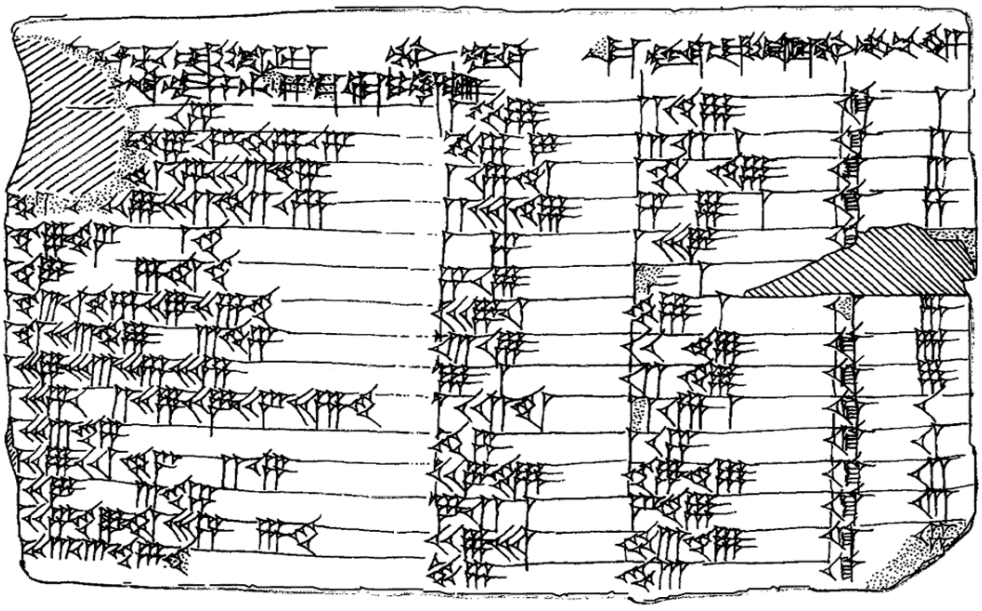
Se (a, b, c) for um terno pitagórico, então (ka, kb, kc) também será um terno pitagórico, para qualquer número natural k. Um terno pitagórico primitivo é um terno pitagórico em que os três números do terno são primos entre si. Por exemplo, $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ são ternos pitagóricos primitivos.

(a) Mostre que, sendo (a, b, c) um terno pitagórico primitivo, um e apenas um dos inteiros a e b deverá ser par.

(b) Mostre que, sendo $m > n$ dois números naturais, o terno (a, b, c), em que $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, é pitagórico.

(c) Mostre que, sendo $m > n$ números naturais, o terno pitagórico $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ será primitivo se, e somente se, m e n são primos entre si e possuem paridades distintas.

19. (**O tablete Plimpton 322**) Um dos itens da Coleção Plimpton da Biblioteca Butler, da Columbia University, é o tablete Plimpton 322, doado à universidade pelo colecionador George Plimpton nos anos 1930.



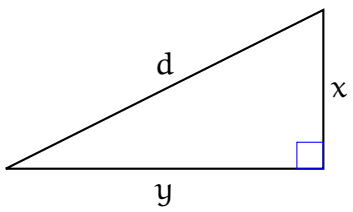
Desenho de Eleanor Robson, pesquisadora britânica da cultura mesopotâmica, reproduzindo o tablete Plimpton 322. Plimpton 322 é uma tabela de números, dispostos em quatro colunas e quinze linhas. A penúltima coluna do tablete contém inscrições não numéricas.

$(d/y)^2$	x	d	#	y
1,9834028	119	169	1	120
1,9491586	3367	4825	2	3456
1,9188021	4601	6649	3	4800
1,8862479	12 709	18 541	4	13,500
1,8150077	65	97	5	72
1,7851929	319	481	6	360
1,7199837	2291	3541	7	2700
1,6845877	799	1249	8	960
1,6426694	481	769	9	600
1,5861226	4961	8161	10	6480
1,5625	45	75	11	60
1,4894168	1679	2929	12	2400
1,4500174	161	289	13	240
1,4302388	1771	3229	14	2700
1,3871605	56	106	15	90

A tabela exibida acima, em suas quatro primeiras colunas, é uma tradução dos valores numéricos do tablete Plimpton 322 (com algumas correções de Otto Neugebauer, primeiro tradutor do tablete Plimpton 322). A coluna encabeçada por # dá a enumeração das linhas. A quinta coluna, encabeçada por y, não faz parte do tablete Plimpton 322.

Um *terno babilônico* é um terno pitagórico (x, y, d), em que $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $d = m^2 + n^2$, sendo m e n inteiros positivos cujos fatores primos são do conjunto $\{2, 3, 5\}$ (os fatores primos de 60).

Ao traduzir a tabela Plimpton 322, Otto Neugebauer descobriu que, em cada linha da tabela, os valores x e d (nas colunas segunda e terceira) seriam o cateto menor e a hipotenusa de um triângulo babilônico, sendo y (não dado na tabela Plimpton) o cateto maior. Descobriu também que na primeira coluna temos os valores $(d/y)^2$ em ordem decrescente.



Analisando a imagem da tabela Plimpton esboçada por Eleanor Robson, verifique os seguintes erros cometidos pelo escriba do tablete Plimpton, descobertos por Otto Neugebauer ao traduzir o tablete. Para cada linha mencionada, para detectar os erros, use os valores das demais colunas da tabela traduzida por Otto Neugebauer.

(a) na linha , coluna x, escriba escreveu  quando deveria ter escrito  (uma distração do escriba).

(b) na linha , coluna x, o escriba escreveu  mas deveria ter escrito  (verifique que o escriba na verdade anotou o quadrado de).

(c) na linha , coluna d, o escriba escreveu  mas deveria ter escrito .

(d) na linha , coluna d, o valor deveria ter sido substituído por .

20. Se (x, y, d) for um terno babilônico, chamaremos o triângulo de lados x, y e d, de *triângulo babilônico*.

    Para a tabela de valores dada no problema anterior, tradução de Otto Neugebauer, com correções, da tabela Plimpton 322,

    (a) determine os valores de m e n tais que $x = m^2 - n^2$ e $d = m^2 + n^2$ nas três primeiras linhas da tabela, verificando então que x e d são lados de um triângulo babilônico.

    (b) verifique que na linha 11, temos não os dados de um triângulo babilônico, mas de um triângulo semelhante a um triângulo babilônico.

    (c) verifique que na linha 15, (x, y, d) é terno babilônico mas não primitivo. Explique porquê.

3

Miscelânia de eventos da história da geometria

Neste capítulo apresentamos uma primeira seleção de problemas ligados à história antiga do desenvolvimento das ideias geométricas, com destaque para o início da geometria no período clássico grego.

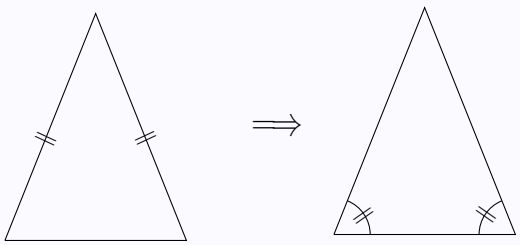
3.1 A aurora da matemática dedutiva

Tales de Mileto e sua ruptura na Matemática

1. Segundo historiadores, o primeiro matemático a propor demonstrações de teoremas foi o filósofo Tales de Mileto (c. 624 a.C.– c. 547 a.C.). Segundo Proclo (séc. 5), Tales visitou o Egito e lá aprendeu geometria. Os seguintes dois teoremas da geometria euclidiana são atribuídos a Tales.

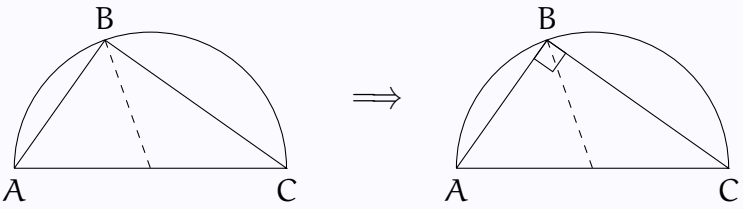
Um teorema atribuído a Tales

(i) Teorema 1. *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.*
Traduzindo o teorema 1 de Tales em imagens, temos a implicação:



Segundo teorema atribuído a Tales

(ii) Teorema 2. *Se* ABC *é um triângulo inscrito em um semi-círculo de diâmetro* AC*, então o ângulo* $A\widehat{B}C$ *é reto.*
Traduzindo o teorema 2 de Tales em imagens, temos:



(a) Seja ABC um triângulo, e seja r uma linha reta passando por A e paralela a BC. Assumindo que *quando duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal, os ângulos alternos internos são iguais*, demonstre que a soma dos ângulos internos de ABC é igual à soma de dois ângulos retos.

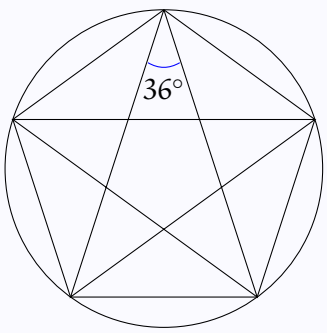
(b) Usando o resultado do item anterior e o Teorema 1 de Tales, demonstre o Teorema 2.

2. Há uma lenda de que Tales calculou a distância de um navio à praia, utilizando semelhança de triângulos. A lenda, no entanto, não relata como Tales fez isto. Como você acha que isto pode ter sido feito?

3.2 Explorando a estrela de Pitágoras

O símbolo da Escola Pitagórica

3. Pitágoras (570 a.C.– 500 a.C.) nasceu na ilha grega de Samos, e em torno de 525 a.C. fundou a irmandade dos Pitagóricos. Difunde-se na literatura de história da Matemática que o símbolo dos Pitagóricos era a *estrela pitagórica*, a estrela de cinco pontas formada pelas diagonais de um pentágono regular. Mostre (deduza) que o ângulo em cada ponta da estrela pitagórica é de $36°$.



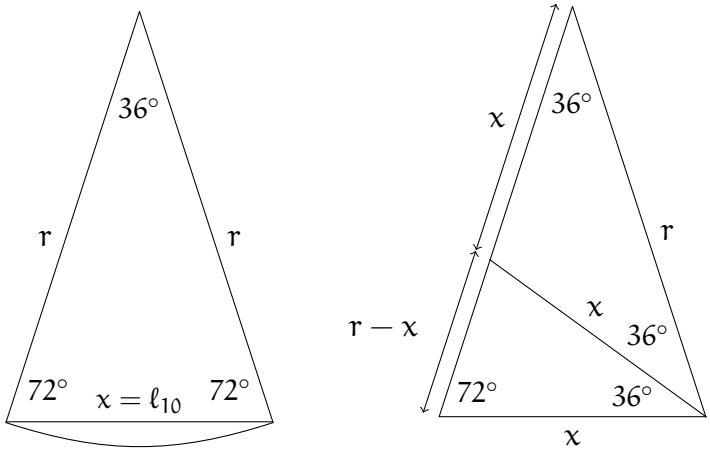
4. Os conceitos de *seno* e *cosseno* tem sua gênese nos matemáticos indianos, que foram os criadores da trigonometria do triângulo retângulo. Na criação do seno destaca-se Aryabhata (Índia, séc. 5).

