3ª ATIVIDADE DE ENSINO DA MATEMÁTICA ATRAVÉS DE PROBLEMAS

Prof. Pedro Malagutti

2^{o}. semestre de 2005

ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. Colorir uma bandeira de 4 listras com 5 cores diferentes de modo que duas listras adjacentes não tenham a mesma cor. Pode-se repetir cores, mas não em faixas adjacentes. Quantas bandeiras diferentes poderão ser pintadas?

2. Complete a tabela do verso desta folha.

3. Problema do Menino Guloso: Um menino encontra-se no balcão de uma sorveteria que oferece 7 opções diferentes de sabores. Ele tem dinheiro para comprar 4 sorvetes e ele também pode escolher sabores repetidos. Nessas condições, quantos diferentes pedidos ele pode fazer?

4. Problema dos vasos: Com 2 cores diferentes, de quantas maneiras distintas podemos pintar 3 vasos idênticos, pintando cada vaso de uma única cor? Resolva o mesmo problema com 4 cores e 5 vasos.

Respostas:

Problema 1:

Problema 2 (Completar no verso desta folha).

Problema 3:

Problema 4:

ANÁLISE COMBINATÓRIA

O Princípio Multiplicativo: Se uma decisão d_1 puder ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, outra decisão d_2 puder ser tomada de n maneiras diferentes, então o número total de se tomarem as decisões é o produto de m por n.

RESPEITANDO A ORDEM				
	SIMPLES	FÓRMULA	COM REPETIÇÃO	FÓRMULA
PERMUTAÇÕES	Ex.: De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 6 carros em 6 garagens? Resp.:	O número de permutações de n elementos é Resp.:	Ex.: De quantas maneiras 3 pessoas podem ficar alojadas em 2 quartos, com duas pessoas no primeiro quarto e uma pessoa no segundo? Resp.:	O número de permutações de n objetos dos quais p_1 são iguais a_1 , p_2 são iguais a a_2 , ... , p_k são iguais a a_k é Resp.:
ARRANJOS	Ex.: De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 6 carros em 3 garagens? Resp.:	O número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por Resp.:	Ex.: Qual é o número de placas de carro com 3 letras e 4 dígitos, supondo que o alfabeto tenha 26 letras? Resp.:	O número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p é Resp.:

A ORDEM NÃO É IMPORTANTE				
	SIMPLES	FÓRMULA	COM REPETIÇÃO	FÓRMULA
COMBINAÇÕES	Ex.: Quantas saladas de frutas (com frutas diferentes) podemos fazer utilizando-se 3 frutas se dispomos de 5 tipos diferentes de frutas? Resp.:	O número de combinações de n elementos, tomados p a p, é dado por: Resp.:	Ex.: De quantos modos diferentes podemos comprar 4 refrigerantes em um bar que vende 2 tipos de refrigerantes? Resp.:	O número de combinações com repetição de n elementos tomados p a p é Resp.:

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

Uma aplicação em que as repetições aparecem na contagem e que serve para a formulação de muitos modelos matemáticos de situações do mundo real refere-se ao problema de contar o número total de soluções inteiras positivas de uma equação do tipo:

$$\mathbf{x_1 + x_2 + ... + x_n = m}$$

Exemplo Elementar: qual é o número total de soluções inteiras e positivas de $\mathbf{x_1 + x_2 = 5}$?

Resp.: Este problema é tão simples que podemos enumerar todas as possibilidades. São elas:

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$
1	4
2	3
3	2
4	1

Não consideramos aqui a possibilidade de um dos termos ser zero, por isso obtivemos somente 4 soluções. Se algum dos termos pudesse ser zero, obteríamos mais duas soluções $\mathbf{x_1 = 0, x_2 = 5}$ e $\mathbf{x_1 = 5, x_2 = 0}$. Dificilmente a enumeração de todas as soluções pode, entretanto, ser generalizada.

Solução Esperta: Escrevemos o número 5 na forma unária: $|\;\;|\;\;|\;\;|\;\;|$. Com essa notação as soluções positivas são:

$$|\,+\,|\;\;|\;\;|\;\;|$$
$$|\;\;|\,+\,|\;\;|\;\;|$$
$$|\;\;|\;\;|\,+\,|\;\;|$$
$$|\;\;|\;\;|\;\;|\,+\,|$$

Isso corresponde a colocar o sinal de + entre duas barras **| |**. Tal tarefa pode ser feita através de C(4,1) = 4 maneiras diferentes. Será que esta técnica também funciona em outros exemplos?

Exemplo: Quantas soluções positivas tem a equação $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9}$?

$$9 \longrightarrow \quad |\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|$$
$$\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow$$

Existem 9 – 1 = 8 lugares para se colocar o sinal +. Para repartir 9 em cinco partes devemos escolher 5 – 1 = 4 desses oito lugares para colocar sinais de +. Já que os sinais de + são todos iguais, podemos fazer isto sem nos preocuparmos com a ordem desses sinais. Assim, o número total de soluções da equação é C(8,4) = (8!) ÷ [4! . 4!] = 70.

