Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

APLICAÇÕES DE *ORIGAMI* COM RECORTES COMO FORMAS DE ENSINO

Autor: EDUARDO CAVACAMI

Orientadora: Profa. YOLANDA KIOKO SAITO FURUYA

Disciplina: Trabalho de Graduação A

Profs Responsáveis: Artur Darezzo Filho
Margarete Tereza Zanon Baptistini

São Carlos, 16 de novembro de 2007.

APLICAÇÕES DE *ORIGAMI* COM RECORTES COMO FORMAS DE ENSINO

Autor: EDUARDO CAVACAMI

Orientadora: Profa. YOLANDA KIOKO SAITO FURUYA

Disciplina: Trabalho de Graduação A

Profs Responsáveis: Artur Darezzo Filho
Margarete Tereza Zanon Baptistini

São Carlos, 16 de novembro de 2007.

Agradecimentos

Preliminares

No Trabalho de Graduação A foi feito um estudo sobre as dobraduras com recortes e alguns sólidos de Platão. Na parte das dobraduras com recortes foram apresentados os princípios básicos da dobradura, secções de segmentos, algumas aplicações do Teorema de Pitágoras, seguido das construções de alguns polígonos e os poliedros platônicos de faces triangulares. Tudo procurando demonstrar matematicamente cada dobra executada.

O Trabalho de Graduação B é uma continuidade do que foi apresentado anteriormente, completando os poliedros platônicos, procurando trabalhar as construções e as dualidades, ilustrando-as, além dos ensaios sobre animações de dobraduras com GeoGebra e Maple.

As figuras que auxiliam nas construções não constam na listagem por serem extensões dos textos.

Resumo

Este trabalho trata do relacionamento entre a Geometria e o *Origami*, através da implementação de dobraduras para apresentação de resultados da Geometria e o uso da mesma para justificar as construções. Com isto estamos lidando com mais uma metodologia de ensino e estudo da Geometria Elementar, com o uso de uma técnica milenar, concreta e divertida, além de acessível a qualquer pessoa.

Serão apresentados alguns problemas da Geometria Plana, como subdivisões de segmentos e de ângulos, problemas envolvendo áreas, construções de pentágonos regulares e triângulos equiláteros, montagem de poliedros de Platão, procurando destacar toda Matemática envolvida na dobradura.

O assunto envolve a Geometria aplicada na Educação, desde a infantil até os níveis superiores, com uma vantagem, a possibilidade de tocarmos os resultados.

Sumário

1 Introdução 1

2 O Material 2

3 O Método 4

4 Secções 6

4.1 Um método de secção de segmentos 6

4.2 Outro método de secção de segmento 9

4.3 Trissecção do ângulo 11

5 Quadrado 13

5.1 Divisão 13

5.2 Proporção 14

6 Quadratura do Retângulo 17

7 Pentágono 21

8 Poliedros 26

8.1 Os Sólidos de Platão 26

9 Poliedros de faces triangulares 28

9.1 Retângulos especiais 29

9.2 Construção das unidades 32

9.3 Montagem dos poliedros 36

9.3.1 Tetraedro 37

9.3.2 Octaedro 38

9.3.3 Icosaedro 40

10 Poliedros de faces quadradas 43

11 Poliedros de faces pentagonais 47
11.1 Do copo ao pentágono 47
11.2 Dodecaedro 51

12 Poliedros Estrelados 53
12.1 Octaedro estrelado 53
12.2 Icosaedro Estrelado 56

13 Esqueletos 57
13.1 Esqueleto do Octaedro 57
13.2 Esqueleto do icosaedro 59

14 Proporção entre algumas construções poliédricas 61
14.1 Do esqueleto ao cubo 61
14.1.1 Começando o esqueleto do octaedro 61
14.1.2 Cubo 62
14.1.3 Construções prontas 63
14.2 Do esqueleto ao Dodecaedro 63
14.2.1 Começando o esqueleto do icosaedro 63
14.2.2 Dodecaedro 64
14.2.3 Construções prontas 67

15 Auxilio da Informática 68

16 Conclusão 70

Referências Bibliográficas 72

Lista de Figuras

8.1 Tetraedro do com Maple 27
8.2 Dual octaedro do Maple 27
8.3 Dual do icosaedro do Maple 27

9.1 Figura obtida da RPM 15 28

10.1 Figura obtida da RPM 15 43

11.1 Figura obtida da RPM 15 47

12.1 Octaedro estrelado do Maple 53

13.1 Obtido do site: http://www.bpiropo.com.br/fpc20070219.htm . . 60

14.1 Dodecaedro estrelado do Maple 65

15.1 Sequência da animação criado no Maple 68
15.2 Simulações do dobradura no GeoGebra 69

Lista de Tabelas

8.1 Poliedros regulares: faces e suas formas 26

9.1 Poliedros de faces triangulares 28

10.1 Poliedros de face quadrada 43

Capítulo 1

Introdução

As primeiras aplicações da Geometria pelo homem apareceram talvez quando este se deparou com problemas relacionados a divisão de suas terras e também na Astronomia. Desde então é constante a sua presença na vida do homem.

Atualmente é exigência na Educação e um método alternativo é estudado neste trabalho. A aplicação de *Origami* como forma de ensino auxilia no desenvolvimento cognitivo, trazendo assim uma melhor aprendizagem e compreensão da Matemática existente em um pedaço de papel.

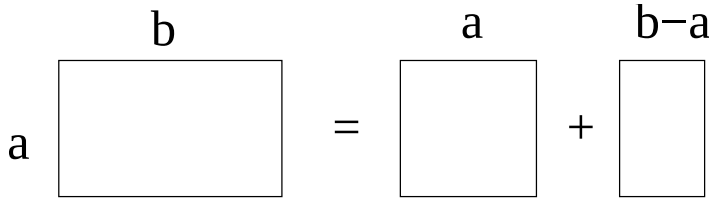
O *Origami*, de origem desconhecida, tem etmologia japonesa e significa dobrar (*ori*) papel (*kami*). Não existem fontes fidedignas da história, porém com a invenção e divulgação do papel na China, monges levaram essa prática para o Japão, onde se tornou popular e até com relações religiosas. Acredita-se que com a dobra de 1000 *Tsuru* (Grou), um pássaro sagrado no Japão, possibilita a realização de um desejo ou reabilitação de uma enfermidade. O *Tsuru* é também símbolo de longevidade e paz. Em 1787, foi publicado o primeiro livro sobre o assunto, o *Senbazuru Orikata* (Como Dobrar Mil Garças). A partir de 1876, o *Origami* passou a fazer parte do currículo escolar no Japão. Na Matemática pode ser tratado pela topologia, geometria e já foi base de estudo em Desenho Industrial. Para um melhor aproveitamento das informações obtidas neste trabalho, é necessário um conhecimento básico em Geometria Elementar, pois todos os resultados obtidos serão demonstrados matematicamente como prova da eficácia do método utilizado.

Capítulo 2

O Material

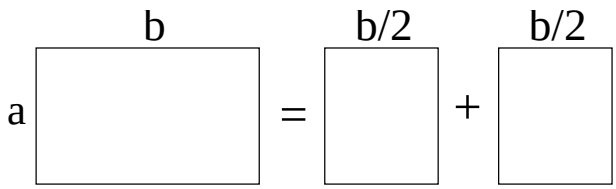
O material fundamental para o *Origami* é qualquer pedaço de papel. Dentre os papéis, seja específico de dobradura ou de qualquer outra qualidade, os mais utilizados são o *Letter* ou carta, o A3, A4, A5, A9, B5, entre outros.

Os papéis utilizados no cotidiano são na maioria de formato retangular, e alguns desses retângulos são denominados retângulos áureos, os quais possuem a seguinte relação:



Temos acima a relação $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{a}$, na qual dado um retângulo, ao subtrairmos o quadrado de lado igual ao lado menor do retângulo, se for, o retângulo restante, proporcional ao inicial. Então são chamados de retângulos áureos.

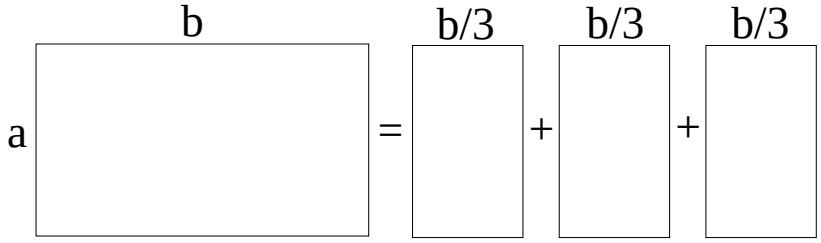
Existem outros retângulos que também serão utilizados neste trabalho, que são os retângulos argênteos e brônzeos. Os argênteos possuem as seguintes características: dividindo-o ao meio, pelo lado maior, temos dois retângulos de mesma proporção ao inicial.



No retângulo acima temos a seguinte relação: $\frac{a}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{a}$. Esta proporção é encontrada nos papéis A5 (14,8 X 21 cm), B5 (18,2 X 25,7 cm) e, principalmente no papel A4 (21 X 29,7 cm), formato designado pela Organização Internacional de Normas (ISO: *International Standards Organization*), pois os mesmos seguem a relação dos retângulos argênteos:

$$\frac{21.0}{29.7} = \frac{\frac{29.7}{2}}{21.0} \Rightarrow \frac{21.0}{29.7} = \frac{14.85}{21.0} \Rightarrow 441 \approx 441.$$

A outra relação existente é a dos retângulos brônzeos. Neste caso, a proporção se mantém ao dividirmos o retângulo inicial pelo lado maior em três retângulos congruentes.



Além do papel, outros materiais que poderemos utilizar são tesoura ou estilete e cola, porém não são imprescindíveis

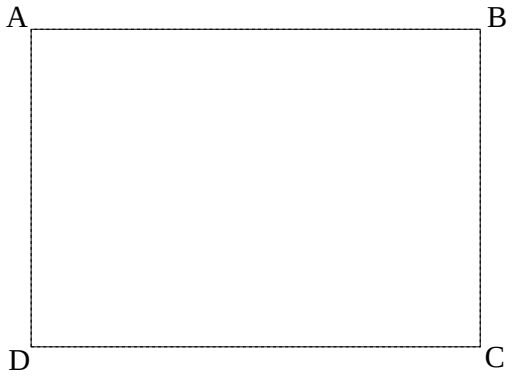
Capítulo 3

O Método

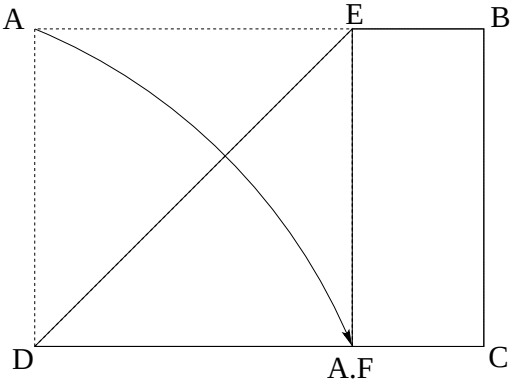
O *Origami* é um método que utiliza basicamente retas. Cada dobra efetuada gera um segmento de reta, e além disso podemos determinar nesta reta o ponto médio, mediatriz, paralelas, perpendiculares passando por um ponto da reta ou fora dela, além de bissetrizes e até trisecção de ângulos.

Afim de não desviar a atenção da construção central, não detalharemos as construções elementares todas as vezes que as utilizarmos, como segue o exemplo a seguir:

Iniciando com uma folha de papel A4, de 21 X 29,7 cm (ou qualquer papel retangular ABCD), podemos obter um quadrado, no caso, de 21 X 21 cm.

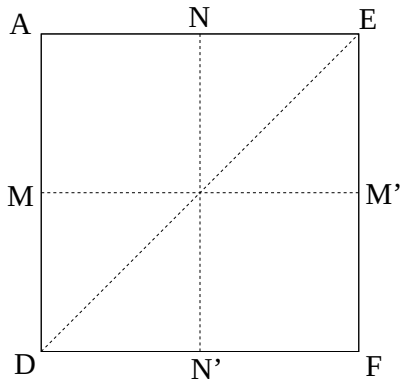


Levar o vértice A até o lado CD, de modo que verificamos em D um eixo de rotação. Verficamos também um novo segmento EF, de mesmo comprimento de $\overline{AE}$, $\overline{AD}$ e $\overline{DF}$. Temos então, o quadrado AEFD.



Dobrando de forma que se conduza o vértice A a D e E a F, obteremos uma dobra (segmento de reta) $\overline{MM'}$, perpendicular a AD e EF e paralela a AE e DF.

Levando o vértice A a E e F a D, teremos uma dobra NN', perpendicular a AE , DF e MM' e paralela a AD e EF.
O ponto onde MM' e NN' se intersectam é o centro do quadrado AEFD. Podemos observar ainda que ao levarmos o vértice A ao vértice F, obteremos o segmento DE, que com AF formam as duas diagonais do quadrado AEFD.



Os pontos M, M', N e N', são os pontos médios dos respectivos segmentos formados por seus vértices adjacentes.

Capítulo 4

Secções

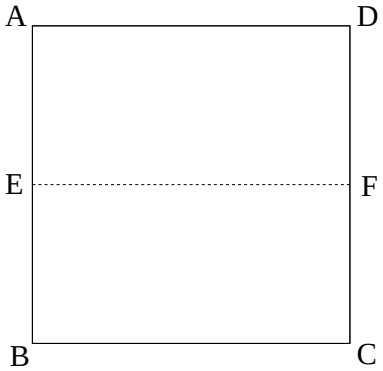
Vimos no capítulo anterior que podemos obter, considerando um vinco como segmento, uma perpendicular a um segmento, uma paralela, ponto médio, apenas dobrando papel. Como podemos determinar o ponto médio de um segmento, podemos então, dividi-lo em 2^n partes, com $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Com régua e compasso, os gregos dividiam segmentos em n partes. No *Origami* também é possível essa secção.

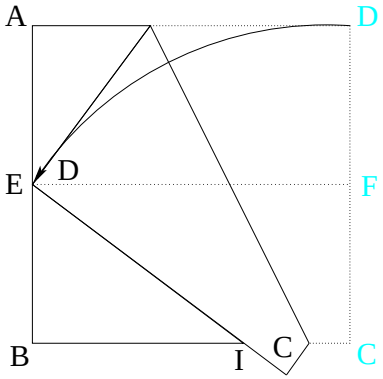
4.1 Um método de secção de segmentos

Para se obter uma trisecção de segmento a partir de um quadrado, procedemos da seguinte maneira:

Dado um quadrado $ABCD$. Supondo-o de lado igual a 1. Encontrar os pontos médios E e F, respectivamente aos lados AB e CD.

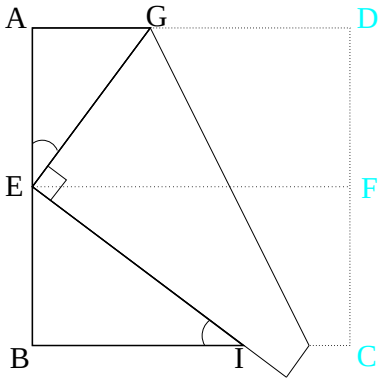


Levar o vértice D ao ponto médio E. O segmento CD divide BC em um ponto I. Temos que $\overline{IC}$, depois de aberto, equivale a $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado $ABCD$.



A demonstração de que o ponto I determina $\frac{1}{3}$ do lado é obtida por semelhança de triângulos. Temos que $\measuredangle GDC$ é reto, pois é vértice D do quadrado, logo $\angle AEG$ e $\angle BEI$ são complementares.

Os triângulos GAE e EBI são retângulos. Como $\angle BEI$ é complementar de $\angle AEG$, então é congruente à $\angle EGA$. Como os triângulos são retângulos e possuem ângulos congruentes, eles são semelhantes.

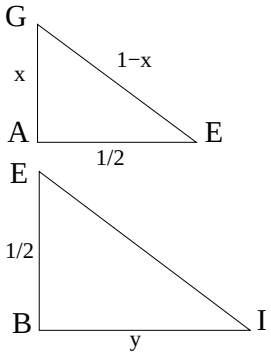


Denominaremos agora por x e y os segmentos AG e BI, respectivamente. Como G é um ponto entre A e D, $\overline{GD} = \overline{GE} = 1 - x$, temos também que $\overline{AE} = \overline{EB} = \frac{1}{2}$.

Por Pitágoras, temos no triângulo GAE:

$$(\tfrac{1}{2})^2 + x^2 = (1-x)^2 \longrightarrow \tfrac{1}{4} + x^2 = 1 - 2x + x^2 \longrightarrow x = \tfrac{3}{8}$$

Pela semelhança de triângulos, temos:

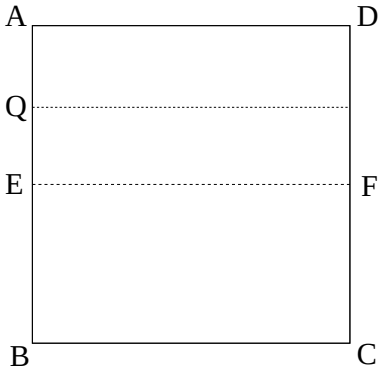


$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{3}{8}.y = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

Logo, $\overline{IC} = 1 - y = \frac{1}{3}$.

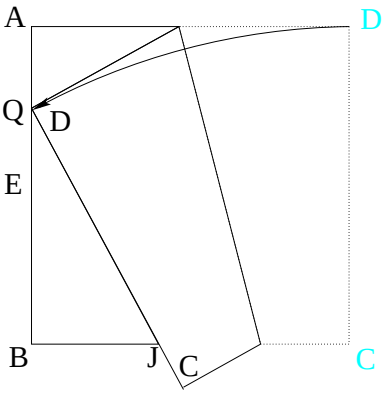
No *Origami* também é possível dividir um segmento em cinco partes. Vejamos:

Comecemos com um quadrado $ABCD$ de lado 1. Encontramos o ponto médio E de AB. Encontramos, então, o ponto médio Q entre A e E. Temos que $\overline{AE} = \frac{1}{4}$.

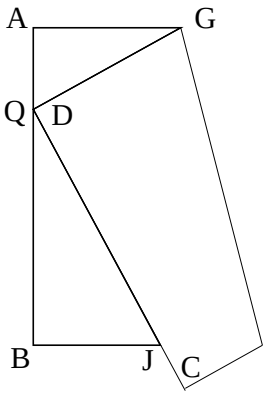


$$4.AE = 2.AE = 2.EB = AB$$

Com procedimentos parecidos com o da trissecção do segmento, levamos o vértice D ao ponto Q.
Verificamos assim, como no caso da trissecção do segmento, dois triângulos semelhantes, AGQ e BQJ, pelos mesmos motivos acima.

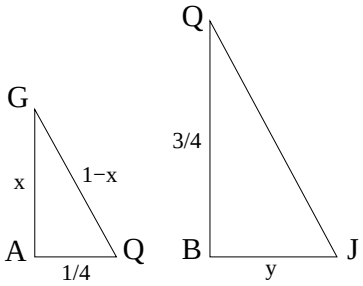


Temos que:



$$\frac{\overline{AG}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{GQ}}{\overline{DJ}}$$

Temos por Pitágoras que:



$$(\frac{1}{4})^2 + x^2 = (1-x)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{16} + x^2 = 1 - 2x + x^2$$

$$x = \frac{15}{32}$$

Por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{\frac{15}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{y} \Rightarrow \frac{15}{32}y = \frac{3}{16}$$

$$y = \frac{2}{5}$$

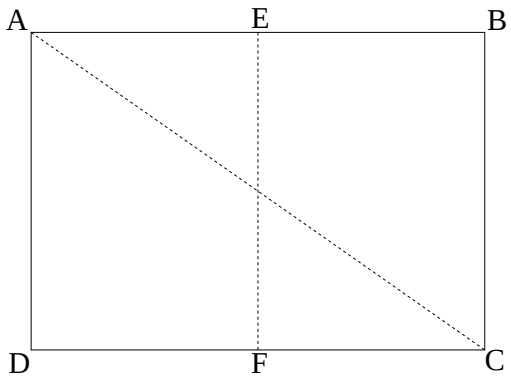
Obtido $\frac{2}{5}$ do segmento, basta dividir por 2 para conseguir $\frac{1}{5}$.