No diagrama à esquerda, da figura abaixo, $x = \ell_{10}$ é a medida do lado do decágono regular inscrito num círculo de raio r.

Utilizando os triângulos isósceles do diagrama à direita, tendo em conta que o menor deles é semelhante ao maior, mostre que

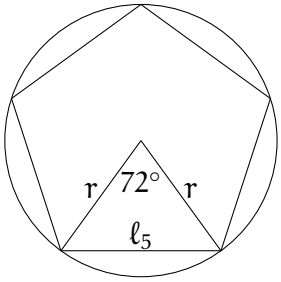
(a) $\ell_{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot r$

(b) $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$



5. (a) Aplicando a *lei dos cossenos* (descoberta por Jamshid al-Kashi (Pérsia, séc. 15) ao triângulo destacado da figura ao lado, deduza que o lado ℓ_5, do pentágono regular inscrito no círculo de raio r, é dado por $\ell_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \cdot r$.

   (b) Sendo ℓ_n a medida do lado no n-ágono regular inscrito em um círculo de raio r, mostre que $\ell_{10}^2 + \ell_6^2 = \ell_5^2$



3.2.1 Recortes de estrelas pitagóricas, uma atividade experimental para todos os níveis

Betsy Ross e seu recorte de estrelas pitagóricas

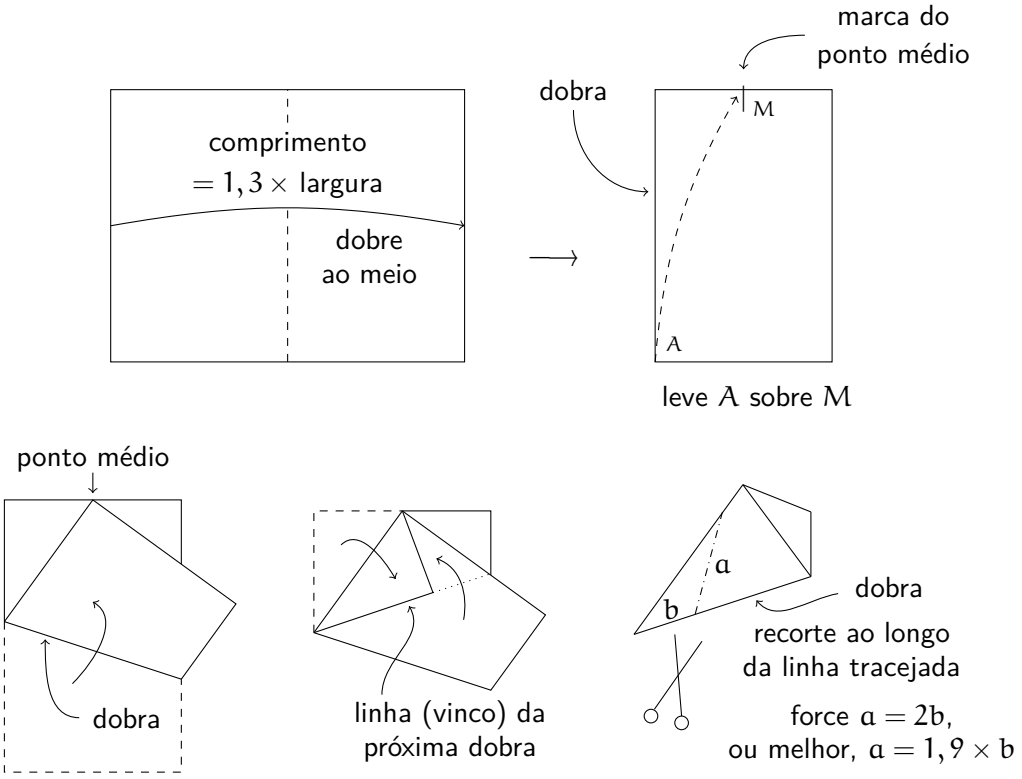
6. Há uma lenda de que uma costureira americana, Betsy Ross, recortou estrelas de tecido branco, para costurá-las na primeira bandeira dos Estados Unidos (usada de 1777 a 1795), usando o método de recorte de estrelas de cinco pontas que descreveremos a seguir.



Prepare uma folha de papel de modo que ela tenha *comprimento* $= 1,3 \times$ *largura*.

A folha de papel tamanho *Carta*, 216 mm $\times$ 279 mm, tem essas dimensões. Se for usar uma folha tamanho A4, você precisará recortar uma margem de 2,4 cm ao longo do lado menor.

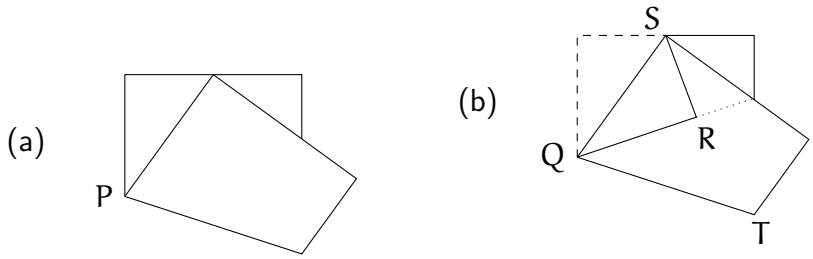
Faça dobras na folha, e recorte-a, como mostrado na sequência de diagramas abaixo. O resultado será uma estrela de cinco pontas. O método não é exato, mas produz uma boa aproximação de uma estrela pitagórica.



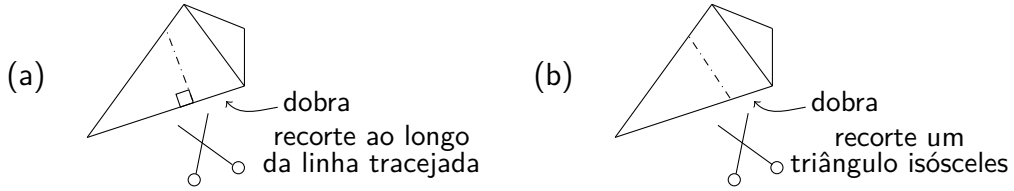
7. Explique geometricamente o porquê das medidas tomadas na folha de papel do problema 6.

   Como estratégia, calcule com boa aproximação os valores dos ângulos que tem vértice nos pontos P e Q dos diagramas (a) e (b) abaixo, já ilustrados no problema 6.

   Confirme então que, no caso do diagrama em (a), a partir do vértice P, um dos ângulos tem o dobro da medida do outro. E que, no diagrama em (b), o segmento QR é bissetriz do ângulo $S\widehat{Q}T$.



8. Repita novamente os passos da dobradura de papel do problema 6, mas ao final recorte o papel como indicado em cada um dos seguintes diagramas. O que você obteve?



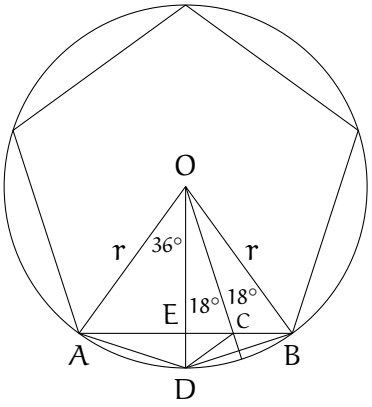
3.3 Apreciando Euclides, *Os Elementos*, Livro XIII, Proposição 10

Exemplo de engenhosidade de Euclides

9. O propósito deste problema é deduzir, tal como Euclides de Alexandria, sem fazer uso de trigonometria, a relação $\ell_{10}^2 + \ell_6^2 = \ell_5^2$, sendo ℓ_n o lado do n-ágono regular inscrito em um círculo de raio r.

Considere a figura abaixo à direita, em que temos $OA = \ell_6 = r$, $\ell_5 = AB$, e $\ell_{10} = AD = DB$.

Ao escrever, por exemplo, $\triangle MNP \sim \triangle UVW$, queremos dizer que os triângulos $\triangle MNP$ e $\triangle UVW$ são semelhantes, pela correspondência entre vértices $M \leftrightarrow U$, $N \leftrightarrow V$ e $P \leftrightarrow W$.



(a) Mostre que $\triangle ACO \sim \triangle AOB$, sendo ambos isósceles.

(b) Mostre que $\triangle DCB \sim \triangle ADB$, sendo ambos isósceles.

(c) Denote $CB = x$, e usando as semelhanças de triângulos estabelecidas, mostre que $\ell_5^2 - x\ell_5 = r^2$ e $\ell_{10}^2 - x\ell_5 = 0$

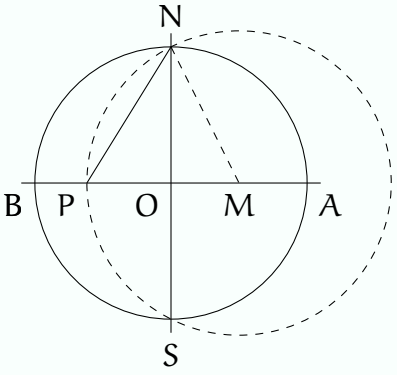
(d) Deduza finalmente que $\ell_{10}^2 + \ell_6^2 = \ell_5^2$.

3.4 Construindo decágono e pentágono regulares, incritos na circunferência

Duas construções em uma só estratégia

10. Considere a construção geométrica descrita no diagrama ao lado, em que são primeiramente traçados diâmetros perpendiculares AB e SN, da circunferência de raio OA, e M é ponto médio de OA.

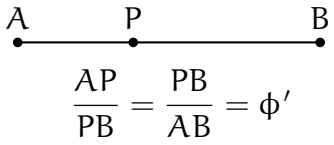
Mostre que OP e NP tem, respectivamente, as medidas dos lados do decágono regular e do pentágono regular inscritos na circunferência de raio OA.



A razão áurea na construção do pentágono regular

11. Em geometria, a constante $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ é chamada de *razão áurea* ou *razão áurea maior* ou ainda *número áureo* (a origem histórica do termo é incerta). Já a constante $\phi' = \dfrac{1}{\phi}$ é a *razão áurea menor*. Temos $\phi > 1$ e $0 < \phi' < 1$. Verifique que $\phi' = \phi - 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

    (a) Mostre que, se P é um ponto do segmento AB e $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{PB}{AB}$ então $\dfrac{AP}{PB} = \phi'$ (e obviamente $\dfrac{AB}{PB} = \phi$). Um tal ponto P diz-se um ponto de secção áurea do segmento AB.

    $$\frac{AP}{PB} = \frac{PB}{AB} = \phi'$$

    (b) Mostre que, na construção geometrica do problema 10, P é ponto de secção áurea do segmento OB, sendo $\dfrac{BP}{PO} = \phi'$.

    (c) Mostre que ϕ é a razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular. Considere a ilustração do problema 3.

    (d) Verifique que pares de diagonais do pentágono regular do problema 3 se interceptam em pontos de secções áureas de ambas.

