

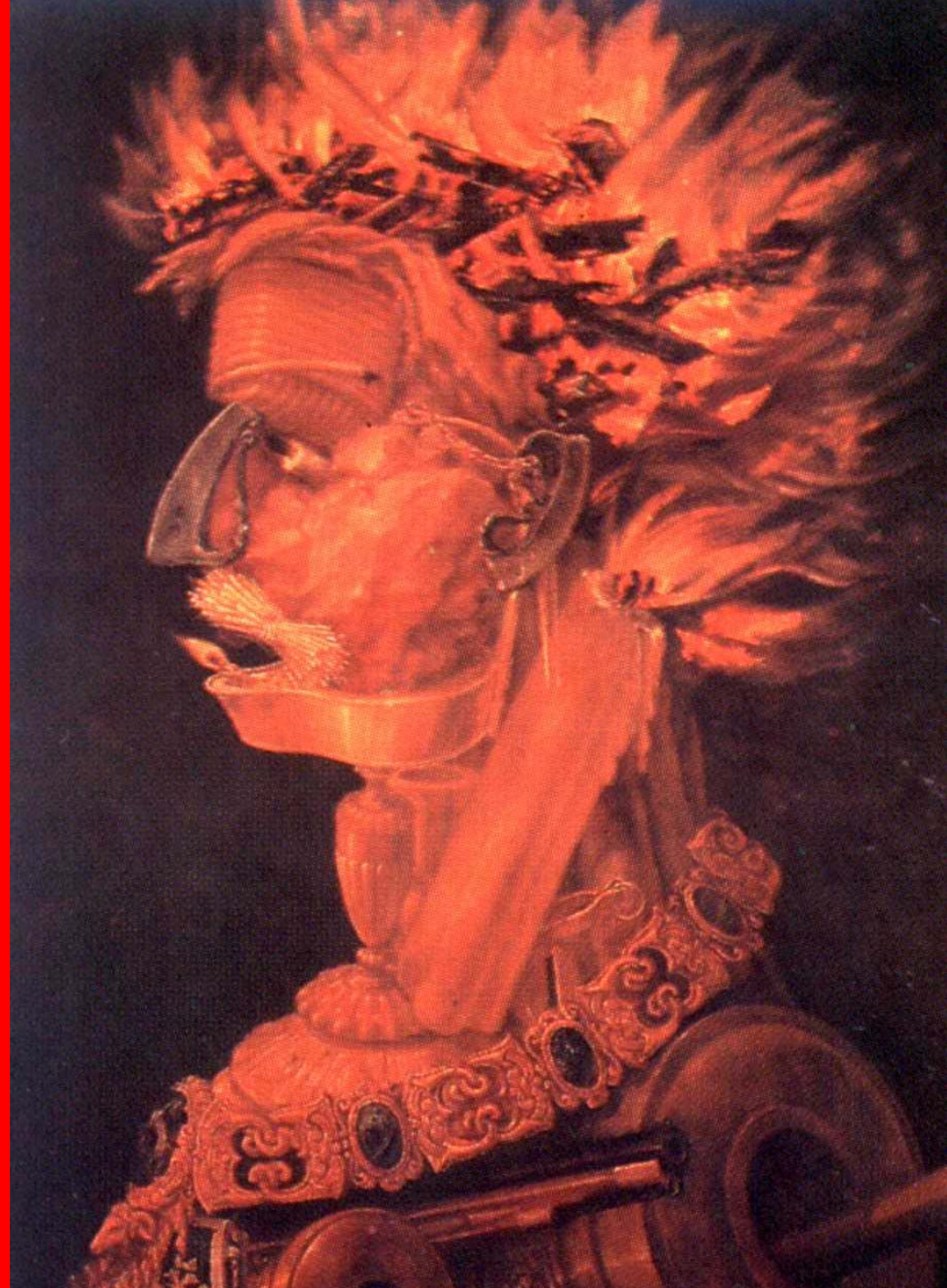


OS QUATRO ELEMENTOS DA NATUREZA E A MATEMÁTICA

Prof. Pedro Luiz Malagutti
Dep. de Matemática
UFSCar

O FOGO

**Como derivar $\frac{1}{2}$
vez uma função
descontínua**





A TERRA

**Como Euclides
ajudou os
aliados na
Segunda Guerra**

A ÁGUA

**Computadores
movidos a água**





O AR

**Do sopro da
vida ao DNA**

Objetivos

Este mini-curso pretende salientar pedagogicamente as conexões do início da filosofia da natureza com algumas recentes descobertas matemáticas. A justificativa para isto é muito simples: se o homem passou no início da civilização por este ritual de “revelação científica”, que marcou tão profundamente nossa cultura, parece-nos muito salutar e natural colocar tais questões aos alunos, principalmente se ela puder ser abordada segundo uma perspectiva interdisciplinar.