4.2 Outro método de secção de segmento

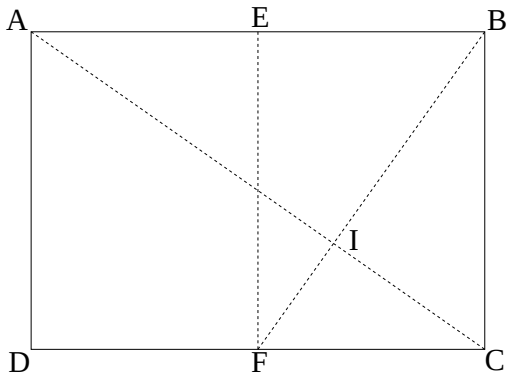
Existe uma forma mais generalizada de se dividir por n partes, não necessitando o papel ser quadrado.

Iniciando com um papel retangular qualquer, vamos dividir o lado em três partes iguais.

Dado um papel retangular qualquer $ABCD$. Dobrar primeiramente uma das diagonais e depois ao meio, pelo lado maior, determinando assim os pontos E e F, que são pontos médios dos respectivos segmentos AB e DC.



No retângulo $EBCF$ que representa a metade do retângulo $ABCD$, dobrar sua diagonal BF, encontrando o ponto I, intersecção da diagonal maior com a menor.



Os triângulos ABI e CFI são semelhantes, pois os ângulos do vértice em comum são congruentes, opostos pelo vértice e os outros ângulos são alternos internos.

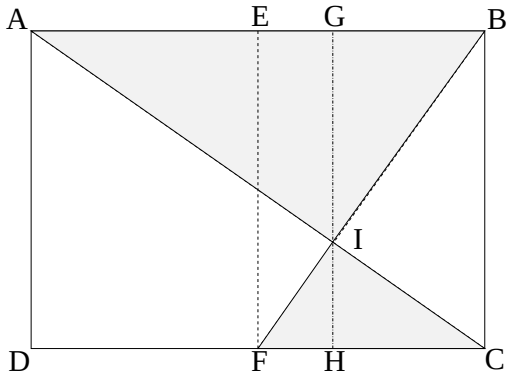
Temos então que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FC}} = \frac{2}{1} \Rightarrow$$

.

$$\Rightarrow \frac{\overline{AI}}{\overline{IC}} = \frac{2}{1}$$

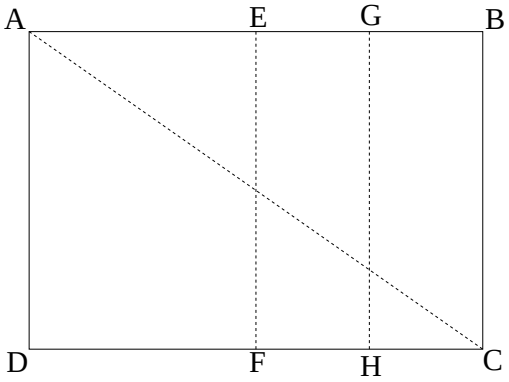
.



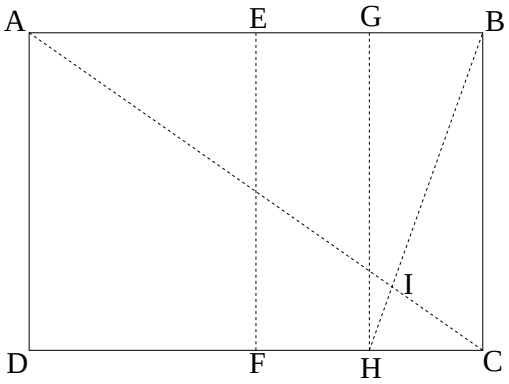
Temos que a diagonal AC está divida em três partes iguais. Dobrando uma perpendicular a AB, passando pelo ponto I, temos um ponto $G \in AB$, tal que $\overline{GB}$ equivale a um terço de $\overline{AB}$.

Esse método acima pode ser aplicado para se obter $\frac{1}{5}$ do segmento.

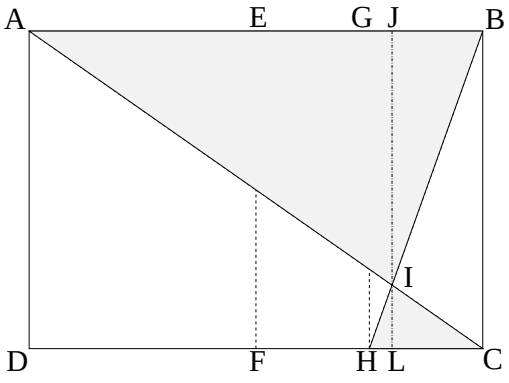
Dado um papel retangular qualquer $ABCD$, determinar E e F, como no método anterior. Determinar também G e H, pontos médios de EB e FC.



Encontrar BH, diagonal do retângulo $GBCH$. A intersecção de AC e BH será I.



Traçamos JL, perpendicular a AB, passando por I. Verifica-se que $\overline{JB}$ é $\frac{1}{5}$ de $\overline{AB}$



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IC}} = \frac{4}{1}$$

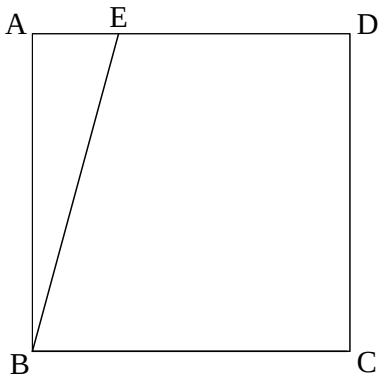
Logo, $\overline{JB}$ é igual a $\frac{1}{5}$ de $\overline{AB}$.

Com esse último método, podemos dividir qualquer segmento em n partes, com $n \in \mathbb{N}$.

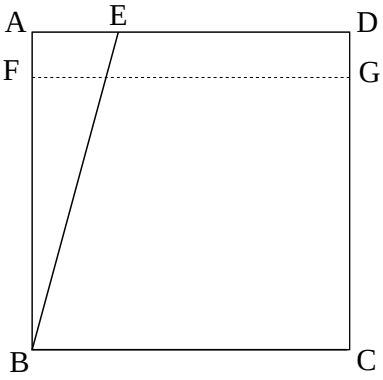
4.3 Trissecção do ângulo

Um dos famosos problemas da antiga Grécia era a trissecção de um ângulo qualquer com régua e compasso. Esse problema é de possível solução através do *Origami* .

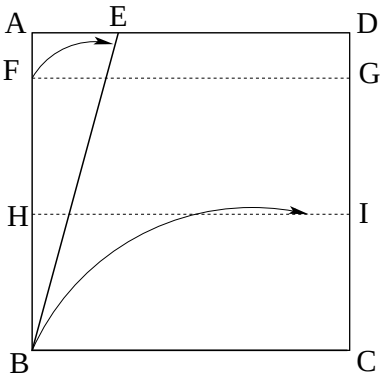
Supondo um ângulo $\angle EBC$ menor que 90^o conforme figura. Para casos de ângulos obtusos, basta aplicar apenas no ângulo excedente a 90^o e somá-lo à trissecção do restante.



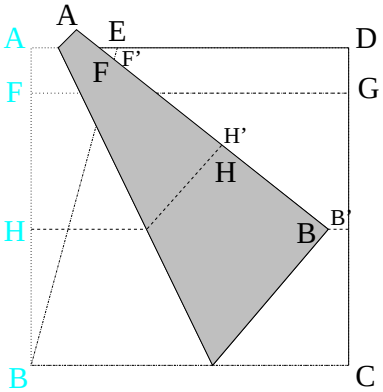
Determinamos uma paralela FG a AD.



Determinamos uma paralela HI, onde H e I são os respectivos pontos médios de FB e GC. Dobramos de modo a levar o ponto F ao segmento EB e o ponto B ao segmento HI.

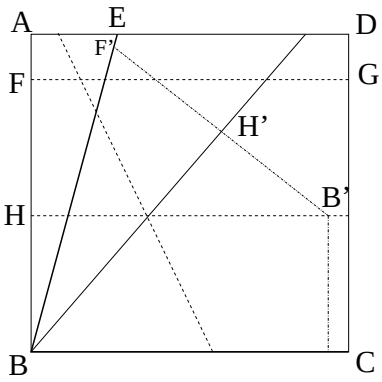


Para uma melhor visualização, traças o segmento FB e marcar os pontos H', F' e B' (onde foram H, F e B) sobre o papel.



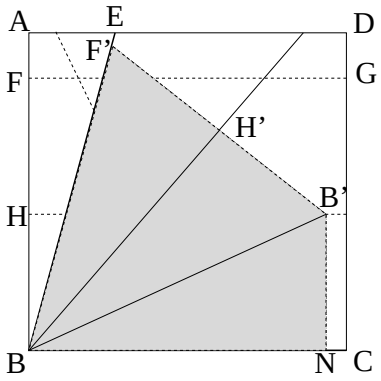
Observação: Não é possível encontrar os pontos H', F' e B' utilizando régua e compasso.

Ao abrirmos novamente, traçamos os segmentos de B' a B e de H' a B.



Temos então que $\overline{NB'} = \overline{BH'} = \overline{H'F'}$.

Os triângulos $BB'N$ e $BB'H'$ são semelhantes, pois possuem a hipotenusa comum e o cateto oposto ao ângulo no vértice B são congruentes. Os triângulos $BB'H'$ e $BF'H'$ são semelhantes, pois possuem um cateto comum e o cateto oposto ao ângulo no vértice B são congruentes.



Com isso, o vértice dos triângulos que estão em B têm os mesmos ângulos, assim, $\measuredangle EBC$ está divido em três partes congruentes.

Capítulo 5

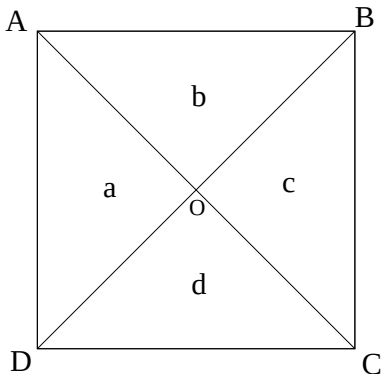
Quadrado

5.1 Divisão

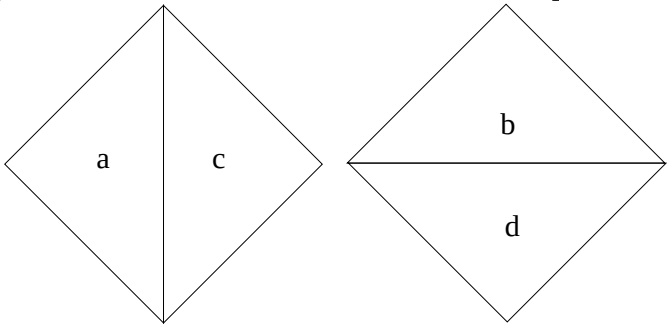
Um problema que podemos resolver de maneira simples com régua e compasso e também de fácil resolução em *Origami* . Com ajuda de uma tesoura, é possível obter um quadrado com a metade da área de um quadrado inicial.

Para resolução do problema utilizaremos alguns dos resultados obtidos com as dobras apresentadas no capítulo 3.

Dado um quadrado ABCD: Juntando os vértices A e C teremos o segmento BD e repetindo com B e D, teremos o segmento AC. Como as diagonais do quadrado são também as bissetrizes dos ângulos retos, teremos quatro triângulos isósceles e, como os ângulos resultados da bisecção do vértice de 90^o medem 45^o cada, os ângulos juntos ao centro são retos.

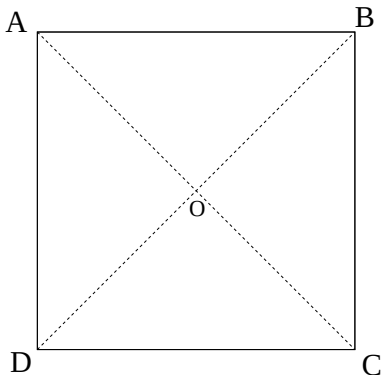


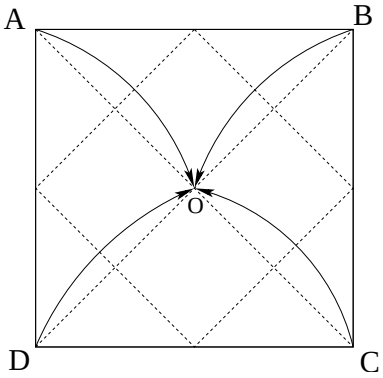
Recortando os triângulos obtidos e juntando-os dois a dois, teremos dois quadrados, cada um com a metade da área do quadrado ABCD inicial.

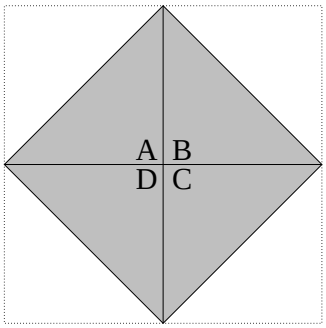


É possível obter esse mesmo resultado de outras formas.

Dado um quadrado ABCD: Levando todos os vértices ao centro do quadrado, ou seja, no encontro das duas diagonais, obteremos também um quadrado com a metade da área do quadrado $ABCD$.



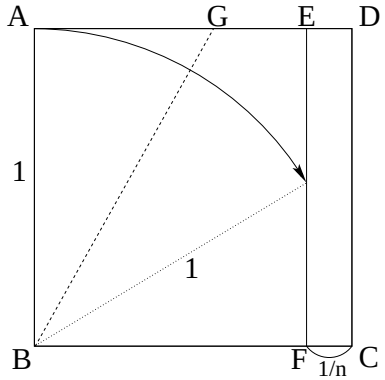




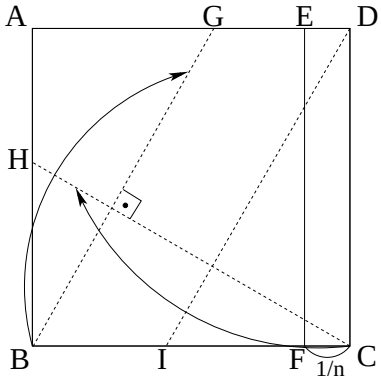
5.2 Proporção

Vimos no capítulo anterior uma forma de se dividir um segmento em n lados, obtendo assim, a proporção de $\frac{1}{n}$. Na primeira parte deste capítulo, vimos como obter um quadrado com a metade da área de um quadrado dado. Veremos agora como obter um quadrado proporcional a $\frac{1}{n}$.

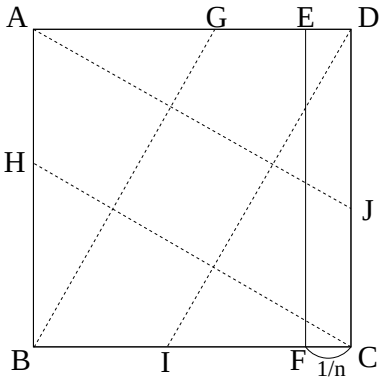
Iniciando com um quadrado $ABCD$, dobrar na proporção $\frac{1}{n}$ desejada. Marcar os pontos E e F, conforme figura. Fixando B, levar o vértice A ao segmento EF, rotacionando por um eixo BG.



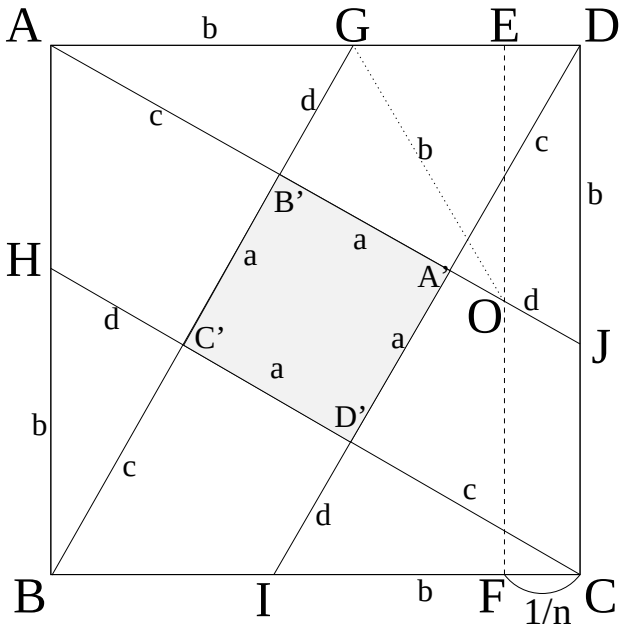
Fixar C e levar B sobre BG, obtendo o eixo HC ($\overline{HC} \perp \overline{BG}$). Repetir o procedimento nos outros vértices. Observação: os eixos de rotação são ortogonais, pois o vértice é levado ao eixo que o contém.



Os eixos formarão um quadrado. Esse quadrado $A'B'C'D'$ está para $ABCD$, assim como $\frac{i}{n}$ está para 1. Em outras palavras, a área de $ABCD$ dividida por n é igual a área de $A'B'C'D'$.



Para demonstrar que $A'B'C'D'$ é proporcional a $ABCD$, temos as seguintes relações:



$\overline{AB'} = \overline{B'O} = c$, pela construção. Seja $\overline{B'A'} = a$ e $\overline{OJ} = d$. Assim, pela semelhança de triângulos temos que

$$\frac{c + a + d}{1} = \frac{2.c}{\frac{n-1}{n}}$$

$$a + c + d = \frac{n+1}{n-1}.2c \Rightarrow a + d = \frac{2n}{n-1}.c - c = \frac{n+1}{n-1}.c$$

$$a = \frac{n+1}{n-1}.c - d$$

No triângulo BGA:

$$d.(a+c) = d^2 \Rightarrow d = \frac{c^2}{a+c}$$

Substituindo:

$$a = \frac{n+1}{n-1}.c - \frac{c^2}{a+c} = \frac{(n+1)(a+c)c - c^2(n-1)}{(n-1)(a+c)}$$

$$a = \frac{2c^2 + (n+1)ac}{(n-1)(a+c)} \Rightarrow a(a+c) = \frac{2c^2 + (n+1)ac}{n-1}$$

$$a(a+c) = \frac{2c^2 + (n+1)ac}{n-1}$$

Do triângulo ABB', por Pitágoras:

$$(a+c)^2 + c^2 = 1$$

$$a^2 + 2ac + c^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 2ac + 2c^2 = 1$$

$$2c^2 = 1 - a^2 + ac$$

Substituindo:

$$a^2 + ac = \frac{1 - a^2 - 2ac + (n+1)ac}{n-1}$$

$$a^2 + ac = \frac{1 - a^2 + (n-1)ac}{n-1}$$

$$a^2 = \frac{1-a^2}{n-1} + ac$$

$$(n-1)a^2 = 1 - a^2$$

$$(n-1+1)a^2 = 1 \Rightarrow n.a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{n}$$

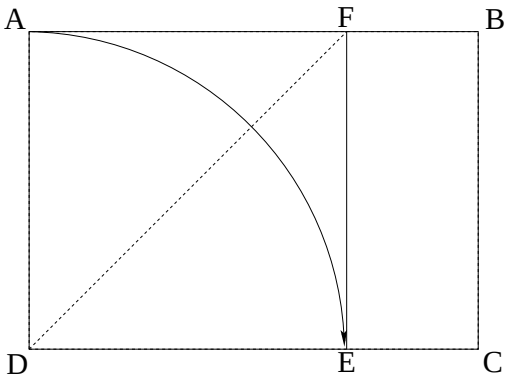
Conclui-se então que a área do quadrado $A'B'C'D'$ é $\frac{1}{n}$ da área do quadrado $ABCD$.