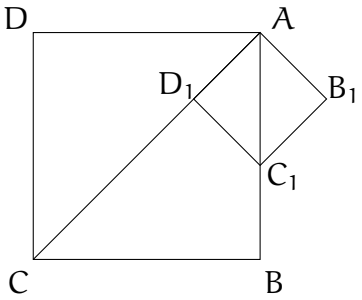
3.5 Incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado

Incomensurabilidade por antifairese

12. Dois segmentos AB e CD são *comensuráveis* se existe um segmento UV tal que $AB = m \cdot UV$ e $CD = n \cdot UV$, para certos inteiros positivos m e n. A igualdade $AB = m \cdot UV$ significa que o comprimento de AB é igual a m vezes o comprimento de UV. Em termos da teoria das proporções, nas condições acima teremos $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{m}{n}$, isto é, a razão entre os segmentos AB e CD é m/n.
    Mas nem sempre podemos exprimir a razão entre dois segmentos como uma fração de inteiros.
    Um dos feitos matemáticos atribuído aos pitagóricos é a demonstração de que a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos *incomensuráveis*, isto é, não comensuráveis.
    A demonstração apresentada neste problema, atribuída aos pitagóricos por alguns historiadores da Matemática, é conhecida como demonstração por *antifairese* ou por *subtrações recíprocas*.

Considere um quadrado $ABCD$, como na figura seguinte, e suponha que AB e AC sejam comensuráveis, isto é, que exista um segmento UV tal que $AB = m \cdot UV$ e $AC = n \cdot UV$, com $m < n$ inteiros positivos.

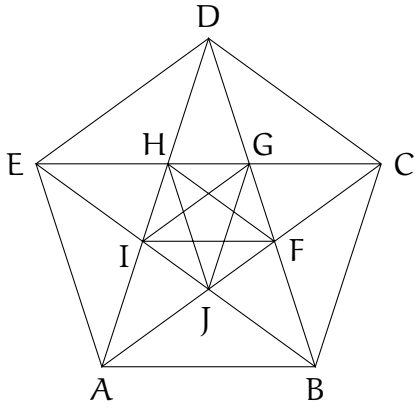
Tome D_1 na diagonal AC, tal que $CD_1 = CD$. Sobre a diagonal AC, constrói-se o quadrado $AD_1C_1B_1$. Explique por que C_1 é de fato um ponto sobre o lado AB, como mostra o diagrama. Mostre que o lado AB_1 e a diagonal AC_1, do quadrado menor, serão também múltiplos de UV.



Explique porque o fato deduzido no parágrafo anterior nos levará a uma contradição, e portanto AB e AC não podem ser comensuráveis.

13. Demonstre, por *antifairese*, que a diagonal e o lado do pentágono regular são incomensuráveis.

Como sugestão, imite a demonstração do problema 12, utilizando o seguinte diagrama.



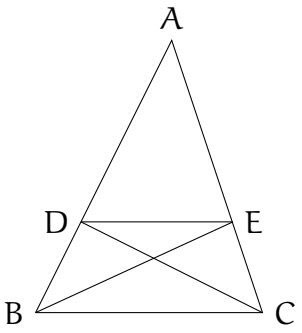
3.5.1 O "Teorema de Tales"

O "Teorema de Tales"

14. A Proposição 2 do Livro VI, dos *Elementos* de Euclides, é o *Teorema de Tales*, assim denominado em livros didáticos brasileiros, tendo o seguinte enunciado:
Se uma reta é traçada paralelamente ao lado BC *de um triângulo* ABC, *cortando os lados* AB *e* AC *em pontos* D *e* E, *respectivamente, então* $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.
Para demonstrar o Teorema de Tales, Euclides faz uso da teoria das proporções de Eudoxo de Cnido, desenvolvida no Livro V de Os Elementos, um tema espinhoso da geometria euclidiana. Euclides constrói uma brilhante demonstração usando áreas. Neste problema vamos reconstruir essa demonstração, em uma linguagem diferente daquela usada por Euclides, adaptada à linguagem da geometria dos tempos atuais.

No triângulo ABC da figura, em que uma reta paralela ao lado BC corta os lados AB e AC em D e E, considere os triângulos BDE e CDE.

Assuma como verdadeira a Proposição 1 do Livro VI dos *Elementos* de Euclides: *Se dois triângulos tem alturas iguais, a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases.*
Como caso particular desta proposição, temos a seguinte propriedade: *Se dois triângulos tem bases iguais e alturas iguais, eles tem áreas iguais.* Aqui o termo *iguais* é empregado no sentido de *medidas (comprimentos ou áreas) iguais*.



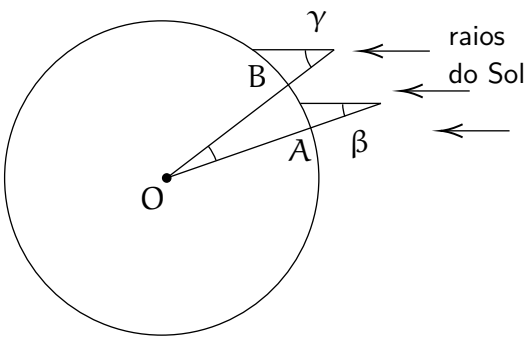
Com base nas considerações anteriores sobre áreas, demonstre o *Teorema de Tales*. Como sugestão, mostre inicialmente que os triângulos ADC e AEB tem áreas iguais. Considere áreas de triângulos apoiados nos lados esquerdo e direito do triângulo ABC.

3.6 Eratóstenes de Cirene, Aristarco de Samos e Hipócrates de Quios

Eratóstenes de Cirene com os pés na Terra

15. Este problema é baseado em um procedimento engenhoso de Eratóstenes de Cirene (276 a.C–194 a.C.) para medir o comprimento da circunferência da Terra (ou melhor, o comprimento de um meridiano terrestre, um grande semicírculo imaginário unindo o Polo Norte ao Polo Sul).

Duas cidades A e B, do hemisfério norte, são escolhidas de modo que B esteja ao norte de A e ambas encontrem-se em um mesmo meridiano terrestre, distantes entre si em aproximadamente uns 600 km. Dois bastões verticais (dois *gnômons*) são preparados, um em cada local. A distância d, ao longo do meridiano, entre os locais A e B (medida do arco AB), é conhecida.



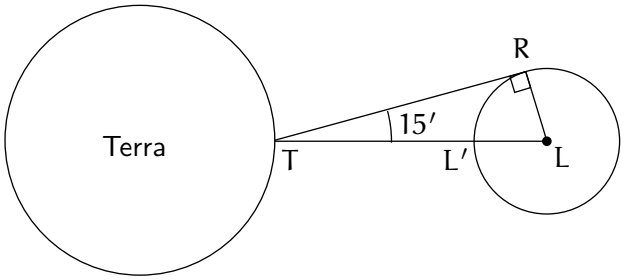
Pela projeção dos raios do sol, ao meio dia, os bastões produzem sombra ao longo do meridiano, e os ângulos β e γ, indicados na figura, são calculados. Deduza que, na situação geométrica da figura, temos $\alpha = \gamma - \beta$. Que teoremas da geometria euclidiana são empregados nesta dedução? Como pode ser calculado o raio da Terra, assumindo-a esférica, a partir desse experimento, nos dias de hoje?

Aristarco de Samos no mundo da Lua

16. Aristarco de Samos (310 a.C.–c. 230 a.C.) foi um astrônomo grego que idealizou procedimentos geométricos para calcular a razão entre os diâmetros da Terra e da Lua ($\approx 3,67$), e a razão entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua (≈ 390), utilizando apenas geometria euclidiana elementar. Seus métodos eram corretos, mas suas medições eram imprecisas.

Uma observação astronômica acurada, em noite de lua cheia, com a lua no zênite, revela o diagrama geométrico da figura abaixo (problema proposto em Morris Kline, Mathematics for the Nonmathematician, Dover Publications, 1985).

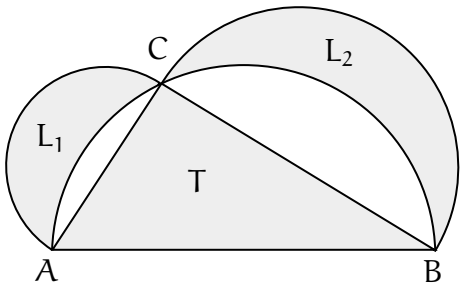
Com base nas informações do diagrama, conhecendo-se o diâmetro da Lua, de aproximadamente 3486 km, e sabendo que $\operatorname{sen} 15' \approx 0{,}00436$, calcule a distância TL' da Terra à Lua. Faça uso de uma calculadora.



Hipócrates de Quios no mundo das lúnulas

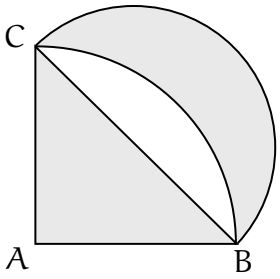
17. Hipócrates de Quios (c. 470 a.C.–c. 410 a.C.) foi o primeiro geômetra grego a determinar equivalências entre áreas de certas regiões planas delimitadas por arcos circulares (lúnulas) e áreas de regiões poligonais. Este problema e os dois problemas seguintes ilustram investigações de Hipócrates.

Em um semicírculo de diâmetro AB, inscreve-se um triângulo ABC. Sobre os catetos AC e CB são construídos dois outros semicírculos, tendo os catetos como diâmetros. As regiões planas da figura, L_1 e L_2, delimitadas por arcos de circunferências, lembrando fases da lua, são chamadas de *lúnulas*.

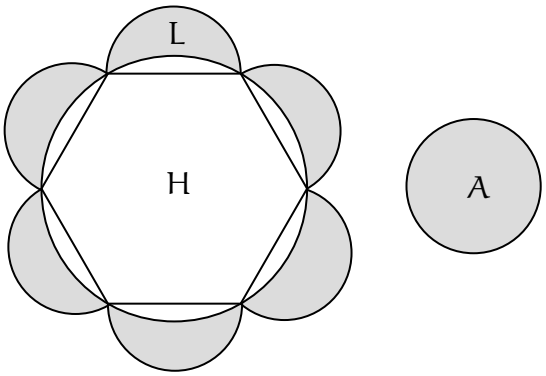


Demonstre o teorema de Hipócrates: área L_1 + área L_2 = área ABC.

18. Sendo ABC um triângulo retângulo isósceles como no diagrama ao lado, mostre que as duas regiões sombreadas tem áreas iguais, ou seja, a área da lúnula é igual à área do triângulo. Os dois arcos que delimitam a lúnula são, respectivamente, $1/4$ da circunferência de centro A e raio AC e a semi-circunferência de diâmetro CB.



19. Considere a figura ao lado, em que o diâmetro do círculo menor, de área A, é igual ao lado do hexágono regular de área H. Cada uma das seis lúnulas é externa ao círculo que circunscreve o hexágono, e interna ao semi-círculo construído sobre o lado do hexágono. Seja L a área de cada uma das lúnulas. Demonstre que $A = H - 6L$.