Resultado Geral:

O número de soluções positivas da equação $\mathbf{x_1 + x_2 + ... + x_n = m}$ é C(m-1, n-1)

Sabendo-se deste fato, vamos resolver agora o seguinte problema:

Problema: Qual é o número de soluções inteiras <u>positivas ou **nulas**</u> da equação $\mathbf{x_1 + x_2 + ... + x_n = m}$?

Resp.: Façamos um pequeno truque, introduzindo a mudança $\mathbf{y_i = x_i + 1}$. Com isto vamos recair no caso anterior que já resolvemos. Como

$$\mathbf{x_1 + x_2 + ... + x_n = m}$$

somando 1 a cada $\mathbf{x_i}$, obteremos $\mathbf{(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + ... + (x_n + 1) = m + n}$, ou seja $\mathbf{y_1 + y_2 + ... + y_n = m + n}$. O número de soluções positivas desta última equação é igual ao número de soluções positivas ou nulas de $\mathbf{x_1 + x_2 + ... + x_n = m}$. Pelo resultado geral obtido acima este número é C(m+n-1, n-1).

Exemplo: Qual é o número de soluções positivas ou nulas da equação $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9}$?

Resp.: C (9+5-1, 5-1) = C (13, 4) = 665.

Combinações com repetição

Em muitas situações da vida real, necessitamos contar seleções, permitindo que ocorram repetições. Veja os seguintes exemplos:

Problema do parque de diversões: Um menino está em um parque de diversões e resolve comprar dois bilhetes. No parque há 4 tipos de brinquedos:

C -- chapéu mexicano
F -- trem fantasma
M – montanha russa
R – roda gigante

O menino pode comprar dois bilhetes do mesmo tipo, se ele quiser ir duas vezes no mesmo brinquedo. Nessas condições, qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes?

Resolução Elementar: Como sempre, é possível resolver este problema simples enumerando todas as possibilidades. São elas:CC CF CM CR FF FM FR MM MR RR.

Observe que aí estão listadas todas as possibilidades e que CF é igual a FC, não importando se a ordem do primeiro com o segundo bilhete, mas incluindo repetições. Se não fossem permitidas repetições o resultado seria C(4,2) = 6, entretanto neste cálculo não se incluiu a hipótese do menino comprar dois bilhetes repetidos e o número correto de possibilidades é 10 = 6 + 4 (quatro repetições foram adicionadas).

Resolução esperta: Sejam

x_1 o número de bilhetes de C -- chapéu mexicano
x_2 o número de bilhetes de F -- trem fantasma
x_3 o número de bilhetes de M – montanha russa
x_4 o número de bilhetes de R – roda gigante

Como o número total de bilhetes que o menino quer comprar é 2, temos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$. Devemos encontrar então o número de soluções inteiras e não negativas desta equação. Mas isto já foi feito e é precisamente C(4+2-1,4-1) = C (5,3) = 10, como já esperávamos. Observe como foi importante resolver este problema um pouco mais teórico anteriormente. Basta comparar agora as duas soluções apresentadas. Este segundo método de resolução pode ser facilmente generalizado.

Solução do problema do menino guloso:

Resp.: Não basta combinar 7 sabores 4 a 4, pois ele pode repetir sabores. Com a mesma técnica usado no exemplo anterior, considere

x_1 o número de solicitações de sorvetes do primeiro sabor,
x_2 o número de solicitações de sorvetes do segundo sabor,
x_3 o número de solicitações de sorvetes do terceiro sabor,
x_4 o número de solicitações de sorvetes do quarto sabor,
x_5 o número de solicitações de sorvetes do quinto sabor,
x_6 o número de solicitações de sorvetes do sexto sabor e
x_7 o número de solicitações de sorvetes do sétimo sabor.

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4}$$

O número de soluções positivas ou nulas desta última equação é C(7+4-1, 7-1) = C(10,6) = (10!) / (6! 4!) = 210. Se em cada dia ele escolher uma combinação diferente de sabores, demorará 210 para saborear todas as combinações possíveis (incluindo sabores repetidos, é claro).

Solução do problema dos vasos:

Os três vasos podem todos ser pintados de uma mesma cor. Estamos novamente com um problema de combinações com repetição. Se x_1 é o número de vasos pintados na cor vermelha e x_2 é o número de vasos pintados de verde, então $x_1 + x_2 = 3$. O número de soluções positivas ou nulas desta equação é C(3+2-1, 2-1) = C(4,1) = 4. No caso de 4 cores e 5 vasos, o número de combinações possíveis é igual ao número de soluções positivas ou nulas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$, que é dado por C (4 + 5 - 1, 4 - 1) = C (8, 3) = 56.