Capítulo 6

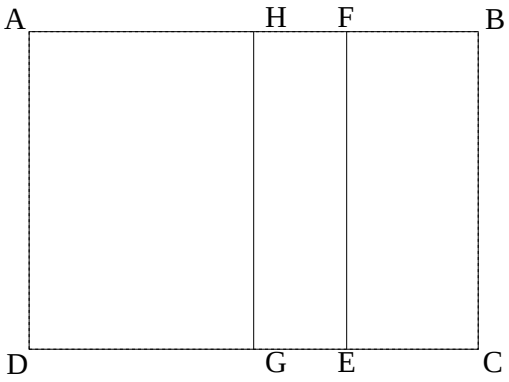
Quadratura do Retângulo

Dado um retângulo de lado $ABCD$, transformá-lo num quadrado de mesma área.

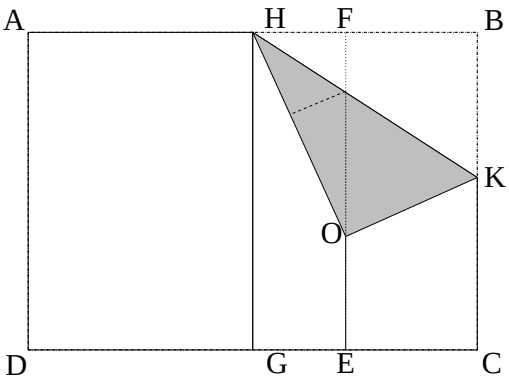
Em um retângulo $ABCD$, dobrar de modo que o lado AD fique sobre o lado DC, pelo mesmo método de se obter um quadrado, e marcar os pontos E e F.



Dobrar o segmento GH, onde G e H são os respectivos pontos médios de BC e AD.

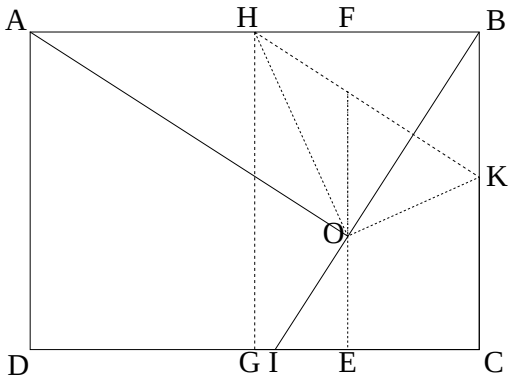


Com o ponto H fixo, levar o vértice B ao segmento EF, encontrando o ponto O, pertencente ao segmento EF e K pertencente a $\overline{BC}$.

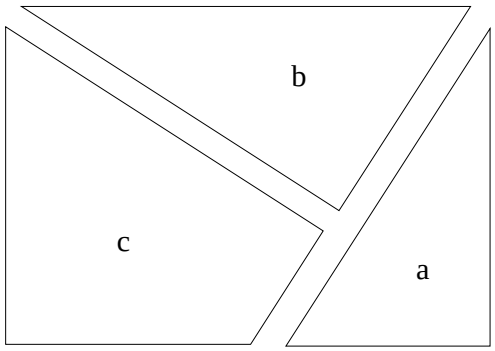


Observe que os triângulos HKB e HKO são congruentes.

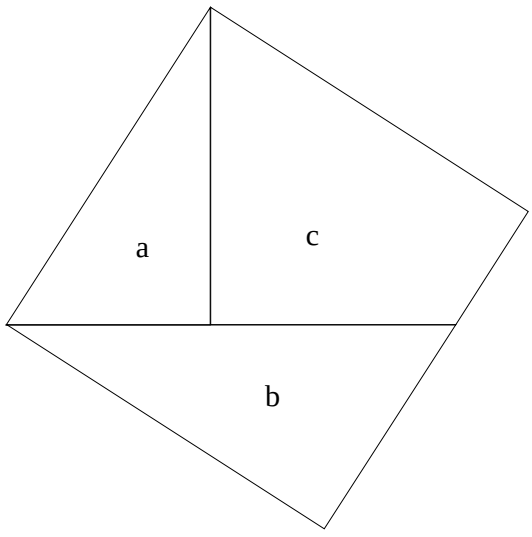
Prolongar $\overline{BO}$ até $\overline{BI}$, com $I \in \overline{DC}$. Recortar pelos segmentos OA e BI.



Nomearemos as peças a, b e c, conforme figura.



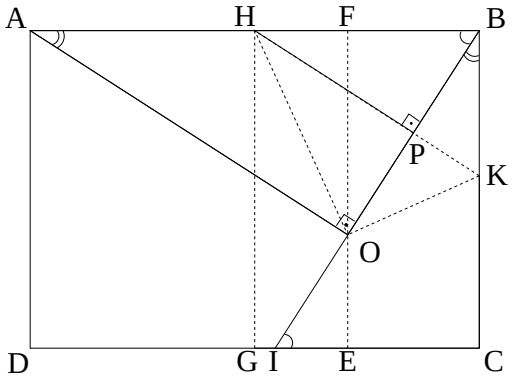
Podemos então reorganizar as peças de modo que possamos obter um quadrado de mesma área do retângulo $ABCD$.



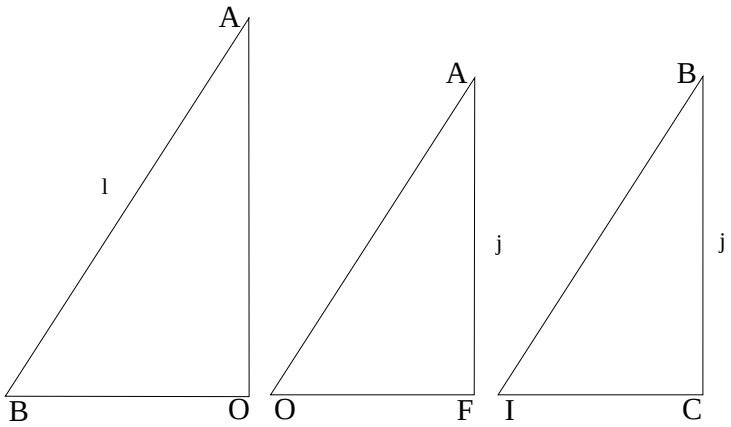
Mas será que realmente obteremos um quadrado perfeito? Provavelmente, devido algumas imprecisões nas dobras o resultado pode ser duvidoso. Verificaremos então, os segmentos e ângulos obtidos.

Vimos que $HOK \cong HBK$, já que são refletidos em relação a $\overline{HK}$. Temos que BO é perpendicular a HK pela construção. O $\angle HBP$ é congruente ao $\angle ABO$. Como H é ponto médio de $\overline{AB}$ e P é ponto médio de $\overline{OB}$, temos então que o triângulo ABO é semelhante ao triângulo HBP, na razão de $\frac{2}{1}$.

Logo, podemos concluir que AO é perpendicular a OB. Provado isto, concluímos que os outros ângulos que formarão os vértices do quadrado serão complementares, assim os ângulos satisfazem os ângulos de um quadrado (ou de um retângulo).



Resta provar se $\overline{BI} = \overline{AO}$ = lado do quadrado. Vamos chamar de j o lado menor e l o lado maior do retângulo. Por serem retângulos e possuírem um ângulo em comum, os triângulos AOB, ICB e AFO são semelhantes.



$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$$
$$\frac{j}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AO}}{l}$$
$$\overline{AO} = \sqrt{j.l}$$

Precisamos averiguar o valor de $\overline{BI}$, outro lado do quadrado:

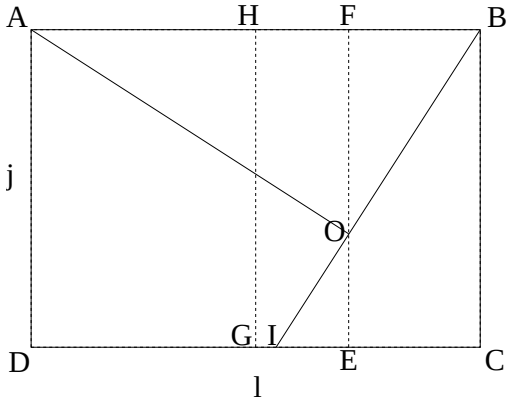
$$\frac{\overline{BI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AO}}$$
$$\frac{\overline{BI}}{l} = \frac{j}{\sqrt{j.l}}$$

$$\overline{BI} = \frac{j.l}{\sqrt{j.l}} \Rightarrow \overline{BI} = \sqrt{j.l}$$

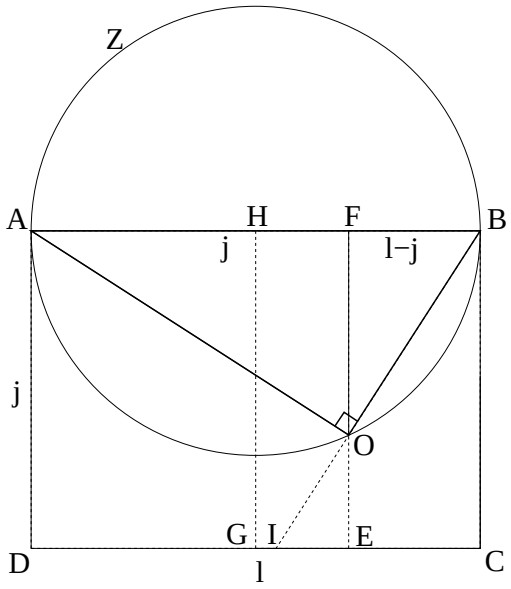
A área do retângulo de lados j e l é dado por $j.l$; a área do quadrado, de lado $\sqrt{j.l}$, também é $j.l$. Portanto, está satisfeita a quadratura do retângulo.

Todo o resultado obtido pelo *Origami* é possível também se obter com régua e compasso da seguinte forma:

Vamos chamar de j o lado menor do retângulo $ABCD$ e de l lado maior. Assim $\overline{AD} = \overline{BC} = j$ e $\overline{AB} = \overline{DC} = l$ e a área desse retângulo é $j.l$.



Traçando uma circunferência com centro em H e raio $\frac{l}{2}$, teremos que todo triângulo inscrito na semi-circunferância é reto. $\overline{FO}$ é média geométrica de l e $l - j$, ou seja, $\overline{FO} = \sqrt{l.(j-l)}$, e esse dado é relevante, pois pela semelhança de triângulos, temos que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{FO}}$ $\frac{l}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AO}}{j} \Longrightarrow \overline{AO}^2 = j.l$



$$\overline{AO} = \sqrt{j.l}$$

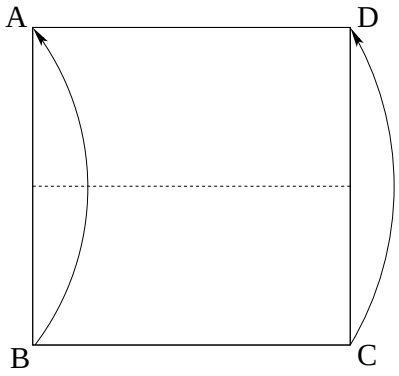
Obtivemos então, um lado de um quadrado de área $j.l$.

Capítulo 7

Pentágono

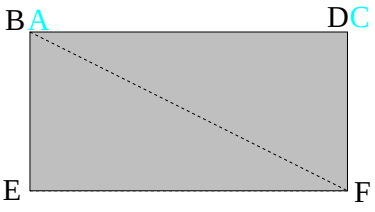
Neste capítulo será feito uma das construções de um pentágono regular, pois existem outras formas de se obtê-lo.

Iniciaremos com um quadrado $ABCD$ de lado 2 para facilitar o entendimento da demonstração. Juntar os vértices A com B e D com C, obtendo assim um retângulo de 2×1 e o lado EF.

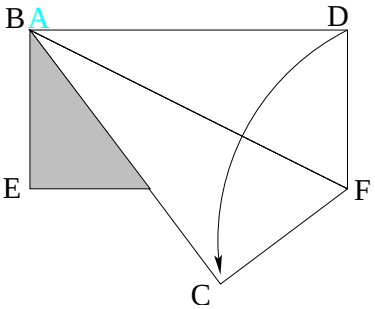


Temos então que o retângulo $BEFD$ possui uma diagonal, seja BF. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que a diagonal vale:

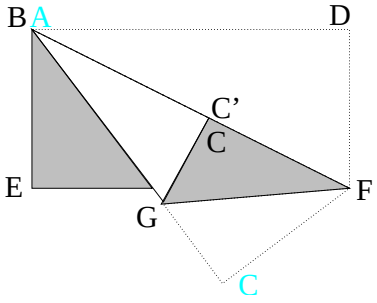
$$\overline{BF}^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow \overline{BF} = \sqrt{5}$$



Usando a diagonal como eixo de rotação, dobrar o vértice C para fora.

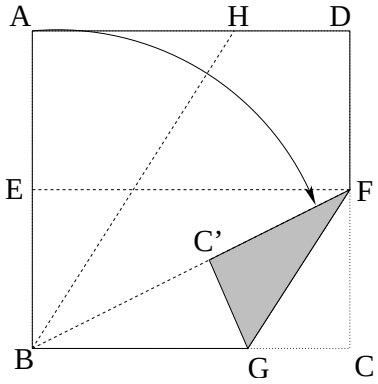


Fixando F, levar o ponto C ao segmento BF. Temos que $\overline{CF}$ é igual a 1, pois assumimos que o lado do quadrado é igual a 2, logo, $\overline{BF} - \overline{CF}$ é igual a $\sqrt{5}-1$, ou seja, $\overline{BC'} = \sqrt{5}-1$.

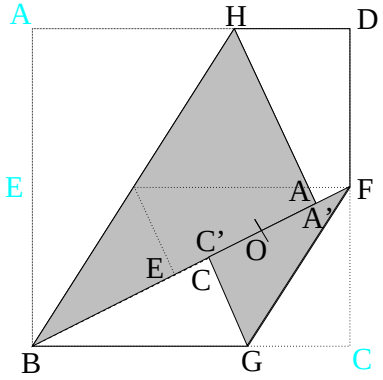


Observação: $\overline{BC}$ é o segmento áureo do lado (2).

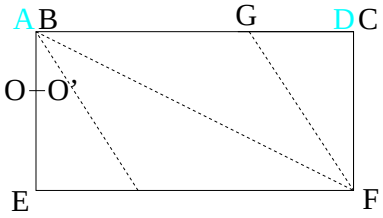
Voltando para o quadrado inicial, vamos fixar B e levar o vértice A até BF.



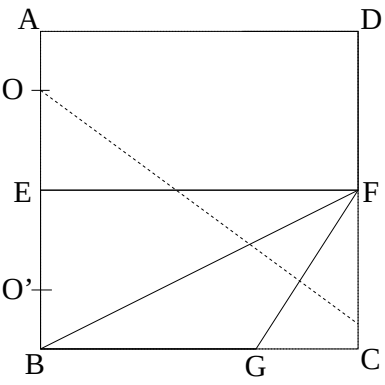
Subtraímos $\overline{BC'} = \sqrt{5}-1$ do lado $\overline{AB} = 2$; o resto, ou seja, CA', divide-se ao meio no ponto O.



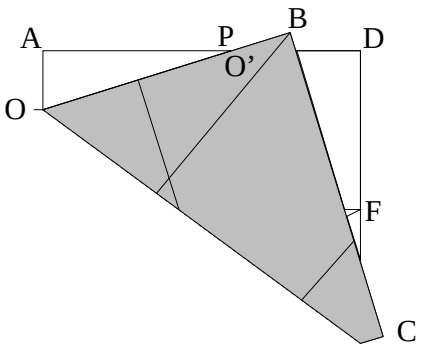
Com a mesma distância de AO, a partir de B, marcar O'.



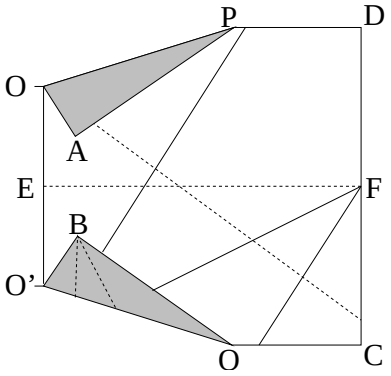
Temos então que o segmento OO' tem comprimento igual a $\overline{BC'} = \sqrt{5}-1$.



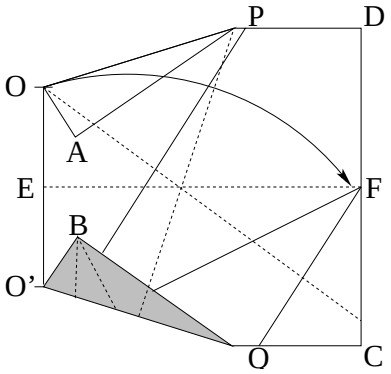
Levamos, fixando O, o ponto O' até $\overline{AD}$. Marcamos como P o ponto onde O' toca AD.



Analogamente, marcamos Q, ponto onde O encontra BC. Dobrar por $\overline{OP}$ e $\overline{O'Q}$.



Fixando P, levamos O ao segmento EF. Notear que a dobra faz-se em torno do eixo dos pontos P e o ponto médio de $O'Q = R$.

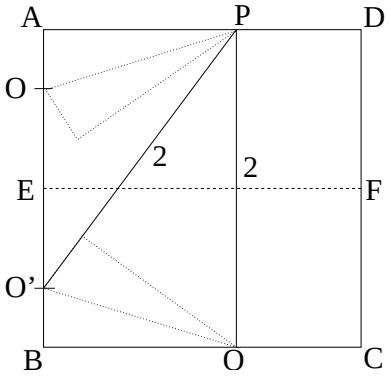


Neste momento, vamos analisar alguns resultados. Temos que os pontos O' e Q são simétricos a O e P em relação a $\overline{EF}$ por construção. Além de que $\overline{OO'} = \sqrt{5} - 1$ e $\overline{AO} = \overline{BO'} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Por Pitágoras, $\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{OP}^2$, então

$$(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^2 + \overline{AP}^2 = (\sqrt{5}-1)^2$$

$$\overline{AP}^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$



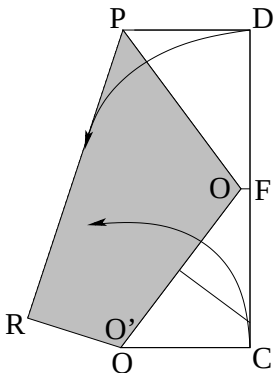
Temos ainda que $\overline{AP}^2 + \overline{AO'}^2 = \overline{O'P}^2$, lembrando que $\overline{AO} = \overline{AO'} + \overline{OO'}$.

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}+(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2=\overline{O'P}^2$$
$$\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}=\overline{O'P}^2$$
$$\overline{O'P}^2=4\Rightarrow\overline{O'P}=2$$

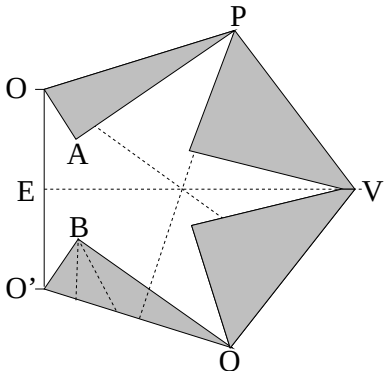
$\overline{O'P}=\overline{PQ}=2$ (lado do quadrado)

Com isso, temos que $O'PQ$ formam um triângulo isósceles e portanto, R é o ponto médio de $\overline{O'Q}$ e $\overline{PR}\perp\overline{O'Q}$. A reflexão do quadrilátero $OPRO'$ em torno do eixo PR determina V, exatamente sobre $\overline{EF}$.

Levamos os vértices D e C sobre o quadrilátero $OPRO'$.