Sugestão para uma dedução esperta: Seja α a área do círculo circunscrito ao hexágono. Explique porque $\alpha = 4A$. Faça então uma dedução da igualdade $A = H - 6L$ descrevendo a área total da figura à esquerda, como soma de áreas de suas partes, de duas maneiras diferentes.

4

Miscelânia adicional de eventos da história da geometria

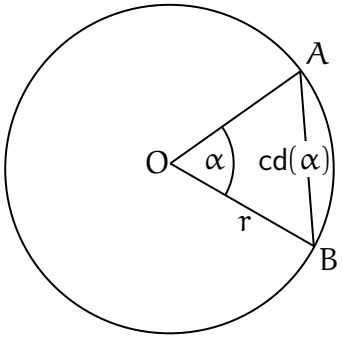
Neste capítulo passeamos por outros períodos e personagens da história da geometria, desde o nascimento da trigonometria até a teoria de construções geométricas via álgebra abstrata, passando também por formidáveis momentos de construções geométricas com ferramentas não euclidianas.

4.1 Trigonometria das cordas, de Hiparco e Ptolomeu

A trigonometria das cordas

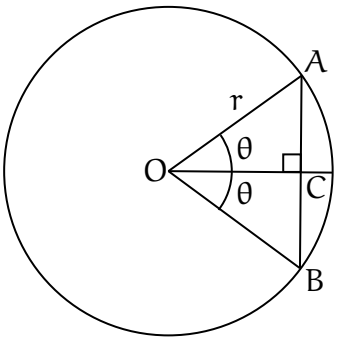
O nascimento da trigonometria se deu com os astrônomos gregos Hiparco de Nicéia (século 2 a.C.) e Claudius Ptolomeu (séculos 1-2), sendo este último o autor do *Almagesto*, a grande referência em astronomia até o Renascimento, somente superada pela teoria astronômica de Nicolau Copérnico (século 16). Hiparco e Ptolomeu adotaram a tradição babilônica de divisão (angular) da circunferência em 360 graus.
A seguir delineamos alguns conceitos da trigonometria das cordas, criada por Hiparco e Ptolomeu.

1. Fixada uma circunferência de centro O e raio r, para cada ângulo α, $0 < \alpha \leq 180^\circ$, existem pontos A e B na circunferência tais que $\alpha = A\hat{O}B$. A medida da corda (segmento) AB, que depende apenas do ângulo central α, é chamada *corda de* α, e a denotaremos por $\mathrm{cd}(\alpha)$. Na trigonometria de Hiparco e Ptolomeu não havia senos e cossenos de ângulos, mas sim medidas de cordas em função de ângulos que as subtendiam.

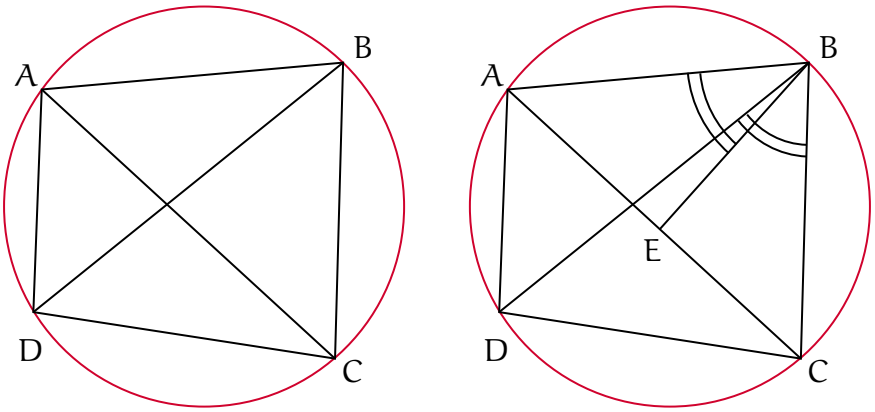


Deduza o teorema de Hiparco, $\boxed{\mathrm{cd}^2(\alpha) + \mathrm{cd}^2(180^\circ - \alpha) = 4r^2}$

2. Escreva uma fórmula relacionando $\operatorname{sen}\theta$ (criação dos hindus, séculos 6 a 12) e $\operatorname{cd}(2\theta)$, para $0 \leq \theta \leq 90°$. Como diagrama auxiliar, use o diagrama ao lado. Nos séculos 15 e 16, o cosseno de um ângulo θ, $0 < \theta < 90°$, passou a ser definido como sendo o seno do ângulo complementar $90° - \theta$, ou seja $\cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta)$. Como fica o teorema de Hiparco do problema 1, quando traduzido em termos de senos e cossenos?



3. Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos na circunferência de raio r. Demonstre o teorema de Ptolomeu, $\overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$.



Para demonstrar o teorema de Ptolomeu, tome um ponto E em AC tal que os ângulos $A\hat{B}E$ e $D\hat{B}C$ sejam iguais (congruentes) (por que isto é possível?). Mostre então que os triângulos ABD e EBC são semelhantes. Veja os diagramas da figura abaixo. Deduza então que $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{EC}$. Mostre, de maneira análoga, que os triângulos CBD e EBA são semelhantes, e que então $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = \overline{BD} \cdot \overline{EA}$. Deduza então o teorema de Ptolomeu.

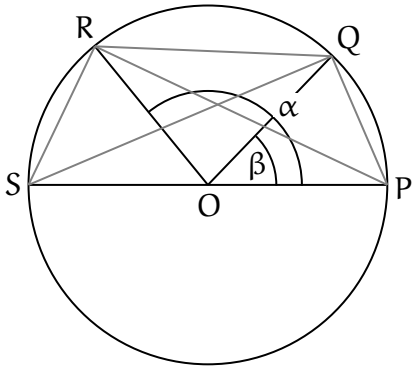
4. Mostre que, como consequência do teorema de Ptolomeu do problema 3, sendo $0 < \beta < \alpha < 180°$, temos

$$2r \cdot \operatorname{cd}(\alpha - \beta) = \operatorname{cd}(\alpha)\operatorname{cd}(180° - \beta) - \operatorname{cd}(\beta)\operatorname{cd}(180° - \alpha)$$

Explique então como, a partir desta fórmula, deduzimos que

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

para ângulos a e b, com $0 < b < a < 90°$.



5. Para uma circunferência de raio r, determine as medidas das cordas dos ângulos

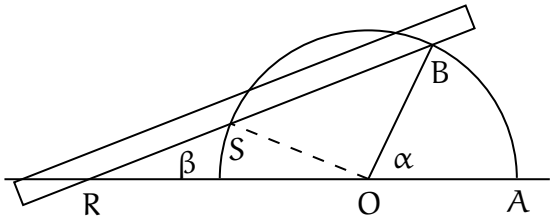
(a) 60° (b) 90° (c) 30° (d) 45° (e) 36° (f) 18°.

4.2 Momentos da história das construções geométricas não euclidianas

A trissecção "trapaceira" de Arquimedes

6. **O problema da trissecção de um ângulo segundo Arquimedes**. Nas construções geométricas com régua e compasso, o problema da trissecção de um ângulo arbitrário é um problema insolúvel (fato elucidado na primeira metade do século 19). No entanto, na Proposição 8 do seu Livro de Lemas, Arquimedes resolve o problema fazendo uso da escala de uma régua graduada, mostrando que o uso de uma régua graduada pode ser poderoso aliado das construções geométricas.

Suponhamos que nos é dado um ângulo agudo AOB a ser trisseccionado, do qual vamos supor $OA = OB$. Prolongamos o segmento OA suficientemente de modo a conter os elementos da construção delineada a seguir. Sobre a reta OA, traçamos um semi-círculo de centro O e raio OA, que passa pelo ponto B.

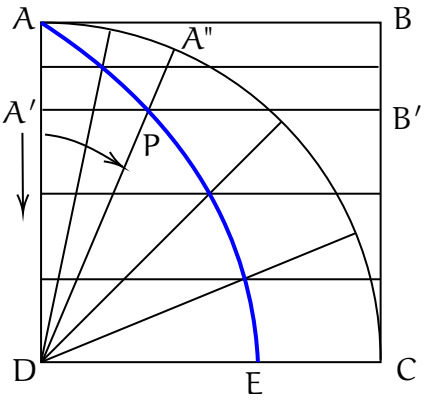


Tomamos então uma régua graduada e traçamos uma reta que passa por B, com a régua estrategicamente posicionada, de tal modo que os pontos R e S satisfaçam $RS = OA$. Um tal procedimento era chamado pelos gregos de construção de um segmento por *neusis*. Mostre que o ângulo $\beta = A\widehat{R}B$ tem $1/3$ da medida do ângulo $\alpha = A\widehat{O}B$.

A trissectriz-quadratriz de Hípias e Dinóstrato

7. Um dos grandes matemáticos de Atenas (onde em 380 a.C. Platão fundou sua Academia), contemporâneo de Sócrates, é Hípias de Élis (c. 460 a.C.– c. 400a.C.).
Hípias descobriu (inventou) uma curva, chamada *trissectriz*, também conhecida como *quadratriz* de Dinóstrato (c. 390 a. C. – c. 320 a.C.).

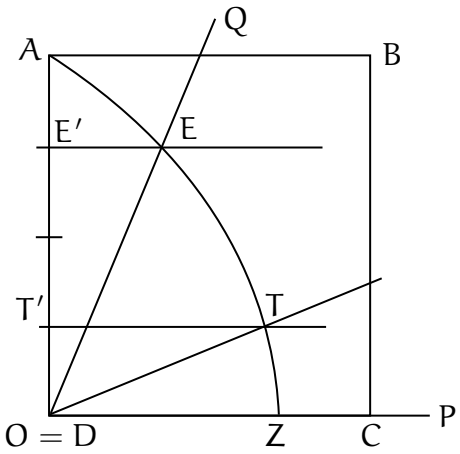
Considere um quadrado $ABCD$, de lado unitário, com AB no topo, DC na base. Imagine que o segmento AB desloca-se (desce paralelamente) em direção à base, à taxa de 1 unidade por minuto. Imagine também que o segmento DA rotaciona-se em torno de D, em direção à posição DC, à taxa de $90°$ por minuto. Em cada instante t, os dois segmentos em movimento encontram-se em um ponto P. O conjunto destes pontos é a *trissectriz* ou *quadratriz*.



(a) Deduza equações paramétricas da quadratriz de Hípias. Use como parâmetro o tempo t da descrição feita no parágrafo anterior. Eliminando o parâmetro t, deduza a equação

da quadratriz em um sistema cartesiano ortogonal, tendo $O = D$ como origem, e os semi-eixos Ox e Oy como prolongamentos dos lados DC e DA, respectivamente.

(b) Com o uso da quadratriz, podemos trisseccionar um ângulo agudo $P\hat{O}Q$ da seguinte forma. Posicione o ângulo $P\hat{O}Q$ de tal forma que O coincida com D e o segmento DC esteja contido na semi-reta OP. O lado (semi-reta) OQ encontra a quadratriz em um ponto E. Por E, traçamos uma paralela a OP, que intersecta AD em E'.
Trisseccionamos o segmento de reta DE' no ponto T' (isto é, construímos $OT' = 1/3$ de DE'). Por T', traçamos uma paralela a OP que encontra a quadratriz em T.
Mostre que $P\hat{O}T$ é $1/3$ de $P\hat{O}Q$.



(c) Usando elementos de Cálculo, mostre que o ponto Z do diagrama da quadratriz, limite do ponto P sobre a quadratriz, quando $y \to 0$, é tal que $OZ = 2/\pi$.

(d) Usando o comprimento OZ e um segmento unitário, explique como construir um segmento de comprimento $\pi/2$ e como construir um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$.

(e) Dado um quadrado de lado a, explique como construir um círculo de área a^2 usando a quadratriz de Hípias, e você terá resolvido o problema de quadratura do círculo.

O problema do oráculo de Delos

8. **O problema da duplicação do cubo**. Segundo Eratóstenes de Cirene (séc. 3 a.C), certa vez na antiga Grécia, habitantes da ilha de Delos perguntaram ao oráculo de Apolo como poderiam combater uma peste que assolava o povo. A resposta do oráculo foi que o altar de Apolo, de forma cúbica, deveria ser duplicado (em volume). Com esta lenda, foi difundido o problema da duplicação do cubo, também chamado de *problema Deliano*, estudado na Academia de Platão.
O problema propõe construir (com régua e compasso) um segmento x tal que $x^3 = 2a^3$, sendo a um segmento dado. Em outras palavras, o problema propõe construir, com régua e compasso, um segmento x tal que o cubo de aresta x tenha o dobro do volume do cubo de aresta a.

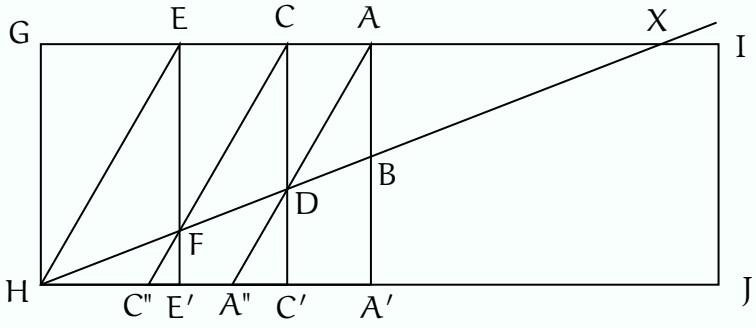
(a) Hipócrates de Quios mostrou que podemos reduzir o problema da duplicação do cubo de aresta a ao problema da *inserção de duas médias proporcionais entre dois segmentos*, ou seja, ao problema de determinar segmentos x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Mostre que se $b = 2a$, então $x = \sqrt[3]{2} \cdot a$.

(b) Formule o que você entende por "problema da duplicação do quadrado". Como é possível resolvê-lo?

O mesolábio de Eratóstenes

(c) Segundo Papus de Alexandria (século 4), o *mesolábio* de Eratóstenes era um instrumento que permitia a inserção de duas médias proporcionais entre dois segmentos a e b.
Três triângulos retângulos congruentes (esquadros bem finos) "deslizam" em um quadro retangular GHIJ. O primeiro esquadro é "fixado" em H.

Sendo B um ponto de AA', alinham-se sobre a semi-reta HB, os pontos F e D, interseções de lados de triângulos consecutivos, como na figura. Mostre que
$$\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{EF} = \frac{EF}{GH}$$

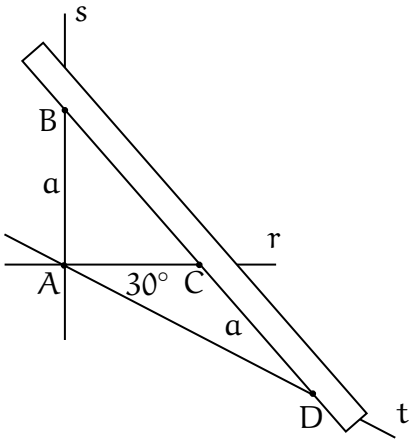


Sugestão: Use semelhança de triângulos, justificando em cada caso. Por exemplo, $ABD \sim CDF$, daí $\frac{AB}{CD} = \frac{AD}{CF}$. Também $ACD \sim CEF$, daí $\frac{AD}{CF} = \frac{CD}{EF}$.
Finalmente mostre que, portanto, se $AB = a$ e $GH = 2a$, então $CD = \sqrt[3]{2}a$.

Solução alternativa do problema da duplicação do cubo

9. O problema Deliano, ou problema da duplicação do cubo, consiste em construir, a partir de um segmento de comprimento a, um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}a$.
Este problema pode ser resolvido com o uso de compasso e uma régua graduada, por um procedimento chamado *neusis* (método usado no problema 6).

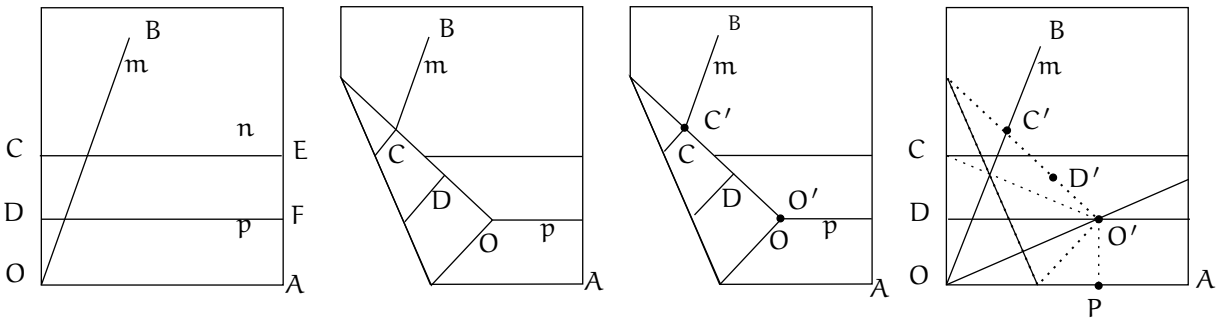
De David Wells, Dicionário de Geometria Curiosa. Trace duas retas perpendiculares r e s, sendo r horizontal e s vertical, cruzando-se em A. Na reta vertical s, marque acima de A um ponto B, com $\overline{AB} = a$. Trace então uma reta t, abaixo da reta horizontal r, passando por A e formando com r um ângulo de $30°$ (nesse momento usamos também o compasso). Finalmente, trace uma reta u, passando por B, que intersecta as retas r e t em pontos C e D, como na figura, de tal modo a produzir $\overline{CD} = a$. Mostre que o segmento BC terá comprimento igual a $\sqrt[3]{2}a$.



Sugestão: Faça $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = x$, $A\hat{D}C = \theta$, e utilize relações métricas envolvendo triângulos e a lei dos senos.

Trissecção por dobraduras

10. **Trissecção de um ângulo, por dobraduras**. A trissecção de um ângulo agudo pode ser feita mediante um procedimento de dobraduras (origami). O estudo de construções geométricas por dobraduras (origami) tem sido um tema de interesse nas últimas décadas. Acompanhe o texto do problema raciocinando com os diagramas abaixo.



Inicialmente, consideramos uma folha retangular de papel, de tamanho adequado para dobraduras. Indicaremos então o ângulo a ser trissecionado AOB, sendo OA um lado da folha retangular, e o lado $\mathfrak{m} = OB$ demarcado por um vinco (dobra) no papel.

Por uma dobra $\mathfrak{n} = CE$, paralela a OA, e por uma dobra subsequente $\mathfrak{p} = DF$, como indicado nas ilustrações, são demarcadas duas faixas retangulares de mesma largura (congruentes), paralelas à base OA.

Dobramos então o papel, por uma dobra que posicione o ponto C na linha $\mathfrak{m}$ (sobre C'), e o ponto O na linha $\mathfrak{p}$ (sobre um ponto O'). Demarcamos, por um vinco $C'O'$ se necessário, o ponto O'.

Demonstre que o vinco OO' trissectará o ângulo $A\widehat{O}B$. *Sugestão.* Mostre que triângulos $OO'C'$ e $O'OC$ são congruentes, bem como os triângulos retângulos OPO', $OD'O'$ e $OD'C'$.

4.3 Descartes e a algebrização dos problemas de construções geométricas

.

Descartes e seu método analítico de estudo de construções geometricas

11. Em seu livro *La Geomètrie*, do início do século XVII, Descartes mostra que as cinco operações básicas da aritmética dos números reais, adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada, correspondem a construções geométricas com régua e compasso, considerando-se como previamente construído um segmento de comprimento 1, isto é, um *segmento unitário.*
Modernizando a abordagem de Descartes, isto é feito da seguinte maneira. No plano euclidiano das construções geométricas, o ponto de partida são dois pontos A e B, sendo AB um segmento unitário, isto é, com uma unidade de comprimento.
Os pontos A e B, do segmento unitário inicial, são *pontos construtíveis* iniciais. Uma reta, nesse plano, é construtível se passa por dois pontos construtíveis. Um segmento é construtível se suas extremidades são pontos construtíveis, e o seu comprimento é um número real construtível. Uma circunferência é construtível se tem como centro um ponto construtível e passa por um ponto construtível. Um ponto de interseção de duas linhas (duas retas, duas circunferências, ou uma reta e uma circunferência) construtíveis é também um ponto construtível.
Um número real a é um *número construtível* se, a partir dos pontos A e B, utilizando apenas régua e compasso, é possível construir dois pontos P e Q com $PQ = |a|$.

Explique por que se a e b são números reais construtíveis, então também são construtíveis os números $a + b$, $a - b$, ab , a/b (se $b \neq 0$), e $\sqrt{|a|}$. *Sugestão:* Admita que se temos dois segmentos de comprimentos $|a|$ e $|b|$, é possível construir, em uma reta dada, pontos P, Q e R, com Q entre P e R, $PQ = |a|$, e $QR = |b|$. Esta possibilidade é garantida pelo resultado do problema 12.

12. Na proposição 2, Livro I, dos *Elementos*, Euclides trata de resolver o seguinte problema de construção geométrica. Dado um ponto P e um segmento CD, determinar um ponto Q satisfazendo $PQ = CD$. Hoje em dia, nas construções geométricas, nós "transferimos" segmentos usando o compasso. Nas regras de construções geométricas citadas anteriormente não há esse conceito. Mas Euclides mostra que é sempre possível "transladar" um segmento seguindo as regras estritas de construções geométricas, isto é, traçando apenas retas e círculos. Explique como isso pode ser feito (geometricamente).

13. Dizemos que um ângulo θ $(0 < \theta < 180^\circ)$ é construtível se é possível construir pontos A, B e C tais que o ãngulo $A\widehat{B}C$ tem medida θ. Mostre que um ângulo θ é construtível se e somente se o número real $\cos\theta$ é construtível.

4.4 Construções geométricas impossíveis são reveladas

14. Em 1837, Pierre Laurent Wantzel, estudando construções geométricas do ponto de vista analítico, descobriu e publicou o seguinte teorema.