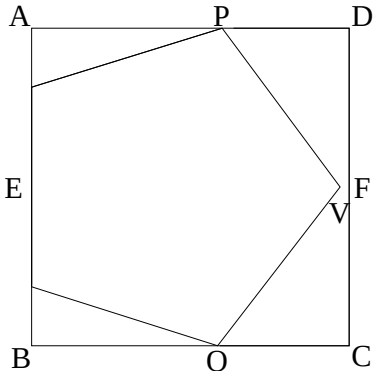


Voltamos apenas a dobra efetuada sobre o eixo PR, obtendo assim um pentágono regular.

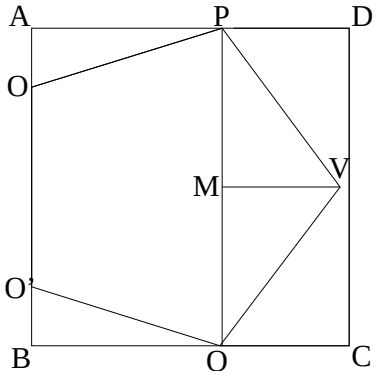


Demonstraremos que o pentágono é regular pois:

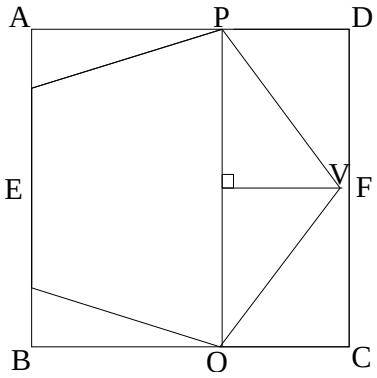
Inicialmente, supomos o lado do quadrado igual a 2. Encontramos o segmento $\sqrt{5}-1$ e o utilizamos como lado do pentágono. Vimos que o vértice V foi obtido através da reflexão do quadrilátero $OPRO'$.



Vimos também, em passos da construção do pentágono, que os pontos P e Q são os vértices do pentágono e, pela construção, $\overline{OP} = \overline{O'P} = \overline{OO'} = \sqrt{5}-1$ e $\overline{PQ} = \overline{O'P} = 2$.



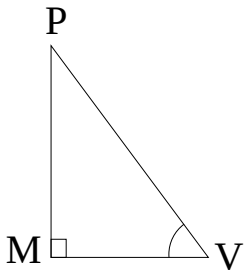
O triângulo PVQ é isósceles e congruente ao POO', assim, traçando uma perpendicular a PQ e passando por F, temos que $\overline{MF}$, conforme figura, é bissetriz do $\angle PVQ = 2\alpha$ e divide $\overline{PQ}$ ao meio. Observação: $V \neq F$.



Temos que $\overline{PM} = 1$, $\overline{PV} = \sqrt{5}-1$. Então,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}-1} \Rightarrow \alpha = 54^o$$

Logo, $\angle PFQ = 108^o$, satisfazendo o ângulo interno de um pentágono.



A demonstração dos outros ângulos fica por conta do leitor.

Capítulo 8

Poliedros

8.1 Os Sólidos de Platão

Existem inumeros objetos que poderíamos dizer de forma poliédrica. No entanto, a definição de poliedro se restringe a sólidos compostos por faces poligonais planas. Etmologicamente, a palavra *poliedro* é derivada dos termos gregos $\Pi o\lambda \upsilon$s (muitos) e $\varepsilon\delta\rho\alpha$ (plano). Assim, as esferas, cones e cilindros, que não possuem faces planas não são considerados poliedros. Dessas infinitas formas existentes estudaremos os chamados **Sólidos de Platão**. Os sólidos platônicos são poliedros convexos, cujas faces são polígonos regulares, podendo ser considerados como poliedros no limite da perfeição, por manterem certa constancia, simetria e harmonia. Platão de Atenas foi um dos mais famosos filósofos da Grécia. Viveu por volta de 400 anos a.C., era discípulo de Sócrates. Platão acreditava que a essência da realidade era a eternidade das formas geométricas e das relações com os elementos da natureza: ar, fogo, terra e água. Há somente cinco poliedros regulares. São os seguintes:

TABELA 8.1: Poliedros regulares: faces e suas formas

Poliedro	**Número de faces**	**Polígono da face**
tetraedro	4	triângulo
cubo	6	quadrado
octaedro	8	triângulo
dodecaedro	12	pentágono
icosaedro	20	triângulo

Nota-se que os poliedros regulares têm como faces apenas três polígonos regulares: triângulo, quadrado e pentágono. Uma propriedade encontrada nos sólidos de Platão é que estão relacionados entre si por sua dualidade. Isto é, a todo poliedro P, podemos associá-lo a outro de forma única, de forma que as faces e os vértices de P estáo em correspondência biunívoca com os vértices e faces de outro, que chamamos de seu dual. Desta forma, se P é dual de P*, então P* é dual de P. Veja os exemplos:

O dual de um tetraedro é o próprio tetraedro.

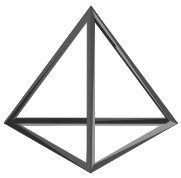


FIGURA 8.1: Tetraedro do com Maple

Já o dual de um cubo é o octaedro.

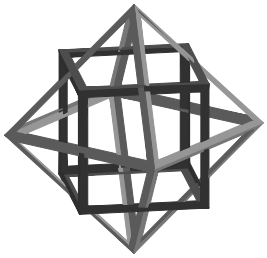


FIGURA 8.2: Dual octaedro do Maple

Do icosaedro é o dodecaedro..

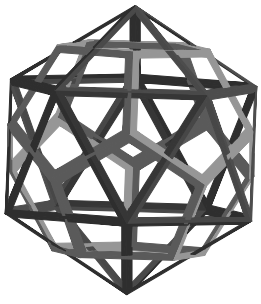


FIGURA 8.3: Dual do icosaedro do Maple

Nas figura acima, nota-se que o centro da face de cada poliedro é o vértice de seu dual inscrito.

Veremos nos próximos capítulos algumas construções de poliedros regulares convexos.

Capítulo 9

Poliedros de faces triangulares

Antes de tudo, analisaremos os triângulos equiláteros. Sabendo que cada ângulo do triângulo equilátero mede 60° temos que:

TABELA 9.1: Poliedros de faces triangulares

Número de triângulos equilateros	**Soma dos ângulos**	**poliedros formados**
3	180°	tetraedro
4	240°	octaedro
5	300°	icosaedro
6	360°	impossível

Podemos verificar essas possibilidades pela figura:

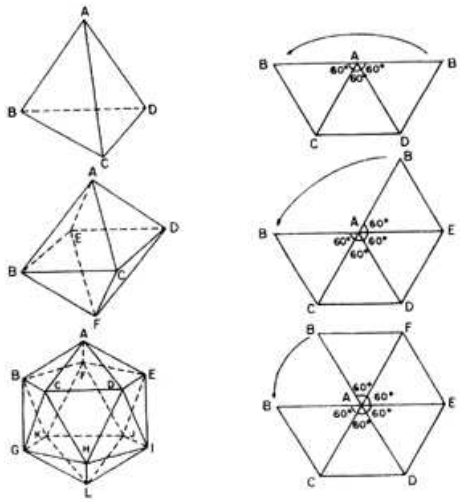


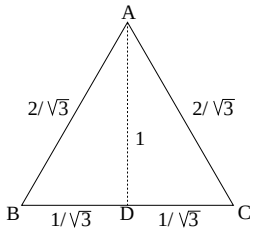
FIGURA 9.1: Figura obtida da RPM 15

9.1 Retângulos especiais

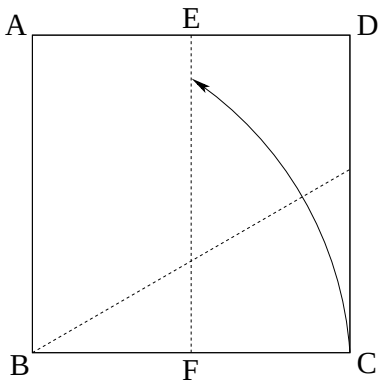
Antes de construirmos os poliedros será apresentado uma relação importante dos lados do retângulo.

Mostraremos a relação $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$ sobre os lados do retângulo, pois serão necessários para a construção dos poliedros compostos por triângulos equiláteros.

Essas medidas são importantes, pois, com eles, podemos obter os ângulos do triângulo equilátero.



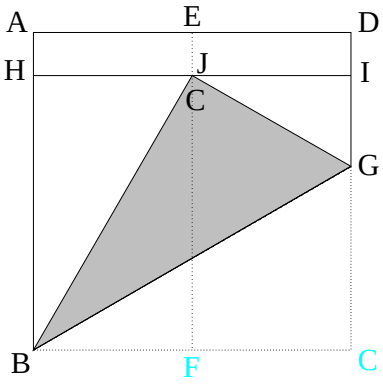
Começamos com um papel quadrado $ABCD$ de lado 1. Encontrar EF, onde E e F são pontos médios de AD e BC, respectivamente.



Fixando B, levar C a EF. Nesse ponto de intersecção J, traçar a perpendicular HI a EF. Teremos, para o segmento HB que:

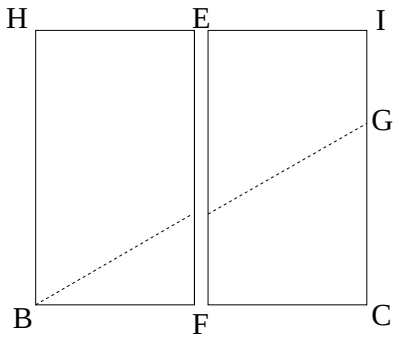
$$\overline{HB}^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1^2$$

$$\overline{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Teremos agora, dois casos. O primeiro caso, a razão de $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

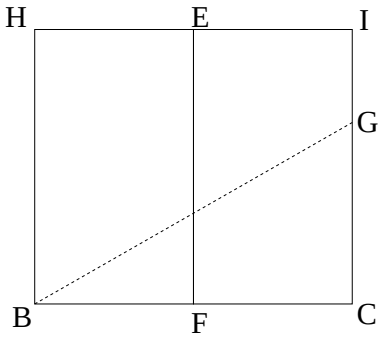
Ao cortarmos HI e EF obteremos duas peças, cujas proporções dos lados são de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ em cada peça.



$$\frac{\overline{BF}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{IC}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

No segundo caso a razão $\frac{2}{\sqrt{3}}$:

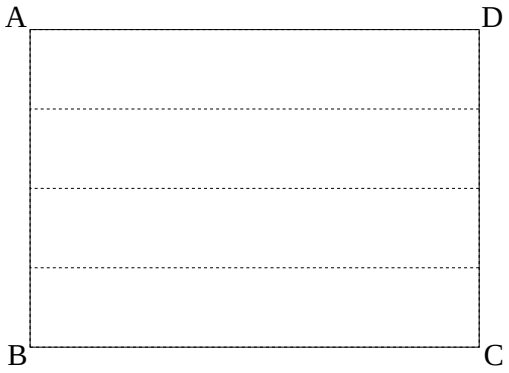
Se não cortarmos EF, teremos um retângulo com a seguinte proporção:



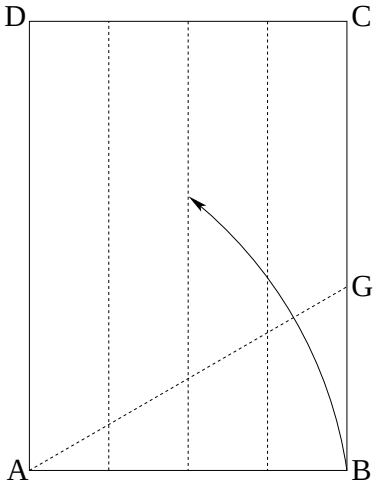
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{HB}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Podemos obter do papel A4 doze unidades com a proporção $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Isto facilitará na construção dos poliedros.

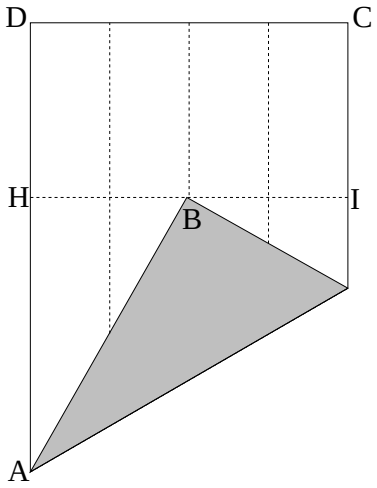
Tomemos um papel A4 com os vértices $ABCD$. Dobraremos pelo lado maior ao meio e depois ao meio novamente, obtendo assim, três vincos, dividindo o papel em 4 partes iguais.



Fixando A, levar o vértice B até o segmento EF feito pelo vinco central rotacionando em torno do eixo AG.

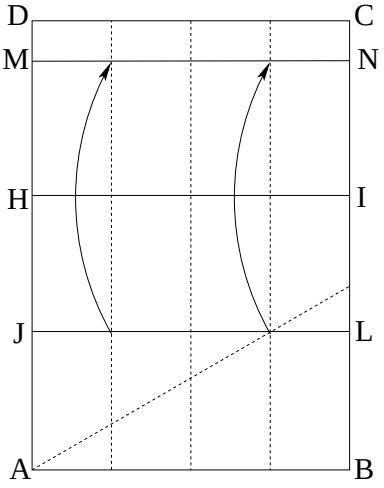


Pelo ponto de intersecção do vértice B com EF marcamos uma perpendicular HI. A altura $\overline{AH}$ equivale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ se considerarmos $\overline{AB} = 1$. Temos que $\frac{\overline{HA}}{\overline{AB}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, dividindo $\overline{HA}$ por 2 e $\overline{AB}$ por 4, temos

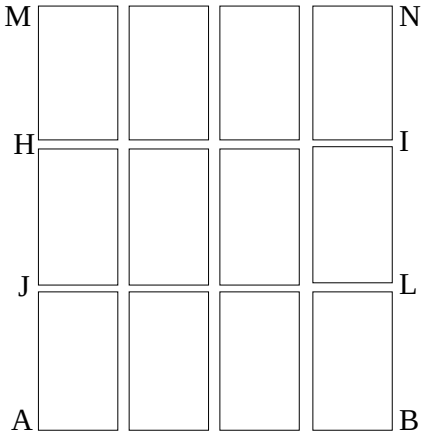


$$\frac{\frac{\overline{HA}}{2}}{\frac{\overline{AB}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

Para aproveitar o papel, dobramos a proporção obtida usando como eixo HI, conseguindo mais quatro peças com razão $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



O resultado é a obtenção de doze peças com a razão de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

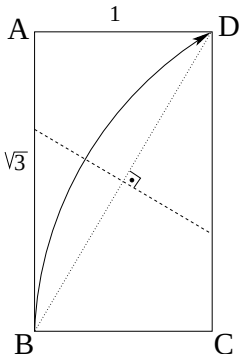


9.2 Construção das unidades

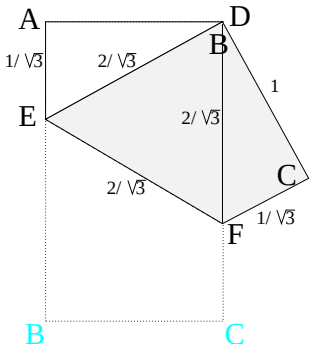
Construiremos agora as chamadas "unidades"A e B dos poliedros de faces triangulares. Para isto, será necessário a utilização de retângulos de proporção $\frac{1}{\sqrt{3}}$, como as 12 peças obtidas do papel A4, visto anteriormente. Estas unidades formam triângulos equiláteros, que ao se encaixarem, produzirão os poliedros.

UNIDADE A

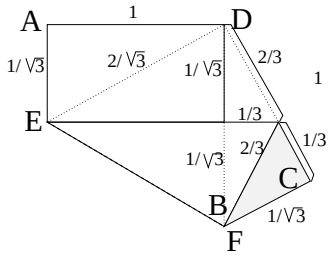
Com uma peça retangular $ABCD$, respeitando as proporções, levar o vértice B ao D.



Ao levar B a D, surge um eixo de rotação EF. $\overline{EF}$ é a mediatriz de $\overline{BD}$. Os $\triangle EFD$ e $\triangle EFB$ são equiláteros de lado $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

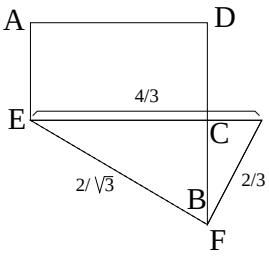


Levar o vértice B ao ponto F. A nova dobra é paralela a $\overline{AD}$.

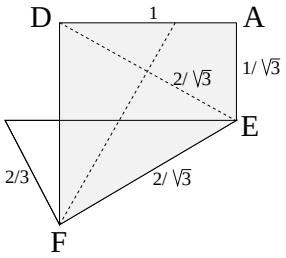


C

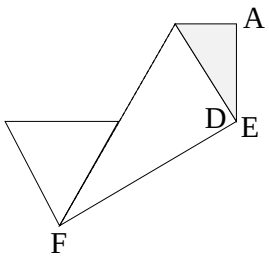
Levar o vértice C sobre DF.



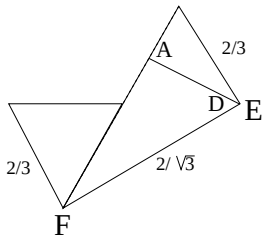
Virando a peça, de modo que a parte de trás fique para frente.



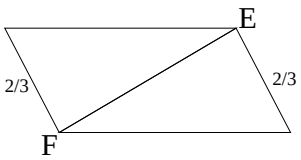
Levar o vértice D ao ponto E.



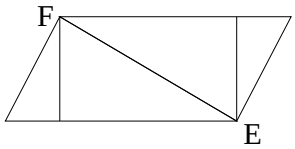
O vértice A, dobrar pelo eixo do ponto E.



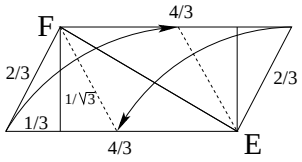
Desfazer a dobra pelo eixo EF, de modo que apareça um paralelogramo.



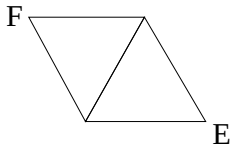
Virar a peça, de modo que a parte oculta volte-se para frente.



Levar as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando os vértices com ângulos obtusos.

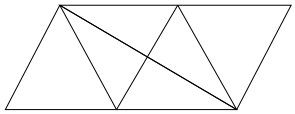


Obtêm-se um losango cujos lados e a diagonal menor medem $\frac{2}{3}$.



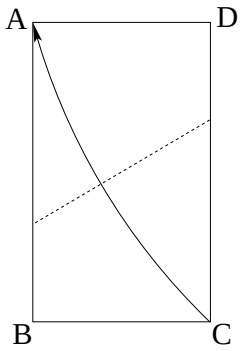
Nas figuras acima, temos que a base do paralelogramo é $\frac{4}{3}$, ou seja, cabem duas vezes o lado $\frac{2}{3}$. O segmento pertencente à base do paralelogramo e que forma um triângulo retângulo é $\frac{1}{3}$ e a altura é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Esses valores satisfazem as medidas do triângulo equilátero citado no início deste capítulo.

Abrindo o losango temos a unidade A, que é composta por quatro triângulos equiláteros de lado $\frac{2}{3}$.

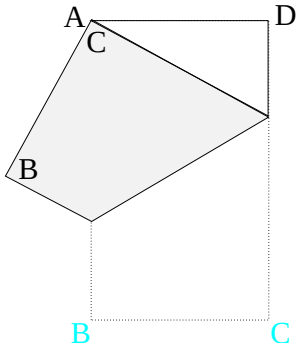


UNIDADE B

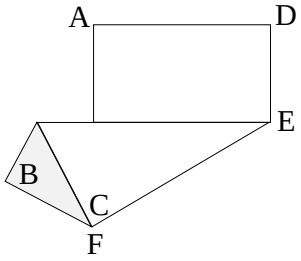
Nos mesmos procedimentos da unidade A, com a diferença do lado pelo qual inicia-se a dobra. Com uma peça retangular $ABCD$, respeitando as proporções, levar o vértice C ao A.