O teorema de Wantzel sobre números construtíveis

Teorema (Wantzel) *Suponhamos que* $u > 0$ *é um número real construtível (ou seja, o comprimento de um segmento de reta construtível), com régua e compasso, a partir de um segmento unitário dado. Se* u *é raiz de uma equação do terceiro grau, de coeficientes inteiros,*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

então essa equação também deverá possuir uma raiz racional.

Critério de pesquisa de raízes racionais de polinômios de coeficientes inteiros

Pesquisa de raízes racionais. (Euler, *Elementos de Álgebra*, século 18. Este critério é também atribuído a Descartes.) Se p/q é uma fração de inteiros, primos entre si, e é raiz de um polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, (com $n \geq 1$, $a_n \neq 0$), de coeficientes inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Para memorizar: o **d**enominador q divide o coeficiente **d**ominante, e o numerador p divide o coeficiente constante.
Artigo do Professor Lenimar Nunes Andrade, RPM número 14, acrescenta as seguintes condições necessárias para p e q: $p - q$ é divisor de $f(1)$, e $p + q$ é divisor de $f(-1)$.

Assumindo o teorema de Wantzel, e também o critério de pesquisa de raízes racionais de polinômios de coeficientes inteiros,

(a) Mostre que, partindo-se de um segmento unitário, isto é, um segmento com uma unidade de comprimento, $\cos 20^\circ$ não é um número construtível com régua e compasso. Conclua então que não podemos trissectar o ângulo de 60°. *Sugestão:* Considere a identidade $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Tome $u = \cos\theta$, com $\theta = 20^\circ$, e utilize o teorema de Wantzel.

(b) Mostre que $\sqrt[3]{2}$ não é um número construtível com régua e compasso.

15. Mostre que o heptágono regular não é construtível com régua e compasso, usando números complexos e polinômios, da seguinte maneira. Considere

$$z = \cos\frac{360^\circ}{7} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{360^\circ}{7}.$$

Aplicando a fórmula de De Moivre, $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$, deduza que $z^7 = 1$ e então $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Divida ambos os membros desta equação por z^3, obtendo $z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0$. Mostre então que o número

$u = z + \frac{1}{z} = 2\cos(360°/7)$ satisfaz a equação $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$. Utilize então o teorema de Wantzel.

16. Desenvolva o argumento usado no problema anterior para um pentágono regular, em lugar de um heptágono regular. A que equação chegaremos para $u = 2\cos(360°/5)$? Que conclusões tiraremos?

17. Explique por que não é possível construir, com régua e compasso, um polígono regular de nove lados.

18. Explique por que é teoricamente possível construir, com régua e compasso, um ângulo de $3°$, mas não um ângulo de $2°$.

5

Eventos da história das equações polinomiais

Neste capítulo delineamos um desenvolvimento histórico das equações polinomais de graus 2, 3 e 4, desde o aparecimento das equações do segundo grau na civilização babilônica, até a proposta de um algoritmo, no Renascimento italiano, para se obter algebricamente as soluções de equações polinomiais de quarto grau.

5.1 Equações do segundo grau, dos babilônios a al-Khwarizmi

1. (Diofanto, em *Aritmética*, século 3) Encontre dois números (reais) cuja soma é 10 e cuja soma de seus cubos é 370. Use o método de Diofanto[1] para resolver este problema. *Resposta:* 3 e 7.

   Método de Diofanto

   O Método de Diofanto foi também usado pelos babilônios antigos:

   Se a soma $x + y = s$ é dada, fazemos $x = \frac{s}{2} + a$ e $y = \frac{s}{2} - a$, sendo a um número real.

2. Encontre dois números (reais) cujo produto é 24 e cuja soma dos cubos é 280. Use um método adaptado do método de Diofanto, levando em conta a soma dos cubos. *Resposta:* 4 e 6.

3. Justifique algebricamente que se $x + y = p$, então existe um único número a tal que $x = \frac{p}{2} + a$ e $y = \frac{p}{2} - a$. Ilustre este fato geometricamente, na reta dos números reais.

4. (Diofanto, *Aritmética*) Encontre dois números reais x e y satisfazendo $x - y = 10$ e $x^3 - y^3 = 2170$. Use o método alternativo de Diofanto. *Resposta:* $x = 13$, $y = 3$.

[1] B. L. van der Waerden. The "Sum and Difference" Method, em Geometry and Algebra In Ancient Civilizations, p. 62. Springer, 1983.

Método alternativo de Diofanto

Se a diferença $x - y = d$ é dada, temos $x = a + \frac{d}{2}$ e $y = a - \frac{d}{2}$, para algum número real a.

5. (Diofanto, *Aritmética*) Encontre dois números x e y satisfazendo $x - y = 4$ e $x^3 + y^3 = 28(x + y)$. *Resposta:* $x = 6$ *e* $y = 2$; *ou* $x = 2$ *e* $y = -2$; *ou* $x = -2$ *e* $y = -6$. *Diofanto porém buscava somente soluções não negativas.*

Equações do segundo grau na babilônia

Um método babilônico para equações do segundo grau (1600-1900 a.C.) segundo Bunt, Jones & Bedient, em *The Historical Roots of Elementary Mathematics, Dover Publications, 1988.*

Considere a equação $x^2 - 6x = 27$.
Escreva-a na forma $x \cdot (x - 6) = 27$. Faça $x - 6 = y$.
O problema então consiste em determinar x (e também y, embora só estejamos buscando valores de x) satisfazendo $x - y = 6$ e $xy = 27$.
Aqui os babilônios aplicavam o método mais tarde usado por Diofanto, escrevendo primeiramente $x = 3 + a$, $y = 3 - a$. Diofanto, tal como os babilônios, só procurava soluções positivas da equação.

6. Resolva a equação $x^2 - 6x = 27$, pelo *método babilônico.*

Resposta: $x_1 = 9$, $x_2 = -3$

7. Resolva as seguintes equações, pelo método babilônico, descrito no problema 6:

(a) $x^2 + 6x = 16$. *Resposta:* $x_1 = 2$, $x_2 = -8$

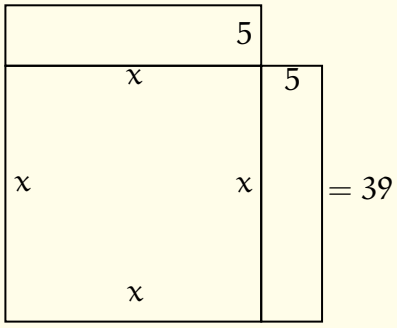
(b) $x^2 - 12x = 28$. *Resposta:* $x_1 = 14$; $x_2 = -2$

O completamento de quadrados de Al-Khwarizmi

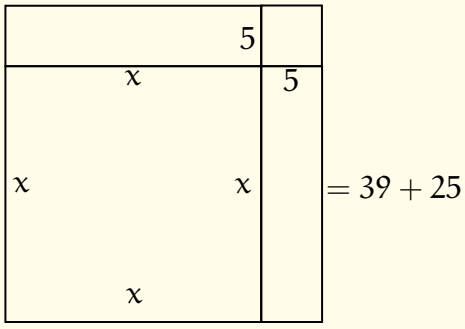
Um método geométrico dos babilônios e de Al-Khwarizmi (Al-Khwarizmi, Al Jabr, *século 9):* para certas equações do segundo grau é descrito a seguir.

Para resolver a equação $x^2 + 10x = 39$,
Al-Khwarizmi primeiramente escreve-a na forma

$$x^2 + 5x + 5x = 39$$



Interpretando geometricamente o lado esquerdo desta equação, como no primeiro diagrama, temos a soma das áreas de um quadrado de lado x e de dois retângulos de lados 5 e x, totalizando 39 unidades de área.
Completando então essa soma de áreas com a área de um quadrado de lado 5, como no segundo diagrama, portanto de área 25, obtem-se a área de um quadrado de lado $x + 5$, medindo então $39 + 25 = 64$ unidades de área.



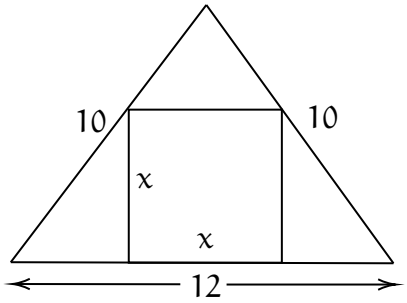
Logo, $(x + 5)^2 = 64$ e então $x + 5 = 8$ (Al-Khwarizmi buscava raízes positivas) e $x = 3$.

8. Determine as raízes complexas de $x^2 - 16x + 80 = 0$, por um procedimento baseado no método babilônico descrito no problema 6.

9. Resolva as seguintes equações, por método similar ao método geométrico de Al-Khwarizmi, também usado pelos babilônios antigos[2], descrito no destaque a seguir.

   (a) (Al-Khwarizmi) $x^2 + 10x = 29$ (b) $x^2 + 14x = 72$
   (c) (Al-Khwarizmi) $x^2 - 12x = 28$ (invente um método geométrico para esta)

10. Al-Khwarizmi também estudou equações de primeiro grau. Como aplicação dessas equações na geometria ele formulou o seguinte problema de Heron (75 a.D.). Encontre o lado de um quadrado inscrito em um triângulo de lados 10, 10 e 12.
Resposta: O quadrado tem lado de comprimento 4,8.



[2] Tatiana Roque & João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. SBM, 2014.

5.2 Bháskara e poesia nas equações do segundo grau

11. (Bháskara[3], em *Lilavati*, século 12) A raiz quadrada da metade das abelhas de um enxame voa para um arbusto de jasmim; seguindo-as vão também $8/9$ de todo o enxame; restam ainda duas abelhas: uma fêmea que zumbe para um macho preso em uma flor de lótus, tendo sido atraído para a flor pela fragrância. Diga, linda donzela, o número de abelhas do enxame. *Resposta:* 72.

12. (Bháskara, em *Lilavati*) De um bando de gansos, um par permaneceu nadando na superfície de um lago, e viu sete vezes a metade da raiz quadrada do número de gansos do bando retirar-se à margem, cansados da diversão. Diga-me, querida, o número de gansos do bando. *Resposta:* 16.

13. A fórmulas

$$\boxed{\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

$$\boxed{\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

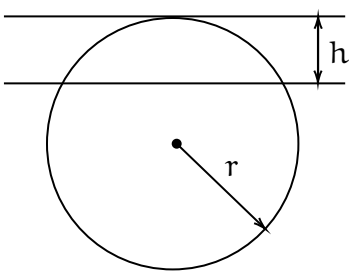
em que a e b são números reais positivos, $a > \sqrt{b}$, são creditadas a Bháskara. Deduza-as escrevendo primeiramente $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{m} \pm \sqrt{n}$, e então elevando ao quadrado ambos os membros. Posteriormente pode ser usado um procedimento de Diofanto:

$$m+n = a \text{ com } m \geq n \implies m = \frac{a}{2} + t,\ n = \frac{a}{2} - t, \text{ sendo } t \geq 0$$

Use as fórmulas de Bháskara para deduzir que $\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \pm 1$ e $\sqrt{7 \pm 2\sqrt{10}} = \sqrt{5} \pm \sqrt{2}$.

5.3 Equações do terceiro grau com Arquimedes e Omar Khayyam

14. Arquimedes de Siracusa, no século 3 a.C., em seu trabalho *Sobre esferas e cilindros*, propôs o problema de cortar uma esfera por um plano de modo que uma das partes resultantes tivesse o dobro do volume da outra parte.



Se o plano que corta a esfera de raio r é visto de perfil, como ilustrado na figura, então o volume do *segmento esférico de altura* h (uma das partes da esfera quando esta é cortada por um plano) é dado por $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)}$.

[3] Bhaskara II ou Bhaskaracharya, matemático indiano, um dos maiores matemáticos do século 12.

(a) Mostre que, sendo $h/r = y$, se o segmento inferior da esfera tem o dobro do volume do superior, então

$$y^3 - 3y^2 = -\frac{4}{3}$$

(b) Mostre que fazendo-se $y = x + 1$, obtemos a *equação cúbica na forma reduzida*

$$x^3 - 3x - \frac{2}{3} = 0$$

15. Omar Khayyam (1050–1123), estudioso islâmico, poeta, astrônomo, e também matemático, estudou equações cúbicas não algebricamente, mas geometricamente, interpretando suas raízes como abscissas de interseções de cônicas.

Mostre que uma raiz real x_0 da equação $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com b, c e d reais, $d \neq 0$, pode ser interpretada como a abscissa de um ponto de interseção das curvas $y = x^2 + bx + c$ (parábola) e $xy = -d$ (hipérbole de retas assíntotas $x = 0$ e $y = 0$).

Usando noções de continuidade, interprete o problema geometricamente nos casos $d < 0$ e $d > 0$, verificando que um tal ponto de interseção sempre existirá.

5.4 Os italianos propõem "fórmulas" para equações do terceiro grau

16. Girolamo Cardano, no século 16, em seu livro *Ars Magna*, deduziu a fórmula de *del Ferro-Tartaglia-Cardano*, para encontrar uma solução real de uma equação cúbica reduzida. No nosso contexto, uma *equação cúbica reduzida* é uma equação polinomial do terceiro grau, da forma $x^3 + Px + Q = 0$, sendo P e Q números reais.

Fórmula de del Ferro-Tartaglia-Cardano em versão modernizada

Consideremos a equação cúbica $x^3 + Px + Q = 0$, sendo P e Q números reais. Seja $D = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$, que chamaremos de discriminante da cúbica. Se $D \geq 0$, então uma das raízes reais da equação cúbica é dada por

$$x_0 = \sqrt[3]{-Q/2 - \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-Q/2 + \sqrt{D}}$$

Encontre uma raiz real de cada uma das seguintes equações, usando a fórmula de Cardano.

(a) (Cardano, *Ars Magna*) $x^3 + 6x = 20$. *Resposta:* $x_0 = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$

(b) (Cardano, *Ars Magna*) $x^3 + 3x = 10$. *Resposta:* $x_0 = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} + \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$

(c) $x^3 + 6x + 2 = 0$. *Resposta:* $x_0 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$

(d) $x^3 - 3x + 2 = 0$. *Resposta:* $x_0 = -2$

5.5 Deduzindo a fórmula de Cardano

17. Considere o polinômio $f(x) = x^3 + Px + Q$, com P e Q reais. Suponha que o *discriminante* $D = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$ satisfaz $D \geq 0$. Vamos deduzir a fórmula de Cardano para uma raiz real de $f(x)$, seguindo o seguinte roteiro (veja a fórmula no quadro acima, exercício 16).

    (a) Mostre que, sendo u e v números reais, temos $(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0$.

    (b) Sendo u e v reais, mostre que se tivermos $3uv = -P$ e $u^3+v^3 = -Q$ então $x_0 = u+v$ será raiz de $f(x)$.

    (c) Mostre que se $3uv = -P$ e $u^3+v^3 = -Q$ então $y_1 = u^3$ e $y_2 = v^3$ são as raízes da equação quadrática $y^2 + Qy - \frac{P^3}{27} = 0$.

    (d) Determinando as raízes da equação quadrática $y^2 + Qy - \frac{P^3}{27} = 0$, e supondo $u \geq v$, conclua que $u = \sqrt[3]{-Q/2 + \sqrt{D}}$ e $v = \sqrt[3]{-Q/2 - \sqrt{D}}$, e que portanto $x_0 = \sqrt[3]{-Q/2 + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-Q/2 - \sqrt{D}}$.

18. Neste problemas deduziremos que a cúbica reduzida possui duas raízes complexas quando $D > 0$, e apenas raízes reais quando $D = 0$. Considere o polinômio $f(x) = x^3 + Px + Q$, com P e Q reais. Suponha que o *discriminante* $D = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$ satisfaz $D \geq 0$.

    Como vimos, no problema 17, tomando-se u e v satisfazendo $u \geq v$, $3uv = -P$ e $u^3+v^3 = -Q$, teremos $u = \sqrt[3]{-Q/2 + \sqrt{D}}$, $v = \sqrt[3]{-Q/2 - \sqrt{D}}$, e o número real $x_0 = u+v$ será raiz real de $f(x)$. Vamos agora determinar as demais raízes de $f(x)$.

    (a) Considere que $f(x) = x^3 - (3uv)x - (u^3+v^3)$ (explique o porquê). Usando o algoritmo de Briot-Ruffini, divida $f(x)$ por $x - x_0$, mostrando que

    $$f(x) = (x - (u+v))\left(x^2 + (u+v)x + (u^2 - uv + v^2)\right)$$

    (b) Usando o fato deduzido no item anterior, mostre que as demais raízes de $f(x)$ são dadas por

    $$x_1 = -\frac{u+v}{2} + \frac{(u-v)\sqrt{3}}{2}\,i \qquad x_2 = -\frac{u+v}{2} - \frac{(u-v)\sqrt{3}}{2}\,i$$

    (c) Conclua justificando então os seguintes fatos: Se $D > 0$, $f(x)$ tem uma raiz real e duas raízes complexas (conjugadas) não reais. Se $D = 0$, $f(x)$ tem três raízes reais, sendo duas delas (ao menos duas) coincidentes.

19. Usando os resultados dos problemas 17 e 18, Determine todas as raízes das equações cúbicas dos itens c e d do problema 16.

    Respostas: (c) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ e $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})/2 \pm (\sqrt{3}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})i)/2$; (d) -2 (raiz simples) e 1 (raiz dupla).

20. Considere a equação cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b e c coeficientes reais, $a \neq 0$. Mostre que a substituição $x = y - \dfrac{a}{3}$, descoberta por Tartaglia, transforma a equação dada numa *equação cúbica na forma reduzida*, isto é, da forma $y^3 + Py + Q = 0$.

21. Calcule as raízes reais e complexas da equação $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$.

Resposta: A única raiz real da equação dada é $-1 + u + v$, e as raízes complexas são $-1 - \frac{u+v}{2} \pm \frac{u-v}{2}\sqrt{3}i$, sendo $u = \sqrt[3]{(3+\sqrt{5})/2}$ e $v = \sqrt[3]{(3-\sqrt{5})/2}$.

22. ## 5.6 Euler e Descartes nos ensinam a buscar raízes racionais

Pesquisa de raízes racionais de polinômios de coeficientes inteiros

(Euler, Elementos de Álgebra*, século 18. Este critério é também atribuído a Descartes.)* Se p/q é uma fração de inteiros, primos entre si, e é raiz de um polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, (com $n \geq 1$, $a_n \neq 0$), de coeficientes inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Para memorizar: o **d**enominador q divide o coeficiente **d**ominante, e o numerador p divide o coeficiente constante.

Artigo do Professor Lenimar Nunes Andrade, RPM número 14, acrescenta as seguintes condições necessárias para p e q: $p - q$ é divisor de $f(1)$, e $p + q$ é divisor de $f(-1)$.

Encontre as soluções das equações cúbicas seguintes, determinando uma delas através de pesquisa de raízes racionais.

(a) (Cardano) $x^3 + 10x = 6x^2 + 4$. *Resposta:* 2 e $2 \pm \sqrt{2}$.

(b) (Cardano) $x^3 + 6x - 20 = 0$. *Resposta:* 2 e $-1 \pm 3i$.

(c) $x^3 - 12x^2 + 26x - 12 = 0$. *Resposta:* 2 e $5 \pm \sqrt{19}$.

23. Mostre que $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ é um número inteiro. *Sugestão*: Temos $a = u - v$, sendo $u = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ e $v = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$. Mostre que $a^3 = -4 - 3a$ e então a é raiz da equação cúbica $x^3 + 3x + 4 = 0$. Pelo resultado deduzido no problema 18, esta equação possui uma única raiz real, que é um inteiro fácil de ser adivinhado.

24. Encontre todas as raízes das equações dadas abaixo, através de pesquisa de raízes racionais.

(a) $x^3 + 6x^2 + 10x + 4 = 0$. *Resposta:* -2 e $-2 \pm \sqrt{2}$.

(b) $4x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = 0$. *Resposta:* $-1/2$ e $-1 \pm \sqrt{2}/2$.

(c) $x^3 + 12x^2 + 26x + 12 = 0$. *Resposta:* -2 e $-5 \pm \sqrt{19}$.

(d) $12x^3 + 26x^2 + 12x + 1 = 0$. *Resposta:* $-1/2$ e $(-5 \pm \sqrt{19})/6$.

(e) $2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 19x - 15 = 0$

Resposta: $-3/2$, $u + v$, e $-\frac{u+v}{2} \pm \frac{(u-v)\sqrt{3}\,i}{2}$, sendo $u = \sqrt[3]{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}$, $v = \sqrt[3]{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}$

25. Demonstre o critério de Euler para pesquisa de raízes racionais:

Se p/q é uma fração de inteiros, primos entre si, e é raiz de um polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(com $n \geq 1$, $a_n \neq 0$), de coeficientes inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Sugestão: Por hipótese, $a_n(p/q)^n + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + \cdots + a_1(p/q) + a_0 = 0$. Multiplicando ambos os membros por q^n, obtemos $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$.

Isolando o termo $a_n p^n$ concluiremos que $q \mid a_n p^n$.

Como $\text{mdc}(p, q) = 1$, temos $\text{mdc}(p^n, q) = 1$, logo $q \mid a_n$. Analogamente, conclui-se que $p \mid a_0$.

26. Demonstre que são irracionais os seguintes números reais.

(a) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ (c) $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ (d) $\cos 20°$ (e) $\cos 12°$

Sugestão: Para cada um dos números reais dados, encontre uma equação polinomial, de coeficientes inteiros, que tenha o número dado como raiz. Use o critério de pesquisa de raízes racionais, enunciado no quadro do problema 22 para determinar a natureza das raízes racionais da equação. Fórmulas que podem ser úteis nos itens d e e: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$.