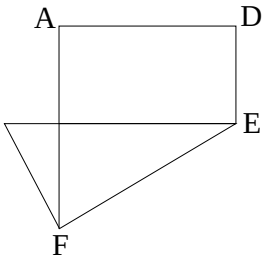
Ao levar C a A, surge um eixo de rotação EF.



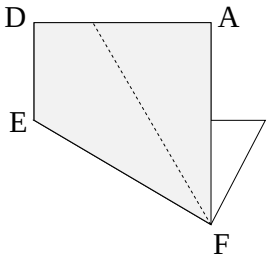
Levar o vértice C ao ponto F.



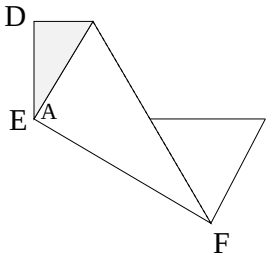
Levar o vértice B sobre AF.



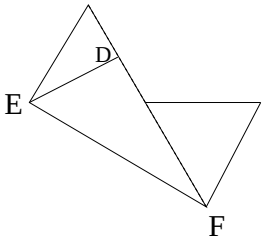
Virando a peça, de modo que a parte de trás fique para frente.



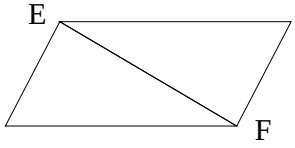
Levar o vértice A ao ponto E.



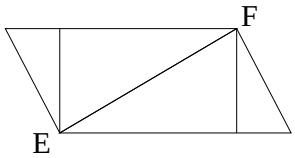
O vértice D, dobrar pelo eixo do ponto E.



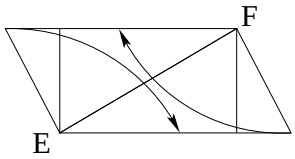
Desfazer a dobra pelo eixo EF, de modo que apareça um paralelogramo.



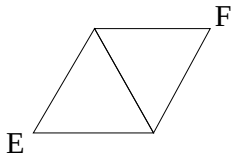
Virar a peça, de modo que a parte oculta volte-se para frente.



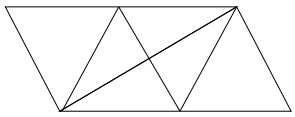
Levar as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando os vértices com ângulos obtusos.



Obtêm-se um losango.



Abrindo o losango temos a unidade B.

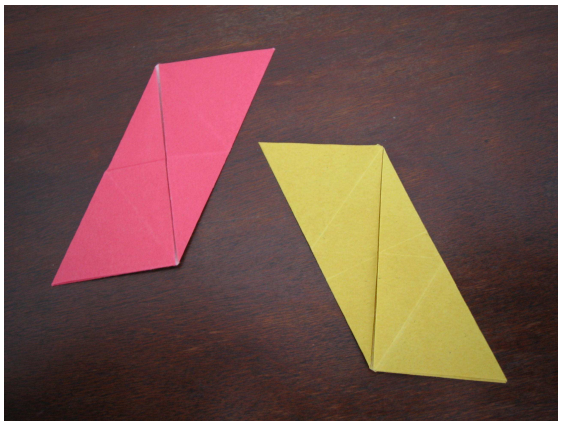


9.3 Montagem dos poliedros

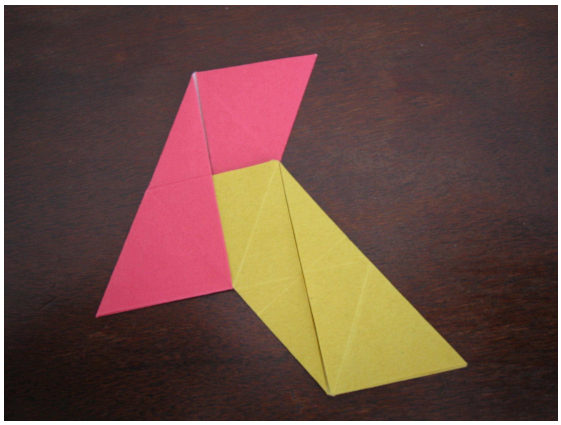
Foram produzidas, em cada unidade A e B, faces na forma de triângulos equiláteros. Com os triângulos equiláteros podemos construir apenas três poliedros regulares: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, os chamados Poliedros de Platão com faces triangulares.

9.3.1 Tetraedro

Para a construção do tetraedro é necessário uma unidade de cada, ou seja, A e B.



Notem que em cada unidade temos quatro triângulos equiláteros e os triângulos das pontas não possuem corte. Para facilitar a montagem, uma dica é que se cole os triângulos das pontas, deixando livre os triângulos centrais que possuem cortes. Encaixar a unidade A em um dos cortes da unidade B (ou B em A).

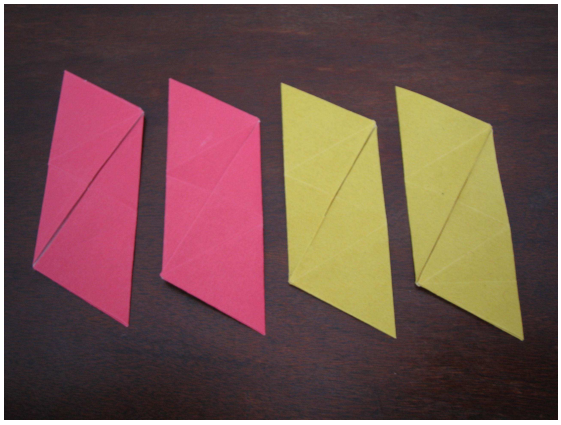


Dobrar dando forma de um tetraedro e encaixando todas as pontas, então concluímos o tetradro.

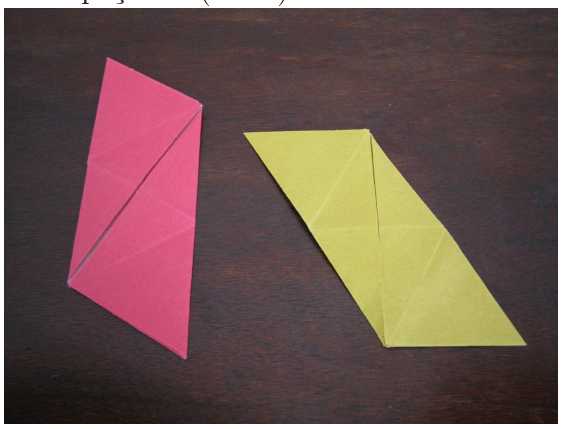


9.3.2 Octaedro

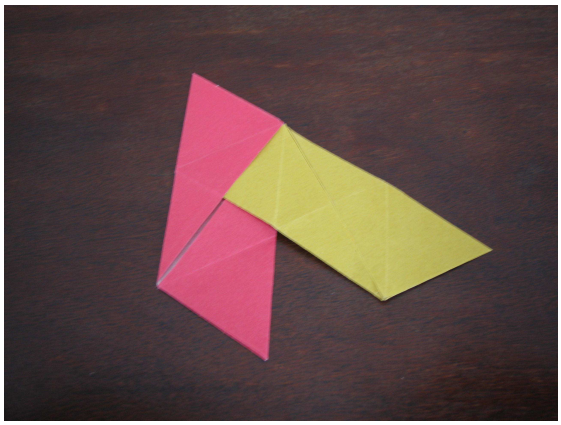
Para a construção do octaedro são necessários quatro unidades A **ou** B, sendo que para que fique com faces bicolores, são necessárias duas peças de cada cor.



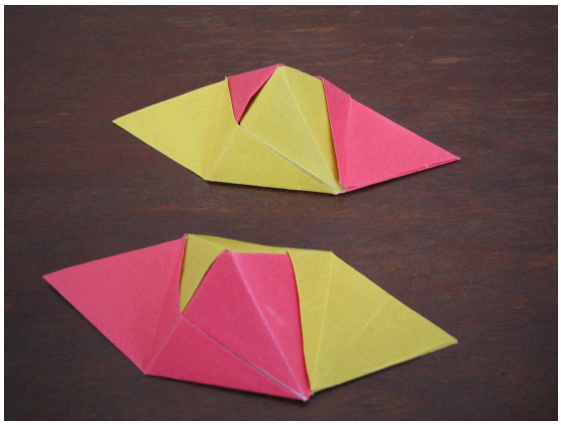
Tome duas peças A (ou B) de cores distintas.



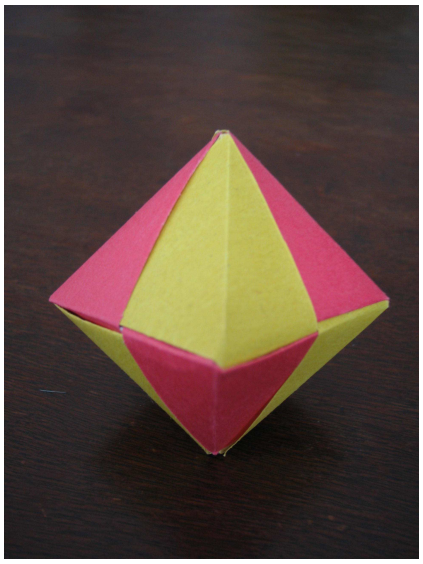
Encaixar em uma peça A em outra peça e repetir com outras duas peças restantes.



Forma-se então, duas pirâmides de base quadrada com abas triangulares em lado opostos da base.

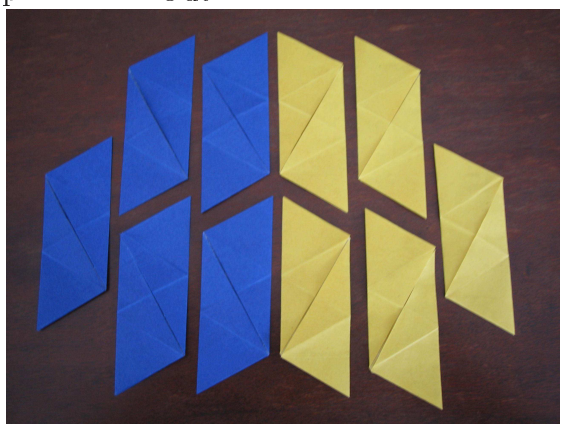


Encaixando-se as duas pirâmides, finaliza-se o octaedro.

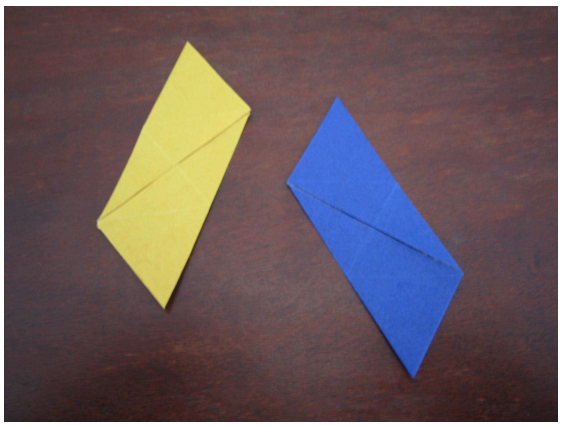


9.3.3 Icosaedro

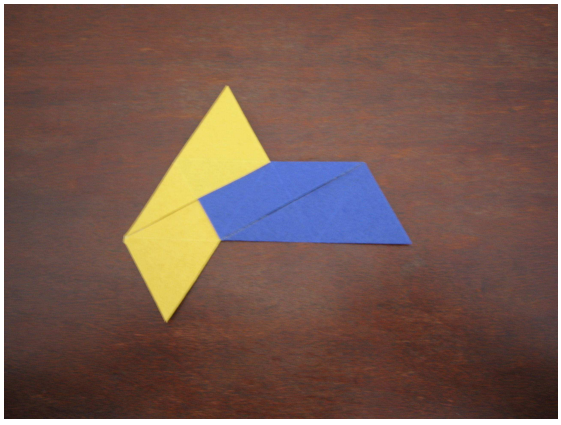
Para a construção do icosaedro são necessários cinco unidades de cada, ou seja, cinco unidades A e cinco unidades B. Não há possibilidade de todas as faces bicolores, apenas dez. Outras dez ficarão monocromáticas.



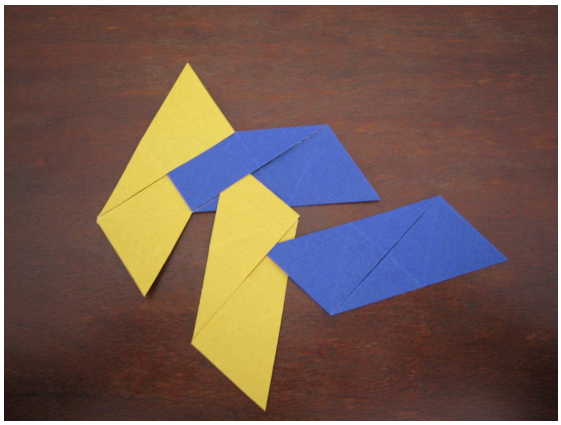
Inicia-se com duas unidades distintas, A e B.



Encaixe a unidade B na unidade A

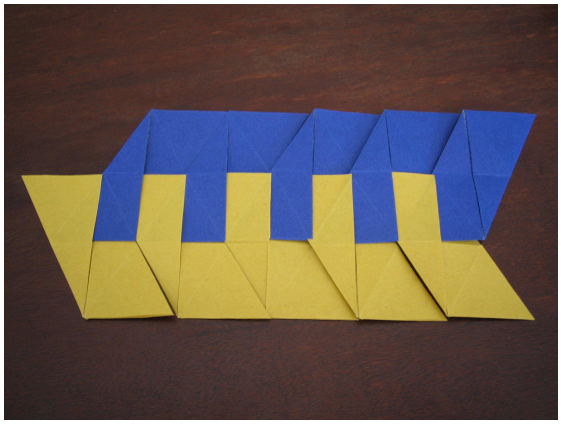


Repita o procedimento anterior, encaixando a peça A na B, depois a B na A, sucessivamente.

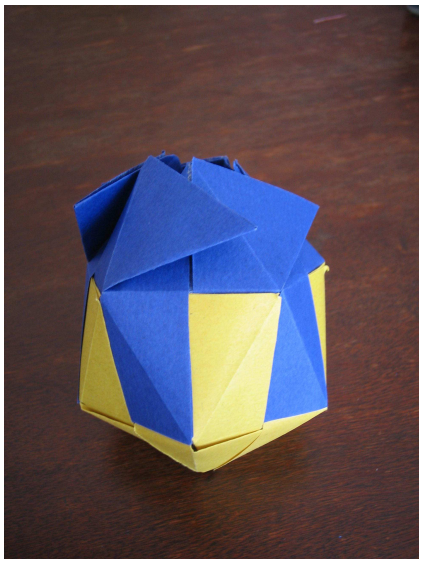


Para facilitar a montagem, recomenda-se colar com alguma fita adesiva todos os encaixes na parte interna.

Encaixado todas as peças, encaixa-se a última peça, no caso a B, na primeira peça A, dando um formato cilíndrico.



Com um formato cilíndrico em suas pontas triangulares, encaixa-se um triângulo em outro adjacente sucessivamente.



Repetindo o passo anterior em outro lado do cilindro, finalizamos o icosaedro.



Capítulo 10

Poliedros de faces quadradas

Certamente o único poliedro de face quadrada é o cubo. Um quadrado tem 4 ângulos de 90°, então temos as seguintes condições:

TABELA 10.1: Poliedros de face quadrada

Número de quadrados	**Soma dos ângulos**	**poliedros formados**
3	270°	cubo
4	360°	impossível

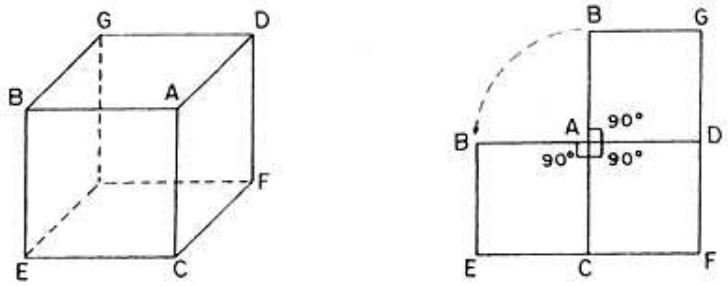
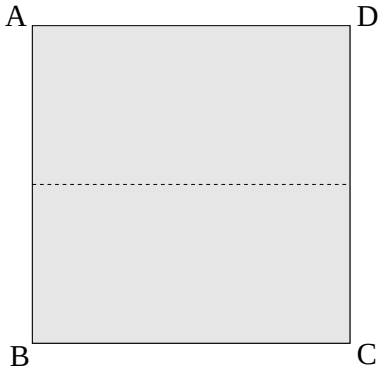


FIGURA 10.1: Figura obtida da RPM 15

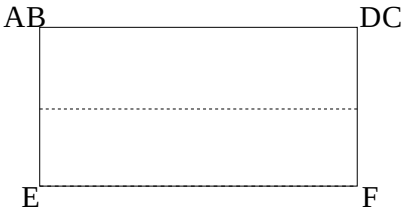
Vemos que o ângulo de um vértice do polígono com faces quadradas só é possível com 3 quadrados (uma vez que com 2 é insuficiente e com 4 é impossível, por somar 360°).

Existem diversas formas de se montar um cubo com *Origami* , porém a construção deste em especial facilita a colocação de objetos ou outros sólidos, além de melhor visualização.

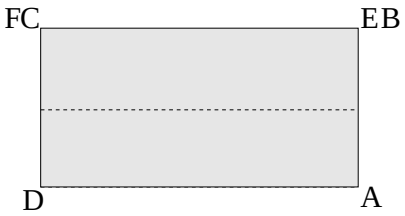
Iniciamos com um papel quadrado ABCD de lado $\frac{8}{3}$ de uma unidade trabalhada. Veremos adiante o motivo deste valor. Leve B e C aos vértices A e D respectivamente.



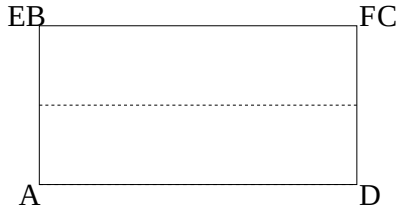
Obtemos o segmento EF=$\frac{8}{3}$.



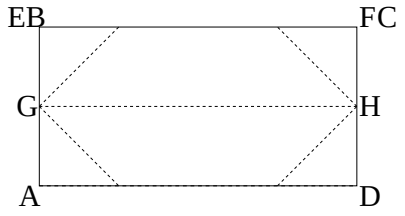
Dobrar de modo que leve B a E e C a F. Observar que A e D permanecem e $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{DF} = \frac{4}{3}$.



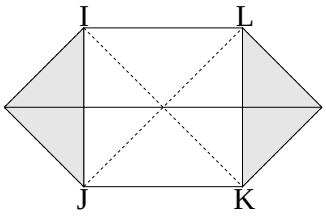
Virar o papel de modo que a parte opaca fique na frente. Dobrar $\overline{AD}$ em $\overline{EF}$, obtendo $\overline{GH}$.



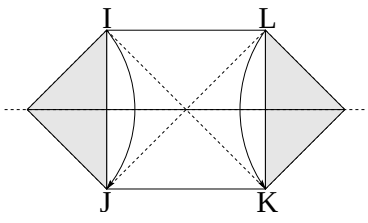
Dobrar todos os vértices sobre $\overline{GH}$, de modo que G e H sejam vértices de rotação, isto é, E (e B), F(e C), A e D sobre segmento GH. Notem que $\overline{EG} = \overline{GA} = \overline{FH} = \overline{HD} = \frac{2}{3}$.



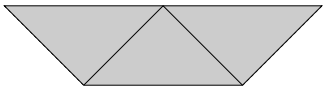
Como dobramos $\frac{1}{4}$ de cada lado do retângulo FDAE de medidas $\frac{4}{3}X\frac{8}{3}$, o quadrilátero IJKL é um quadrado de $\frac{4}{8}X\frac{4}{8}$. Dobrar as diagonais do quadrado IJKL.



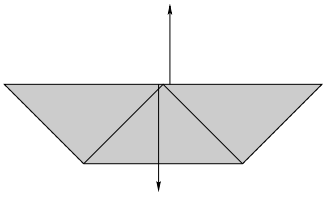
Dobrar agora a paralela que intercepta os lados $\overline{IJ}$ e $\overline{KL}$, passando pelo centro.



Obtemos então trapézio invertido com base menor medindo $\frac{4}{3}$ e base maior $\frac{8}{3}$.



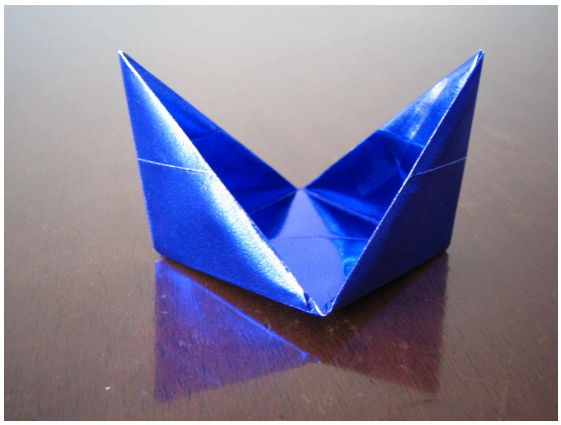
Abrir pelo centro da base maior, como na dobradura de um barco.



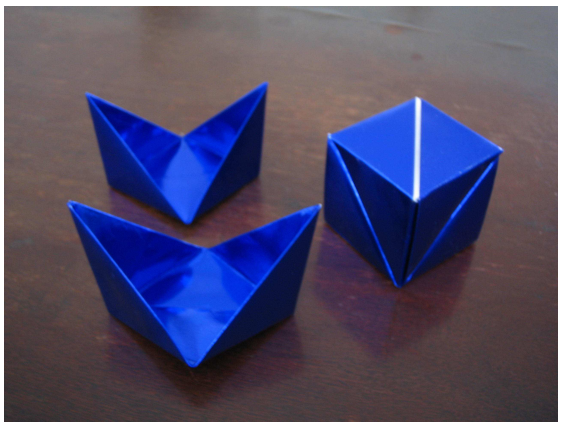
Conforme comentado anteriormente, abrir pelo centro formando um barco.



Abrir ao máximo esses dois pontos e assim passarão a ser vértices de um quadrado. Estará pronto uma das partes do cubo.



Construir outra peça repetindo os mesmos procedimentos. Terminando, veremos a formação de um cubo com as peças.



Capítulo 11

Poliedros de faces pentagonais

Veremos agora, a construção de um poliedro regular cujas faces são pentágonos. Como o ângulo interno do pentágono é de 108° em cada vértice, não existe a possibilidade de união de mais de três pentágonos, restando assim o dodecaedro como única solução.

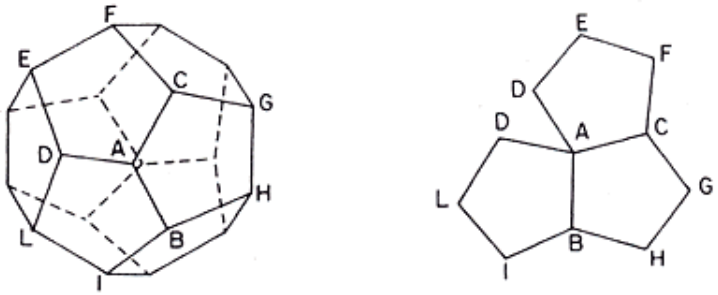


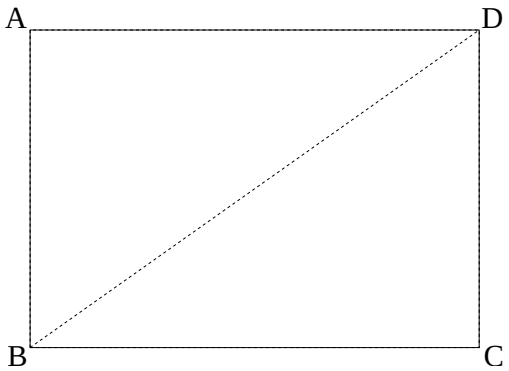
FIGURA 11.1: Figura obtida da RPM 15

11.1 Do copo ao pentágono

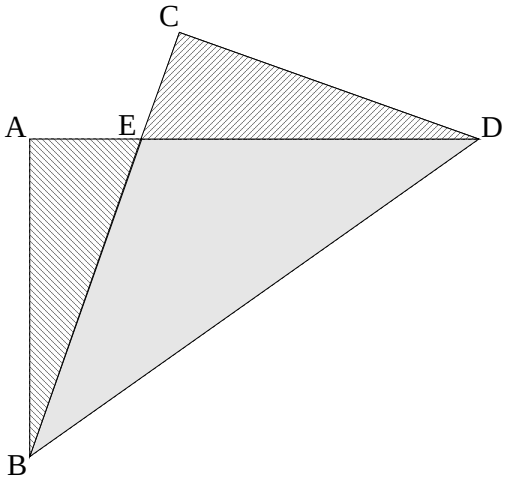
Para a construção do dodecaedro temos que começar com um papel de um tamanho especial, mas antes faremos uma análise em outra construção, a de um copo.

Com um retângulo qualquer:

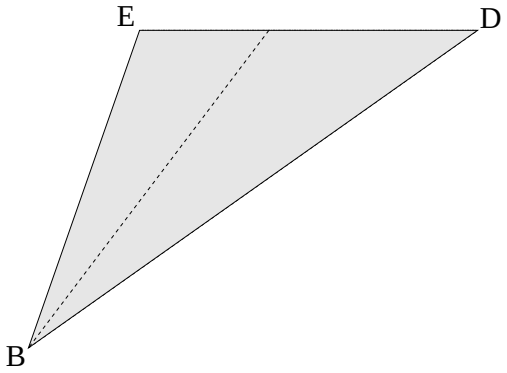
Dobrar a diagonal BD.



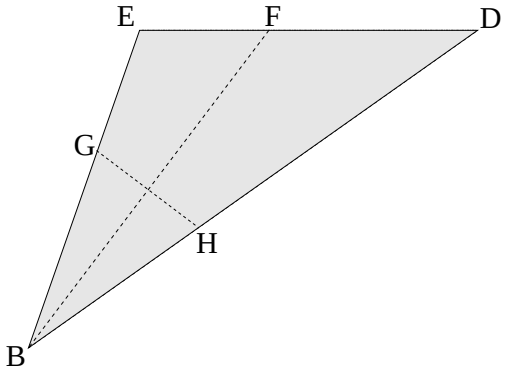
Encontrando o ponto E, intersecção de $\overline{AD}$ com $\overline{BC}$, dobrar $\overline{EB}$ e $\overline{ED}$, de modo que não prenda a parte oposta.



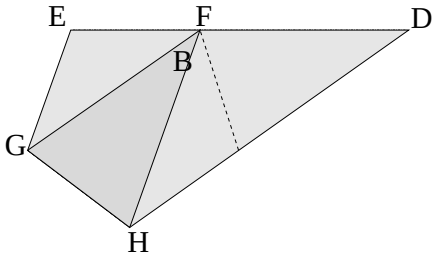
Dobrar agora a bissetriz de $\hat{B}$, fixando B e levando E até o segmento BD.



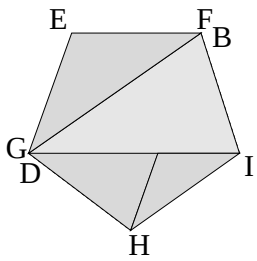
Voltar a posição anterior. Encontrar o ponto F, intersecção da bissetriz de $\hat{B}$ com $\overline{ED}$. Dobrar a mediatriz de $\overline{BF}$, levando B até F.



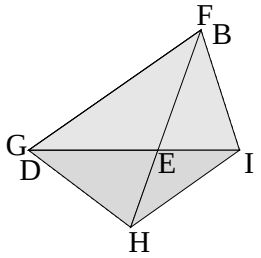
Temos então o segmento GH, mediatriz de $\overline{BF}$, na qual $G \in \overline{EB}$ e $H \in \overline{BD}$.



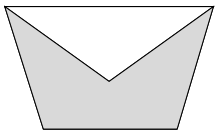
Seguindo os mesmos procedimentos do vértice B, dobrar D sobre G. Temos já um pentágono (possivelmente irregular) simétrico em relação à mediatriz de $\overline{HI}$, com $\overline{EG} \cong \overline{EF}$, $\overline{GH} \cong \overline{FI}$.



Dobrar o vértice E pelo eixo de rotação $\overline{GF}$. Observar que existem duas folhas, sendo uma dobrada para frente e outra para trás.

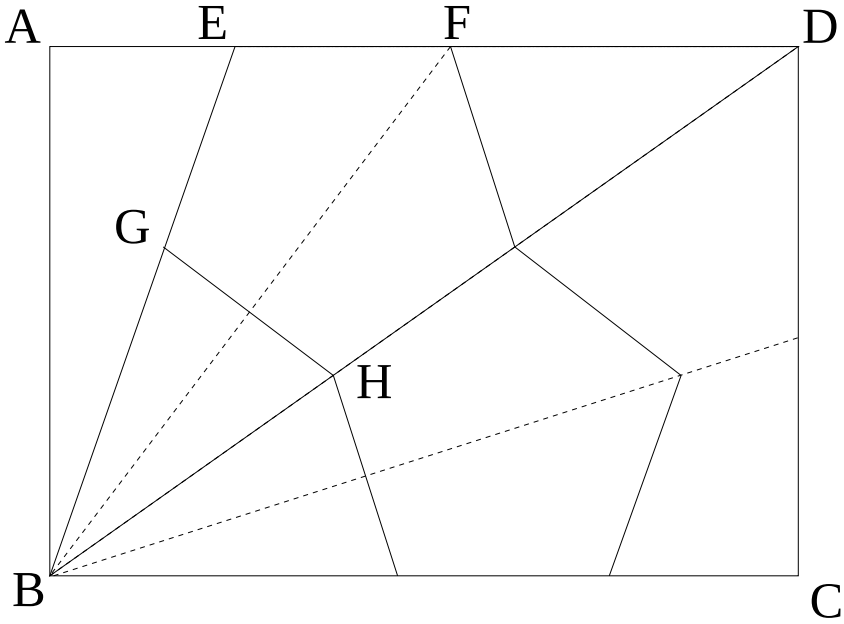


E está pronto o copo



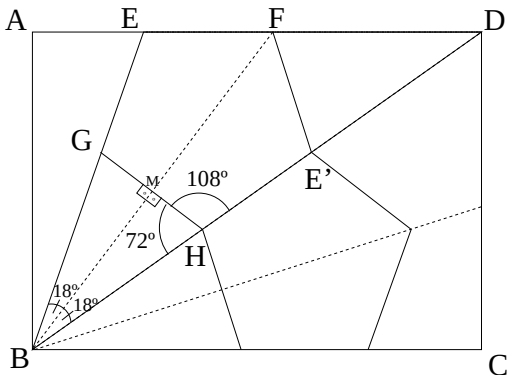
Faremos agora uma análise sobre a construção do copo para obtermos as medidas do retângulo para a construção do pentágono regular.

Ao desdobrarmos a construção do copo teremos as linhas de dobras. Sabemos que para que o pentágono seja regular, cada ângulo interno deve medir 108º. Por construção sabemos que $\overline{GH}$ é mediatriz de $\overline{BF}$ e este por sua vez é bissetriz de $\angle EBD$.

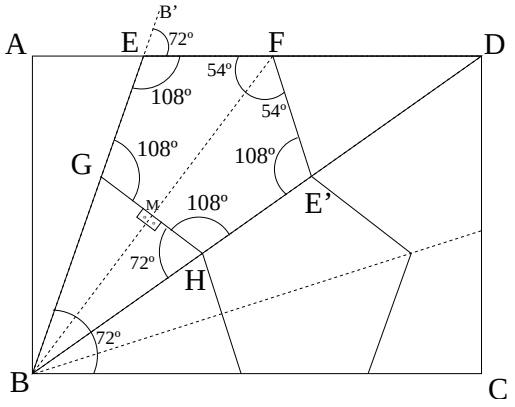


Temos que o triângulo HBG é isósceles, logo o $\angle EGH$ também mede 108º. Chamemos de M a intesecção de $\overline{GH}$ e $\overline{BF}$ e de E', onde E toca $\overline{BD}$.

Por construção, temos que $\overline{EG} = \overline{HE'}$. Como $\overline{BF}$ é bissetriz de $\widehat{EBE'}$ e E e E' são eqüidistantes de B, então, F é eqüidistante de E e E'.

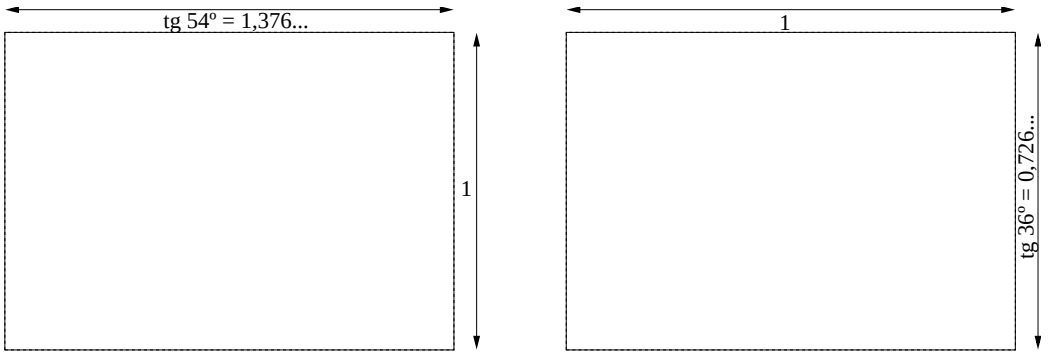


Por Tales temos que prolongando $\overline{BE}$, o $\angle B'ED$ é correspondente ao $\angle EBC$, medindo 72º. Pelo triângulo EBF, temos que $\measuredangle$EFB = 54º, assim como $\angle BFE'$. E finalmente o $\measuredangle FE'B = 108º$, pela simetria em relação a $\overline{BF}$.



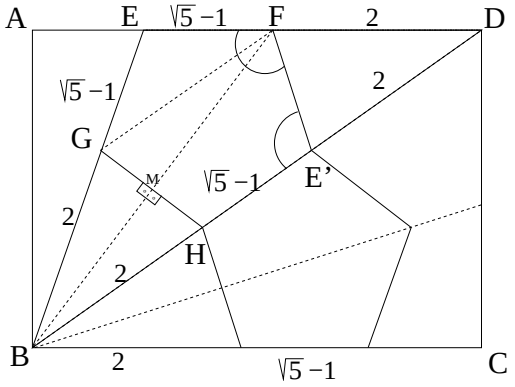
Temos então um pentágono com todos os ângulos de 108º. Mas, para provar que é regular necessitamos mostrar que todos os lados são congruentes. Pela construção, $\overline{GD}$ é bissetriz de $\angle ADB$, assim $\overline{EF} \cong \overline{HE'}$ e por simetria concluímos que $\overline{EG} \cong \overline{GH}$, fechando assim o pentágono regular.

Para obtermos um pentágono regular devemos encontrar um retângulo especial. Esse retangulo deve ter o ângulo entre a base (o lado maior) e sua diagonal exatamente 36º, isto é, se o lado maior for equivalente a 1, o lado maior deverá ser igual a $tg36º = 0,726....$ Ou então, se o lado menor for equivalente a 1, o lado maior deverá ser igual a $tg54º = 1,376....$



Chegamos então a um pentágono regular. Vimos, na construção de um pentágono regular (capítulo 7) que iniciamos com um quadrado de suposto lado 2. Verificamos também que a diagonal desse pentágono mantinha a mesma medida do lado do quadrado inicial e o lado do pentágono tinha $\sqrt{5}-1$. Observe que aplicando essas medidas na construção do copo, adotando já os devidos ângulos, temos:

$\overline{GF}$ tem, por construção, mesma medida de $\overline{BG}$. Como $\overline{BG}$ é diagonal do pentágono, supomos que meça 2. Assim, o lado do pentágono mede $\sqrt{5}-1$ e também pela construção, $\overline{E'D} = 2 = \overline{FD}$.



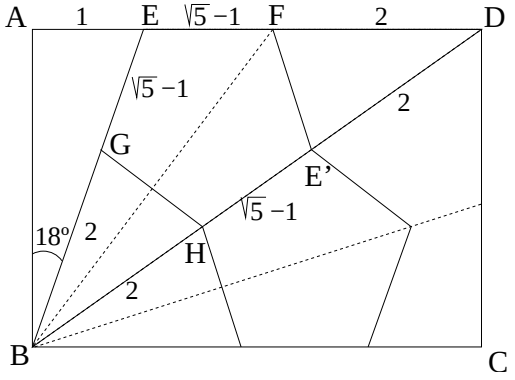
Sabemos portanto a medida do ângulo CBD e quanto deve medir a diagonal. Precisamos saber agora, quanto mede um dos lados do retângulo. Para isso, basta saber quanto mede $\overline{AE}$.

Sabemos que $\measuredangle ABE = 18^o$ (complementar de $angleEBC$) e que $\overline{BG} = 2$ e $\overline{GE} = \sqrt{5}-1$. Então:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = sen18^o$$

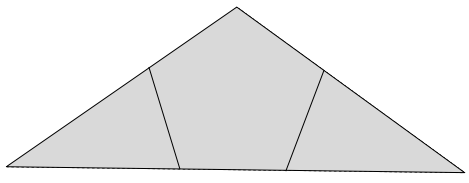
$$\frac{\overline{AE}}{\sqrt{5}+1} = 0,309...$$

$$\overline{AE} = 1$$

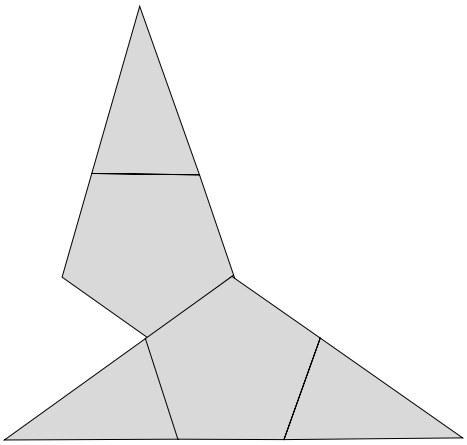


11.2 Dodecaedro

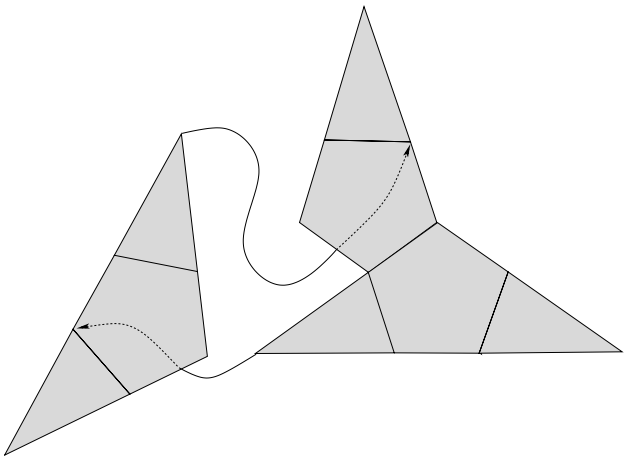
Podemos finalmente montar o dodecaedro. Através da dobradura do copo, iniciado com papel com as medidas especiais, na qual obtêm-se os pentágonos regulares, tome a seguinte peça:



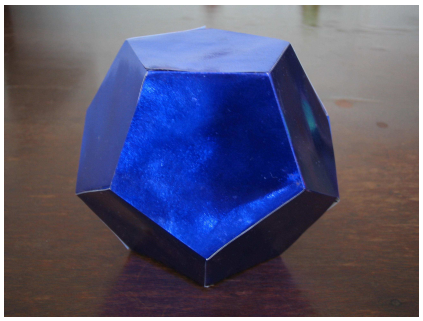
Como o dodecaedro é composto de 12 pentágonos, precisaremos de 12 peças para a construção.