5.7 O método trigonométrico de François Viète

O método de Viète para equações cúbicas com discriminante negativo

O método de François Viète (século 16), para buscar raízes de uma equação cúbica reduzida $x^3 + Px + Q = 0$, consiste em primeiramente assumir que a raiz procurada tem a forma $x = r\cos\theta$, com $r > 0$.
Substituímos esta expressão de x na equação cúbica. Multiplicamos então a igualdade resultante por $4/r^3$, e igualamos os coeficientes da equação assim obtida (em r e θ) aos coeficientes da identidade $4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta = 0$.
No caso geral, para uma equação $x^3 + Px + Q = 0$, com P e Q reais, por este método obtemos $r = \sqrt{-\frac{4P}{3}}$ e procuramos θ satisfazendo $\cos 3\theta = -\frac{4Q}{r^3}$.
Um primeiro θ_0 (com $0 \leq \theta_0 \leq 90°$) é obtido fazendo-se $3\theta_0 = \arccos\left(-\frac{4Q}{r^3}\right)$, dando $x_0 = r\cos\theta_0$ como uma raiz da cúbica. Outras duas raízes são obtidas tomando-se $\theta_1 = \theta_0 + 120°$ e $\theta_2 = \theta_0 + 240°$. O método de Viète funciona apenas se $D \leq 0$.

27. Calcule as raízes de $x^3 - 15x - 4 = 0$ (uma equação estudada por Rafael Bombelli, matemático italiano do final do século 16) pelo método de Viète. Usando uma calculadora científica, obtenha valores aproximados dessas raízes.

Resposta: Temos $r = 2\sqrt{5}$ e $\cos 3\theta = \frac{2}{5\sqrt{5}}$, e então $\theta_0 = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)$. Tomamos em seguida $\theta_1 = \theta_0 + 120°$, $\theta_2 = \theta_0 + 240°$, e obtemos as raízes (usando uma calculadora) $x_0 = r\cos\theta_0 = 4$, e as aproximações $x_1 = r\cos\theta_1 \approx -0,268$ e $x_2 = r\cos\theta_2 \approx -3,732$.

28. Calcule as raízes da equação do problema 27 usando pesquisa de raízes racionais.

    Resposta: 4 e $-2 \pm \sqrt{3}$.

29. Mostre que se $D = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} < 0$, o método de Viète para a equação cúbica $x^3 + Px + Q = 0$, com P e Q reais, nos dá as três raízes reais da equação. Mostre que não é possível obter nenhuma raiz da cúbica, pelo método de Viète, quando $D > 0$. *Sugestão*: Mostre que se $D < 0$ então $P < 0$ e $\left(\frac{4Q}{r^3}\right)^2 < 1$. E se $D > 0$ então $P > 0$ (e então não é possível determinar r), ou $P < 0$ e $\left(\frac{4Q}{r^3}\right)^2 > 1$ (e então não é possível determinar θ).

30. Calcule as raízes da equação cúbica $x^3 - 6x - 4 = 0$ usando o método de Viète.

    Resposta: $x_0 = 2\sqrt{2}\cos 15° = 1 + \sqrt{3}$, $x_1 = 2\sqrt{2}\cos 135° = -2$, e $x_2 = 2\sqrt{2}\cos 255° = 1 - \sqrt{3}$. Lembre-se de que $\cos 15° = \cos(45° - 30°)$, etc.

31. Verifique que a equação cúbica reduzida, do problema de Arquimedes (problema 14), tem discriminante D negativo. Verifique que o problema de Arquimedes tem solução única, sendo dada por

$$\frac{h}{r} = y = 1 + 2\cos\theta, \quad \theta = \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

    e que isto nos dá $\frac{h}{r} \approx 0{,}773926$.

5.8 Natureza das raízes da cúbica conforme o sinal do discriminante

32. (a) Usando cálculo diferencial, mostre que sendo $D = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$, se $D > 0$, então o gráfico de $f(x) = x^3 + Px + Q$ corta o eixo x em um único ponto, e portanto f tem uma única raiz real.

    Sugestão: Divida o problema em dois casos, sendo eles $P > 0$ (o que acarreta $D > 0$) e $P < 0$ (com $D > 0$). No caso $P > 0$ mostre que f é estritamente crescente. No caso $P < 0$, suponha $P = -3a^2$ e mostre que f é crescente em cada um dos intervalos $]-\infty, -a]$ e $[a, +\infty[$, e é decrescente no intervalo $[-a, a]$, e que os pontos de máximo e mínimo locais de f são $-a$ e a, respectivamente. Mostre então que $f(a)f(-a) = 4D > 0$. Faça interpretação geométrica dos fatos deduzidos e conclua que f tem uma única raiz real.

    (b) Usando cálculo diferencial, mostre que sendo $D = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$, se $D < 0$, então $f(x) = x^3 + Px + Q$ tem três raízes reais distintas.

    Sugestão: Neste caso, podemos supor $P = -3a^2$ (pois $D < 0 \Rightarrow P < 0$). Como no problema do item anterior, os pontos de máximo e mínimo locais de f são $-a$ e a, respectivamente. Mostre então que $f(a)f(-a) = 4D < 0$. Faça interpretação

geométrica dos fatos deduzidos para concluir que f tem três raízes reais distintas entre si.

33. *Natureza das raízes da cúbica conforme o sinal do discriminante, um método algébrico.* Considere o polinômio $f(x) = x^3 + Px + Q$, sendo P e Q números reais. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes de $f(x)$. Podemos supor $x_1 = a - r$, $x_2 = a + r$, sendo r real ou $r = bi$, com b real. Explique por quê.

    (a) Usando relações entre coeficientes e raízes (descobertas por Albert Girard, século 17), mostre que $x_3 = -2a$, $P = -3a^2 - r^2$, $Q = 2a(a^2 - r^2)$.

    (b) Mostre que sendo $D = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$, temos $D = -\frac{1}{27}r^2(9a^2 - r^2)^2$

    (c) Mostre então que podemos concluir as três implicações:

        i. $D < 0 \Rightarrow$ as três raízes de $f(x)$ são reais e distintas entre si;

        ii. $D = 0 \Rightarrow$ as três raízes de $f(x)$ são reais e ao menos duas são coincidentes;

        iii. $D > 0 \Rightarrow$ somente uma das raízes de $f(x)$ é real.

5.9 Equações do quarto grau. Um discípulo ensina seu mestre

34. Ludovico Ferrari, discípulo de Cardano, criou um método (não uma fórmula, como veremos) para encontrar raízes de uma equação quártica geral. Chamamos de *equação quártica* geral uma equação polinomial da forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Os passos do método, com adaptações livres e modernizadoras, é o seguinte.

    Primeiramente, escrevemos a equação equivalente $x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$.

    Completando o quadrado do primeiro membro, chegamos à seguinte equação equivalente à equação quártica dada:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 = -bx^2 - cx - d + \frac{1}{4}a^2x^2$$

    ou seja,

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 = \left(-b + \frac{1}{4}a^2\right)x^2 - cx - d \tag{5.1}$$

    Na tentativa de forçar que o segundo membro da equação tenha a forma $A(x+B)^2$, somamos um parâmetro t à expressão dentro dos parênteses do primeiro membro e desenvolvemos o quadrado perfeito:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + t\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 + 2\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)t + t^2$$

    Substituímos então o termo $\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2$ pelo segundo membro da equação (5.1):

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + t\right)^2 = \left(-b + \frac{1}{4}a^2\right)x^2 - cx - d + 2\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)t + t^2$$

Rearranjando os termos temos uma nova equação equivalente à quártica original:

$$\left(x^2+\frac{1}{2}ax+t\right)^2=\left(-b+\frac{1}{4}a^2+2t\right)x^2+(-c+at)x+(-d+t^2)$$

Se a expressão quadrática do segundo membro tiver discriminante $\Delta=0$, ela terá duas raízes coincidentes e terá então a forma almejada.

Determinando um número real t_0 que faça $\Delta=0$ (mostre que isto é sempre possível, pois $\Delta=0$ nos dá uma equação do terceiro grau em t, de coeficientes reais), a equação quártica dada inicialmente passa a ser equivalente a uma equação da forma

$$\left(x^2+\frac{1}{2}ax+t_0\right)^2=\pm A(x+B)^2 \quad \text{(com } A \text{ e } B \text{ reais, } A\geq 0\text{)}$$

Para treinar o método, complete os detalhes do seguinte exemplo. A quártica dada é

$$x^4+2x^3-13x^2+2x+1=0$$

Usando o truque de Ferrari, mostre que ela é equivalente à equação $\left(x^2+x+1\right)^2=16x^2$.

Deduza então suas raízes: $(3\pm\sqrt{5})/2$, $(-5\pm\sqrt{21})/2$

35. Usando o método de Ferrari, descrito no exercício anterior,

    (a) mostre que a quártica $x^4+x^3-6x^2-x+1=0$ é equivalente à equação $\left(x^2+\frac{x}{2}-1\right)^2=\frac{17}{4}x^2$, e determine suas raízes;

    Resposta: $-\frac{1-\sqrt{17}}{4}\pm\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$, $-\frac{1+\sqrt{17}}{4}\pm\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$.

    (b) determine as raízes de $x^4-10x^2+4x+8=0$. *Resposta:* $1\pm\sqrt{3}$, $-1\pm\sqrt{5}$.

36. Resolva a equação quártica $x^4+2x^3-13x^2+2x+1=0$ (do problema 34), cujo polinômio tem iguais os coeficientes equidistantes dos extremos (um polinômio *simétrico*), da seguinte maneira. Divida ambos os membros por x^2 (potência de x do termo central do polinômio). Faça $u=x+\frac{1}{x}$, obtendo $u^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$ e então resolva a equação resultante em u. Finalmente calcule os valores procurados de x, resolvendo a equação $x+\frac{1}{x}=u$.

Referências Bibliográficas

[1] Anglin, W. S. Mathematics: A Concise History and Philosophy. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1994.

[2] Anglin, W. S., Lambeck, J. The Heritage of Thales. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1995.

[3] Bedient, J., Bunt, L., Jones, P. The Historical Roots of Elementary Mathematics. Dover, New York, 1988.

[4] Berlinghoff, W. P., Gouvêa, F. Q. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Trad. Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2008

[5] Bortolossi, H. J. e Martins, C. O. L. F. "A Decomposição de números racionais positivos em frações egípcias: Os Teoremas de Fibonacci/Sylvester e Erdös/Stein e um correspondente Applet JavaScript". PMO v.10, n.4, 2022, pp. 530-540.

[6] Eves, H. Introdução á História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Ed. Unicamp, Campinas, 2004.

[7] Gillings, R. G. "Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus". The Mathematics Teacher, Vol. 55, No. 1 (January 1962), pp. 61-69.

[8] Gillings, R. G. Mathematics in The Time of The Pharaos. Dover Publications Inc.: New York, 1982.

[9] Katz, V. A History of Mathematics An Introduction 2nd ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.

[10] Roque, T., Carvalho, J. L. P. Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[11] Sampaio, J. C. V. "Decompondo frações da forma $2/\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ ímpar, como soma de duas frações unitárias distintas, de todas as formas possíveis". PMO v.13, n.2, 2025, pp. 185-192.