Para fixação das faces é necessário colar na parte posterior dos pentágonos a parte triangular da peça.



Notem que a ponta da peça, que é composta pelos lados congruentes de um triângulo isósceles fazendo o papel de duas das diagonais do pentágono. E finalmente...



Capítulo 12

Poliedros Estrelados

Mostraremos agora alguns dos inúmeros poliedros não-convexos, os chamados poliedros estrelados. Basicamente podemos imaginar um tetraedro em cada face do octaedro e do icosaedro. Portanto, esses poliedros estrelados manterão as faces triangulares.

12.1 Octaedro estrelado

Temos abaixo a estrutura de octaedro estrelado.

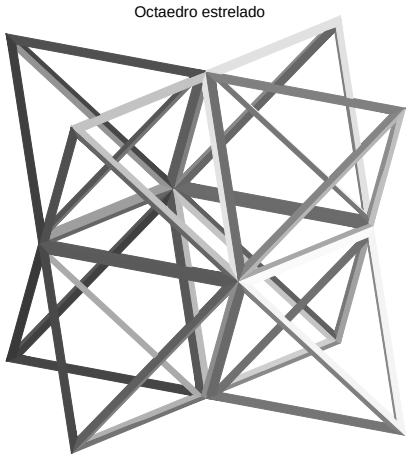
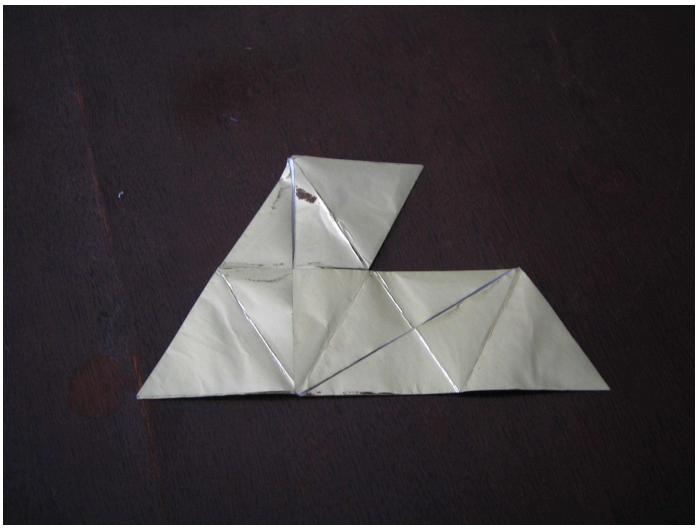
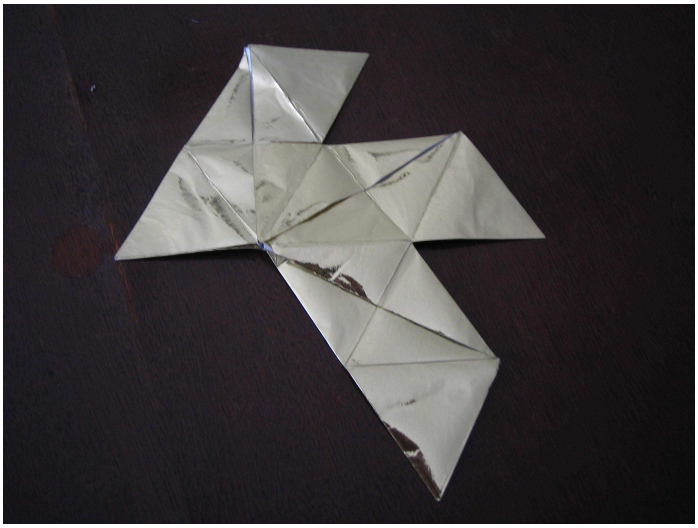


FIGURA 12.1: Octaedro estrelado do Maple

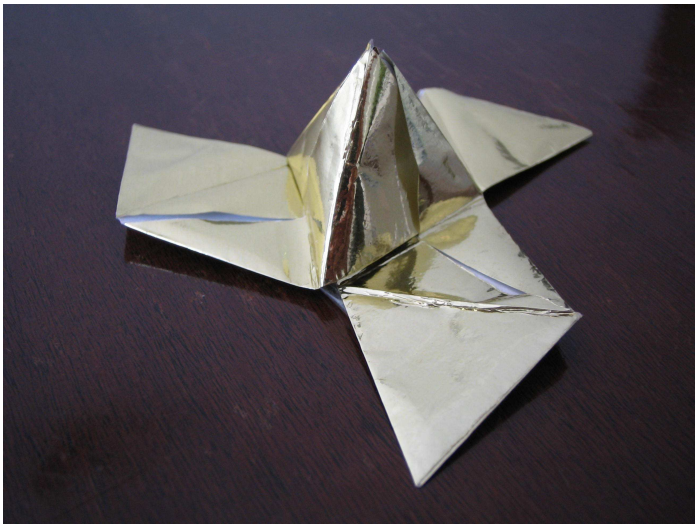
Para a construção iniciaremos com duas peças unidade B. Estas três etapas a seguir também serão utilizadas para o icosaedro estrelado.



Encaixar outra unidade B às duas peças, conforme segue.



Temos então um tetraedro, com sobra de três faces com encaixes e três faces sem. Portanto, com 3 peças formaremos dois tetraedros. Logo, para oito tetraedros serão necessários doze unidades B.



Terminado a montagem, temos a seguinte construção:



12.2 Icosaedro Estrelado

Para a construção do icosaedro inicia-se como as três etapas iniciais do octaedro estrelado. Porém, se cada três peças compõe dois tetraedros, para vinte tetraedros serão necessários então trinta unidades B, finalizando na seguinte construção:



Capítulo 13

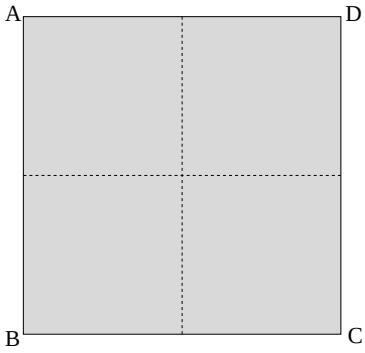
Esqueletos

Construiremos agora duas estruturas que estão relacionados ao octaedro e ao icosaedro, como se fossem seus esqueletos.

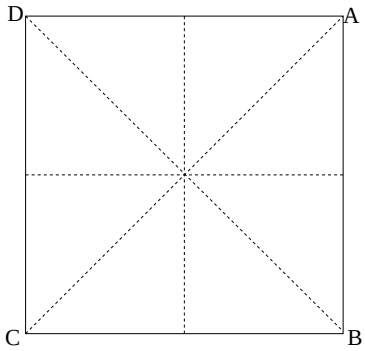
13.1 Esqueleto do Octaedro

Começaremos com o esqueleto do octaedro. Para a construção serão necessários seis papéis quadrados idênticos de lados $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, que serão dobrados da seguinte forma:

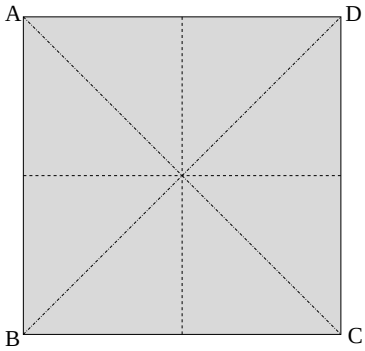
Dobrar as duas mediatrizes dos lados.



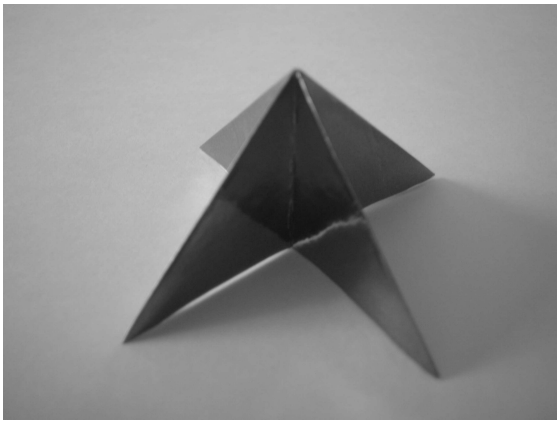
Virar o papel e dobrar as duas diagonais.



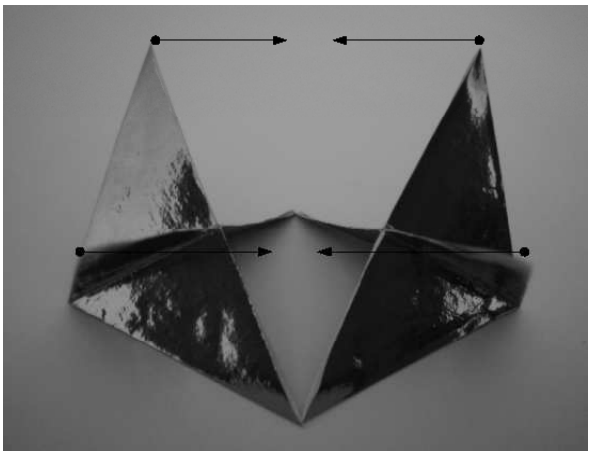
Desvirando o papel teremos as seguintes dobras:



Puxar o centro para cima, de modo que o ponto médios dos segmentos encontrem-se todos num ponto em comum.



Uni-las de modo que fiquem frente a frente.



Uma dica para a montagem é colar a parte interna de duas peças inicialmente. Depois, colocá-las como indicado no passo anterior. Em seguida, de duas em duas peças, colá-las às duas primeiras e assim em diante.

Ao final teremos:



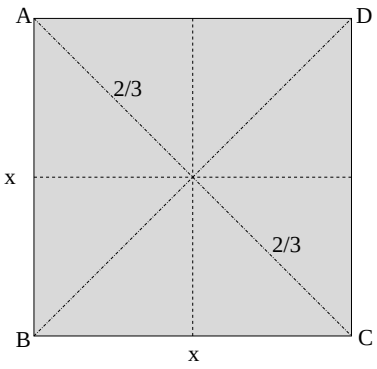
Podemos perguntar o por quê da medida $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Convencionamos, na construção das unidades A e B, que as medidas tinham a proporção de $1 \times \sqrt{3}$, e ao final cada aresta tinha $\frac{2}{3}$. Pela construção do esqueleto temos que a diagonal do quadrado tem o dobro da medida da aresta externa do esqueleto do octaedro. Temos então que:

A diagonal corresponde a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles, cujos catetos são os lados.

$$x^2 + x^2 = (2\frac{2}{3})^2$$

$$2x^2 = 4\frac{4}{9}$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

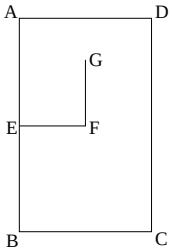


13.2 Esqueleto do icosaedro

Para a construção do esqueleto do icosaedro são necessários três retângulos Áureos idênticos, isto é, três retângulos cujos lados mantenham a razão áurea. Para isso, supondo o lado menor igual a 1, então o lado maior deverá ter $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Por outro lado, se o lado maior for igual a 1, então o lado menor corresponderá a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Recortado os retângulos com as devidas proporções, passamos para o seguinte:

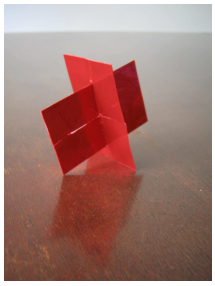
Temos que E = ponto médio de $\overline{AB}$.



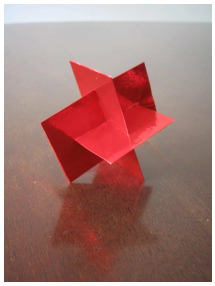
$$\overline{EF} = \overline{FG} = \frac{\overline{AD}}{2}$$

Recortar $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$.

Montar duas peças, conforme ao lado.



Colocando a terceira peça estará pronto o esqueleto do icosaedro.



Veremos que ao ligarmos os vértices da estrutura com segmentos obteremos um icosaedro.

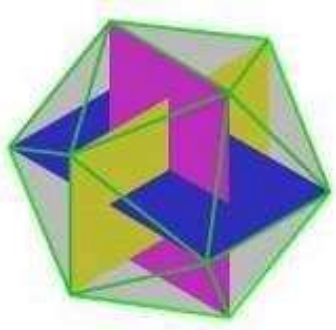


FIGURA 13.1: Obtido do site: http://www.bpiropo.com.br/fpc20070219.htm

Capítulo 14

Proporção entre algumas construções poliédricas

Neste capítulo mostraremos a necessidade de uma relação de proporção que deve existir entre os sólidos apresentados anteriormente: o esqueleto do octaedro, o octaedro, o octaedro estrelado e o cubo e o esqueleto do icosaedro, o icosaedro, o icosaedro estrelado e o dodecaedro, cuja finalidade é mostrar a dualidade existente entre eles.

14.1 Do esqueleto ao cubo

Partimos com a construção do octaedro. Vimos que se utilizarmos um papel A4, conseguiremos 12 retângulos de proporção $1 \times \sqrt{3}$ necessários para a construção das unidades. Com as unidades obtivemos triângulos equiláteros de lado $\frac{2}{3}$ e então, montamos o octaedro e o octaedro estrelado. Até o momento tinhamos uma unidade base, que era o lado menor do retângulo que finalizava nas unidades (A ou B). Vimos na construção do esqueleto do octaedro que se iniciássemos com quadrados de $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, a aresta do esqueleto teria $\frac{2}{3}$. Mas como construir esses quadrados de lado $\frac{2\sqrt{2}}{3}$?

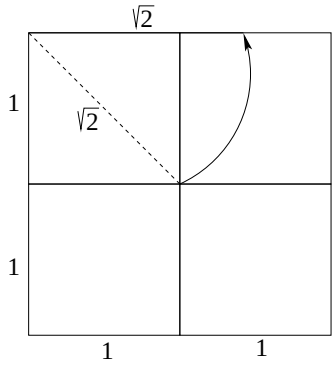
14.1.1 Começando o esqueleto do octaedro

Para isso é simples, sabemos que em um quadrado de lado 1, sua diagonal mede $\sqrt{2}$. Como temos que o lado menor do retângulo das unidades A (ou B) mede 1, então é possivel construir o quadrado de lado 1, logo, temos a $\sqrt{2}$.

Começaremos com um quadrado de lado 2, assim poderemos obter 4 quadrados de lado 1. Construa o segmento $\sqrt{2}$. Para isso, dobre as duas

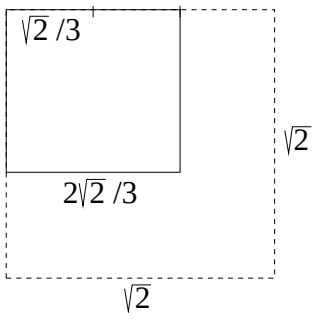
mediatrizes dos lados, transformando-o num único quadrado.

Dobrar a diagonal sobre o lado do quadrado maior e marcar o ponto.



Podemos agora optar por encontrar o dobro de $\sqrt{2}$, construir um quadrado com essa medida e dividi-lo em 3, ou fazer o que segue:

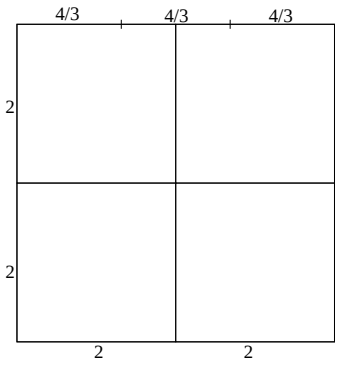
Com um quadrado de lado $\sqrt{2}$, encontrar $\frac{1}{3}$ do lado (através de um dos métodos citados anteriormente) e depois construir um quadrado com o dobro da medida encontrada.



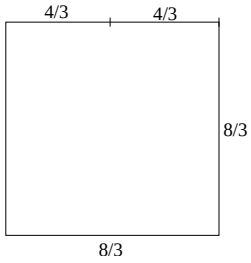
14.1.2 Cubo

Vimos no capítulo referente ao cubo que o quadrado inicial tinha lado $\frac{8}{3}$ e que resultava num cubo, cuja diagonal do lado media $\frac{4}{3}$, ou seja, duas vezes a medida da aresta dos triângulos, ou a distância entre duas pontas adjacentes do octaedro estrelado. Para obtermos um quadrado de lado $\frac{8}{3}$, poderíamos tomar um papel de lado 8 vezes a unidade (no caso 1 do lado do retângulo). Dividirmos esse lado por 3 e com essa medida obtida construir um quadrado. Por outro lado, podemos fazer o seguinte:

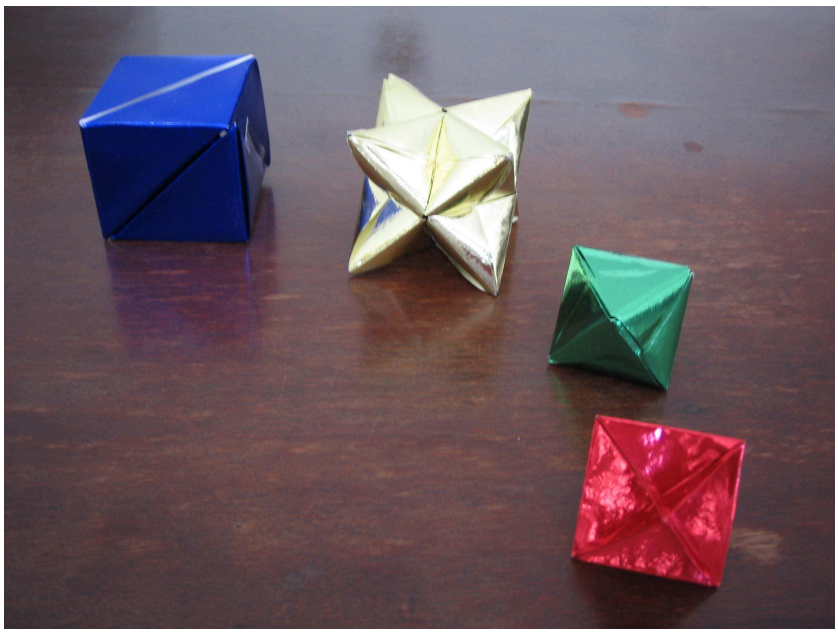
Com um quadrado de 4×4, divida, através de um dos métodos de secção, um dos lados em três partes iguais.



Como cada parte equivale a $\frac{4}{3}$, então, duas partes da secção corresponderá a $\frac{8}{3}$, e assim poderemos construir o quadrado.



14.1.3 Construções prontas



Terminada as construções, podemos encaixar o esqueleto dentro octaedro, o octaedro dentro da estrela e a estrela dentro do cubo. Deixaremos por conta do leitor a conferência dos resultados. Podemos ilustrar com isso a dualidade entre o octaedro e o cubo, sendo que o esqueleto do octaedro e a estrela são suportes.

14.2 Do esqueleto ao Dodecaedro

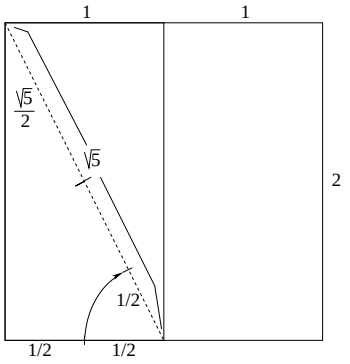
Quanto ao icosaedro e o icosaedro estrelado, desde que construídos com as mesmas medidas das unidades, as arestas serão congruentes. Devemos construir o seu esqueleto, de forma que pertença ao sólido em referência.

14.2.1 Começando o esqueleto do icosaedro

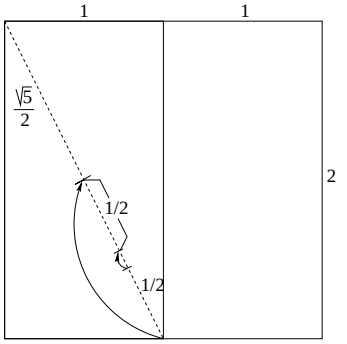
Vimos que para construir o esqueleto do icosaedro são necessários retângulos áureos e que o lado menor corresponde à aresta da face do icosaedro.

Como o lado maior é áureo em relação ao lado menor, podemos adotar como 1, a medida da aresta que corresponde ao lado menor.

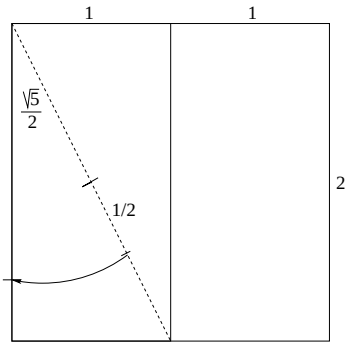
Iniciando com um quadrado de 2×2, divida-o ao meio e obteremos um retângulo de 1×2. A diagonal desse retângulo corresponde a $\sqrt{5}$ Marque também a medida $\frac{1}{2}$ e anote sobre o segmento $\sqrt{5}$



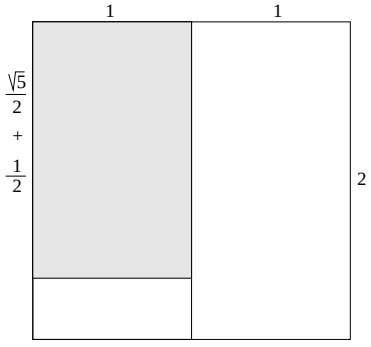
Transfira a medida $\frac{1}{2}$ somando-a a $\frac{\sqrt{5}}{2}$.



Transfira o segmento $\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$ sobre o lado e anote este ponto.



Encontramos então o segmento áureo em relação ao lado 1. Podemos agora construir o retângulo áureo. Observação:



$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

14.2.2 Dodecaedro

Vimos na construção do dodecaedro que são necessários retângulos especiais, cuja diagonal divida o ângulo reto em ângulos de 54º e 36º. Mas

esses retângulos são construtíveis sem ajuda de um transferidor. A esta altura o icosaedro estrelado já está pronto, portanto é possível saber a distância de duas pontas da estrela

Tome dois vértices (ou duas pontas) de tetraedros que tenha apenas um vértice em comum. Meça em um papel a distância ($\overline{AB}$) e anote.

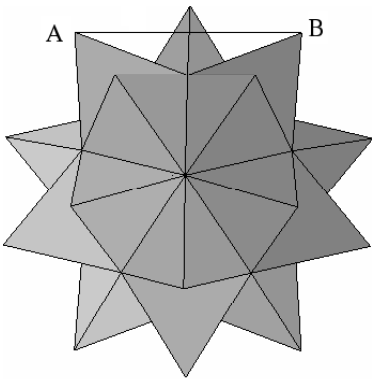
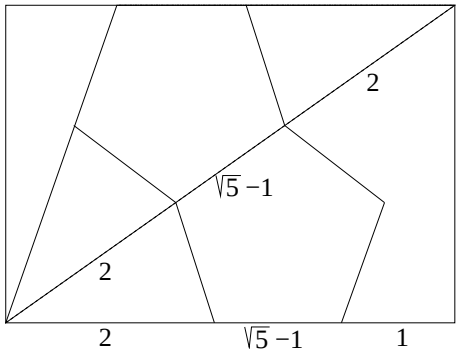


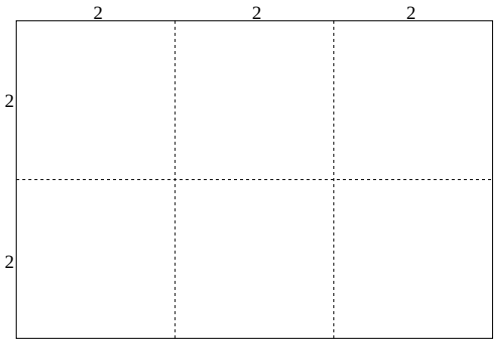
FIGURA 14.1: Dodecaedro estrelado do Maple

Vamos supor essa distância $\overline{AB}$ seja 2, assim como trabalhamos na diagonal do um pentágono.

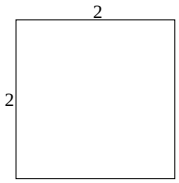
Nosso objetivo será encontrar um retângulo com lado igual a $\sqrt{5}+2$ e diagonal $\sqrt{5}+3$.



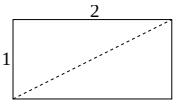
Iniciaremos com um retângulo com as medidas 6×4.



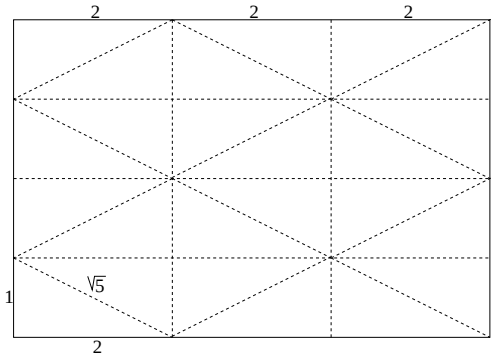
Dobrar um quadrado de 2×2.



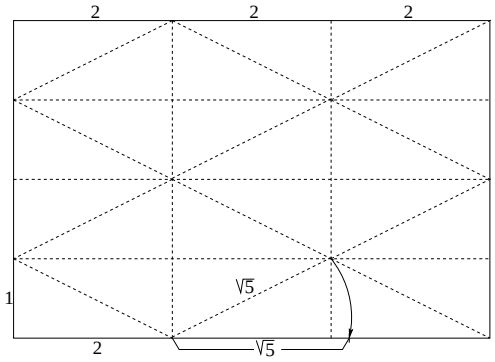
Dobrar agora um retângulo 2×1 e dobrar sua diagonal. Essa diagonal corresponde a $\sqrt{5}$



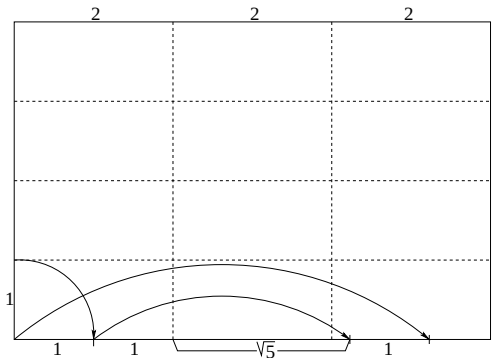
Abrindo o papel podemos verificar que cada segmento na horizontal equivale a 2, na vertical 1 e na diagonal $\sqrt{5}$.



Dobrar o segmento $\sqrt{5}$ sobre o lado e anotar, conforme a figura.

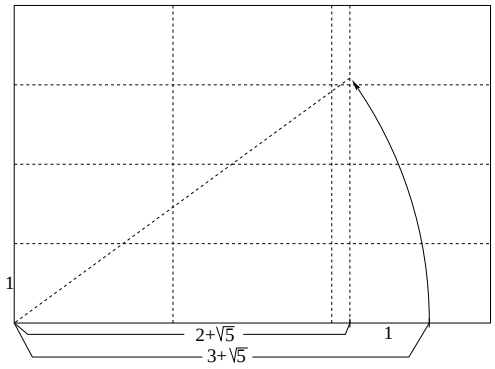


Dobrar o segmento 1 sobre o lado que estamos construindo um dos lados do retângulo e transferi-lo somando a $2 + \sqrt{5}$.

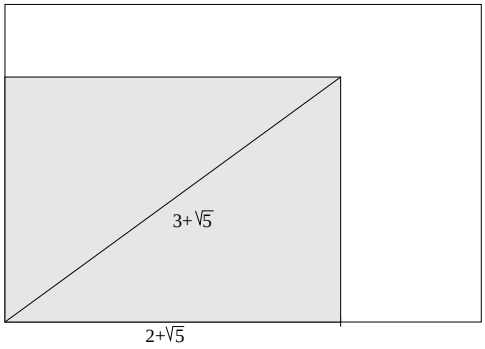


Encontramos os segmentos $2 + \sqrt{5}$ e $3 + \sqrt{5}$, ou seja, o lado e a diagonal do retângulo, dados suficientes para a construção o retângulo.

Dobrar agora uma perpendicular ao lado $2 + \sqrt{5}$. Encontrar o ponto que dista $3 + \sqrt{5}$ do vértice e pertença a perpendicular.



Temos assim um retângulo cujo lado mede $2+\sqrt{5}$ e a diagonal $3+\sqrt{5}$. Basta agora, seguirmos a construção do copo e obtermos as faces do dodecaedro.



14.2.3 Construções prontas



Terminada as construções, podemos encaixar o esqueleto dentro icosaedro, o icosaedro dentro da estrela e a estrela dentro do dodecaedro. Deixaremos também por conta do leitor a conferência dos resultados. Podemos ilustrar com isso a dualidade entre o icosaedro e o dodecaedro, sendo que o esqueleto do icosaedro e o icosaedro estrelado são apenas suportes.

Capítulo 15

Auxilio da Informática

Vários programas podem auxiliar no ensino de *Origami* , onde são possíveis criar simulações de algumas dobras, facilitando a visualização dos resultados. Poderíamos por exemplo, usar a parte gráfica do Maple para criar os objetos a serem dobrados ou criando animações que auxiliariam em uma aula de dobraduras.

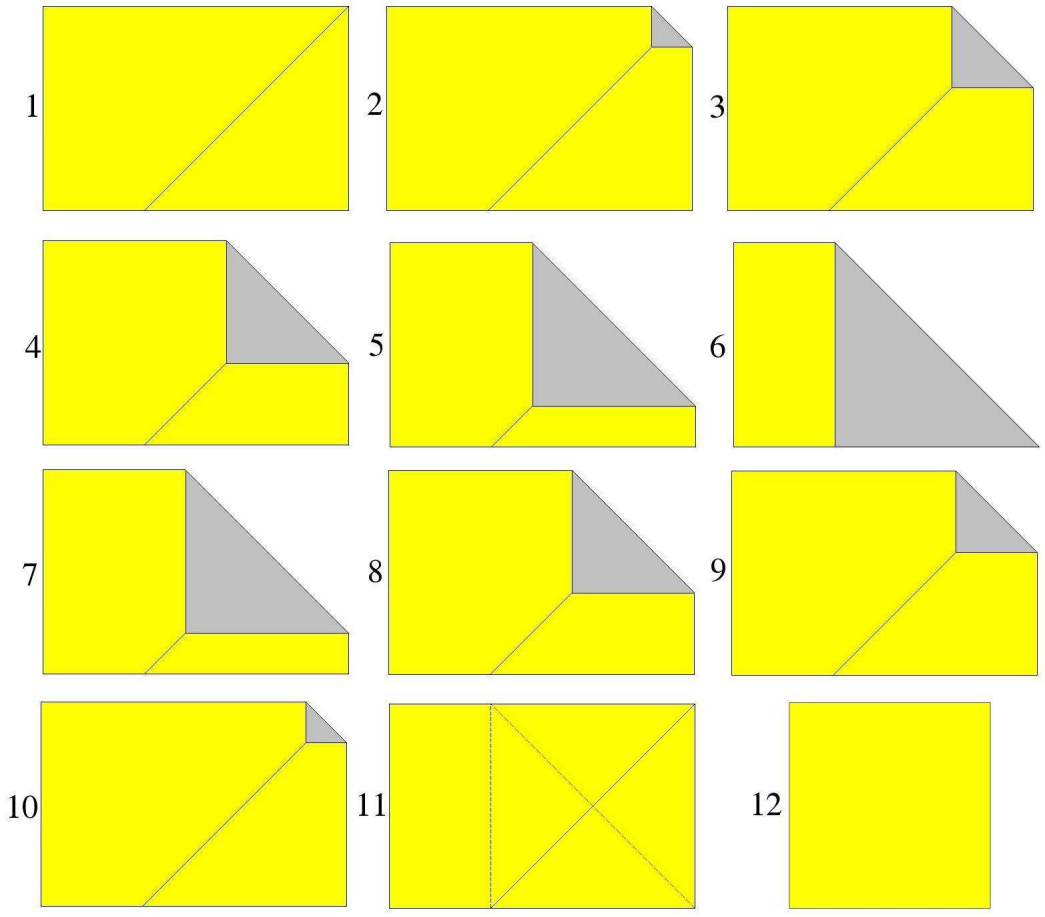


FIGURA 15.1: Sequência da animação criado no Maple

Com o programa GeoGebra, podemos criar simulações de dobraduras, manipulando através de um ponto, que representa a ponta de um papel

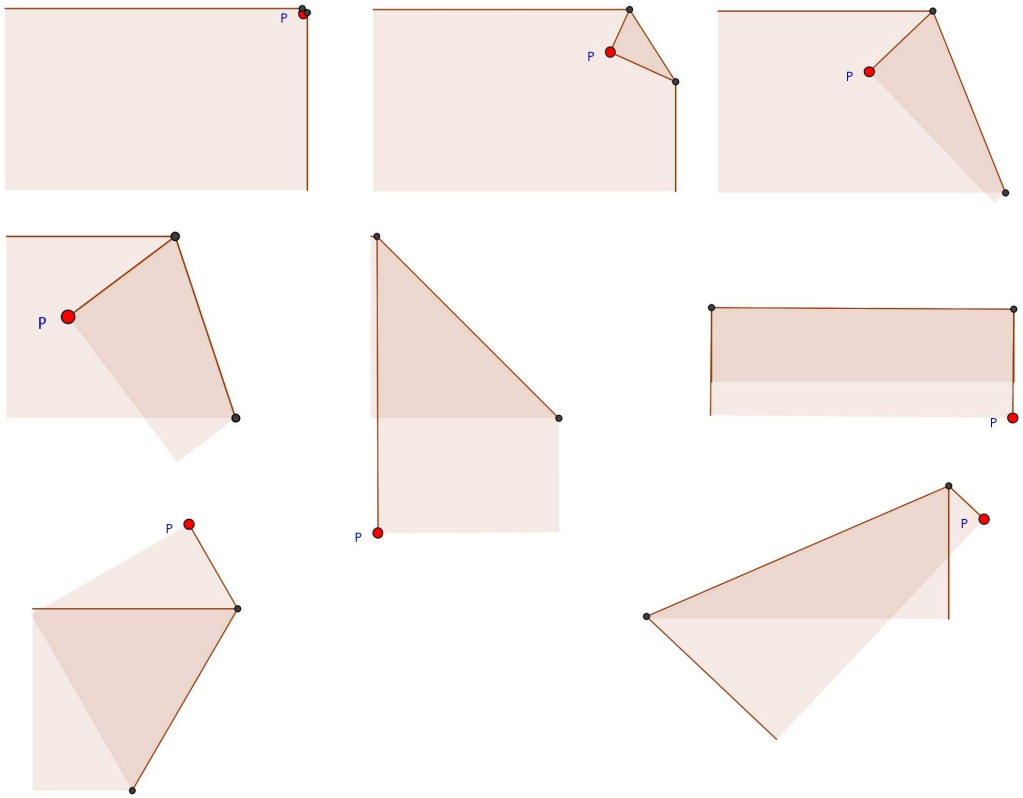


FIGURA 15.2: Simulações do dobradura no GeoGebra

Capítulo 16

Conclusão

Atualmente existem inúmeros problemas a serem resolvidos no Brasil, seja na Segurança, na Política, na Economia ou na Educação. Porém, é mais do que comprovado que a solução destes e de vários outros problemas está na Educação. Exemplo disso é o grande desenvolvimento de países como a Coréia do Sul e Chile nos últimos anos, que colhem hoje os frutos dos investimentos na Educação.

Alguns dos problemas na Educação talvez ocorram devido a uma falha estrutural da cultura, seja por falta de interesse dos alunos ou por falta de estrutura física e financeira. Para procurar atingir resultados na Educação foi implantada após a atual Constituição Federal de 1988, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação - LDB, que estabelece diretrizes a serem seguidas e através dos Parâmetros Curriculares Nacionais estabelece critérios e orienta o docente a um planejamento mais eficaz. Dentre os temas abordados nos PCN's, a Geometria se destaca e nota-se uma cobrança ostensiva ante as diretrizes tecnicistas anteriores, na qual o tema caía no esquecimento.

Visando então esse enfoque na Geometria requerida nos PCN's foi elaborado este trabalho aproveitando o baixo custo e mais uma metodologia variada de ensino, procurando de forma lúdica e didática, aprofundar no ensino da Matemática através do *Origami* e recortes.

No decorrer do desenvolvimento do trabalho foi observado que muitas pessoas associam *Origami* com dobraduras de animais, flores, formas que representam algo e nunca a geometria.. Talvez este seja um dos motivos do pouco uso no ensino. Além disso, os resultados atraem a atenção de todos, principalmente de crianças e, por este fato, o uso desse tipo de material deveria se tornar mais frequente, pois atrair a atenção das crianças na sala de aula está se tornando cada dia mais difícil.

Um fator que esse tipo de material também pode contribuir é na educação de pessoas com problemas de visão, onde com o *Origami* existe a possibilidade do tato, algo que no tradicional método de ensino não propiciaria.

Este trabalho foi uma pequena parte de um universo que há para ser estudado. Alguns assuntos apresentados foram superficiais, como na utilização da informática no auxilio do *Origami* , que haveria assunto suficiente para um novo trabalho. Mas o intuito deste trabalho foi mostrar a Matemática escondida numa simples dobra, mostrando assim, mais um material para o escasso campo do ensino da Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] ABE, Hisashi, *Sugoizo Origami*, Nippon Hyoronsha Co. Ltd., Tókio, 2003.

[2] BOYER, Carl B., *História da Matemática*, tradução de Elza F. Gomide, Editora Edgard Blücher Ltda.,São Paulo, 1974.

[3] GARDNER, Martin, *Rodas, vidas e outras diversões matemáticas*,. Gradiva, Lisboa, 1992.

[4] GENOVA, Carlos,. *Origami - A milenar arte das dobraduras*,. Escrituras Editora, São Paulo, 2001.

[5] STEWART, Ian, *Mania de Matemática - Diversão e jogos de lógica e matemática*, Jorge Zahar Editor Ltda, Oxford, 2005.

[6] *Chave Mágica - Origami*, URL: `http://www.mpc.com.br/chavemagica/origami.html`, consultado em 28/09/2006.

[7] FERNÁNDEZ, E. *De cómo la geometría entrelaza ciencia y arte: Historia de un poliedro*, Publicado em . `http:html`, consultado em 19/09/2007.

[8] KNOTT, Ron. *Some Solid (Three-dimensional) Geometrical Factos about the Golden Section*. Publicado 1996 e atualizado em 2007. http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi3DGeom.html. Consultado em 19/09/2007.

[9] LUCERO, Jorge C., *Retângulos*, URL: `http://www.mat.unb.br/ lucero/orig.html`, consultado em 28/09/2006.

[10] PIROPO, B. *Um número muito especial - Espiral de Fibonacci e Poliedros*. Publicado 1m 19/02/2007. http://ig.forumpcs.com.br/coluna.php?b=202579 Consultado em 19/09/2007

[11] PEDONE, Nelma M.D., *Poliedros de Platão*, R.P.M. 15, Sociedade Brasileira da Matemática, Rio Grande. CD-Rom com 60 edições da Revista do Professor de Matemática.

São Carlos, 20 de novembro de 2007.

Eduardo Cavacami Yolanda K. S. Furuya