O SILÊNCIO

Arnaldo Antunes / Carlinhos Brown

Antes de existir computador existia a tevê
antes de existir tevê existia luz elétrica
antes de existir luz elétrica existia bicicleta
antes de existir bicicleta existia enciclopédia
antes de existir enciclopédia existia alfabeto
antes de existir alfabeto existia a voz
antes de existir a voz existia o silêncio
o silêncio
foi a primeira coisa que existiu
o silêncio que ninguém ouviu
astro pelo céu em movimento
e o som do gelo derretendo

o barulho do cabelo em crescimento
e a música do vento e a matéria em
decomposição
a barriga digerindo o pão
explosão de semente sobre o chão
diamante nascendo do carvão
homem pedra planta bicho flor
luz elétrica tevê computador
batedeira liquidificador
vamos ouvir esse silêncio meu amor
amplificado no amplificador
do estetoscópio do doutor
no lado esquerdo do peito esse tambor

A Mitologia e a ira da natureza

Uma lenda afro-brasileira

Conta-se que Olorum (Deus), encontrou Iemanjá (Rainha das águas) em seu trono e ficou muito bravo. Para castigá-la, Olorum determinou que Iemanjá fosse habitar o planeta Terra. Iemanjá levou consigo suas porções de água (os 7 mares) a fim de acomodá-los nos sete vales do planeta, mas como não havia espaço suficiente, o planeta acabou inundando. Preocupada, ela pediu ajuda a Ogum - o trabalho físico na terra. Ela pediu que Ogum cavasse a terra para que suas águas se acomodassem. Descuidadamente Ogum abriu uma fenda profunda no solo, atingindo o reino de Obaluaíê (o fogo geológico - subterrâneo). Obaluaíê se sentiu ofendido por seu reino ter sido inundado e reagiu com um terremoto que abalou a Terra enrugando-a.

Assim se formaram os continentes, os vales e as montanhas. Iemanjá representa também a fertilidade, a vida que vem da água. Xangô e toda a sua genealogia do fogo, aqueceu a terra criando condições de vida. O fogo aqueceu a água que se evaporou, formando o ar que vem a ser Oxalá, aparecendo a seguir as florestas e a flora simbolizadas por Oxossi.



Água - Iemanjá



Ar - Oxalá



Terra - Obaluaíê



Fogo - Xangô

Lunário perpétuo

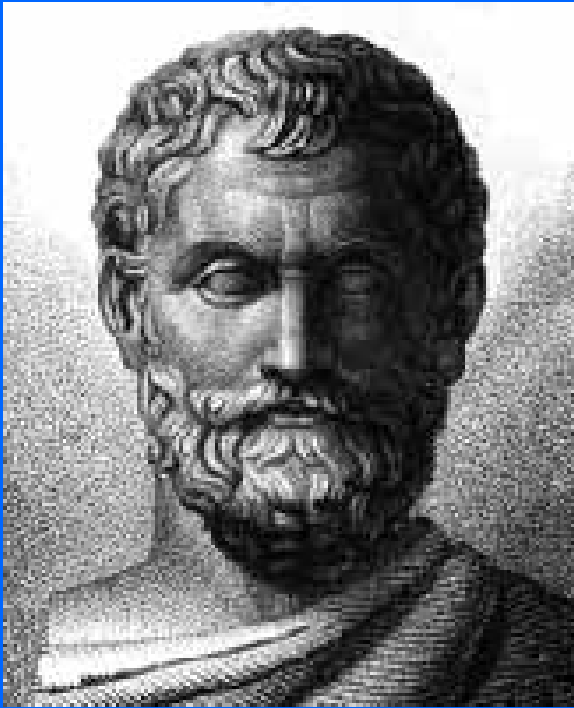
Antônio Nóbrega

As qualidades	Os quatro elementos	As quatro partes do mundo	Os quatro ventos	As quatro partes de <u>anno</u>	Os quatro humores	As quatro idades	As quatro qualidades dos doze signos
<u>Quente e humido</u>	Ar	Meio dia	Sul	Primavera	Sangue	Infância	<u>Geminis</u> <u>Libra</u> <u>Aquarius</u>
<u>Quente e seco</u>	Fogo	Oriente	Leste	Estio	Cólera	Juventude	<u>Áries</u> <u>Leo</u> <u>Sagitaris</u>
<u>Frio e humido</u>	Água	Occidente	Oeste	Outono	<u>Fleugma</u>	Velhice	<u>Cancere</u> <u>Scorpio</u> <u>Piscis</u>
<u>Frio e sêcco</u>	Terra	<u>Septentrião</u>	Norte	Inverno	Melancolia	<u>Decreptude</u>	<u>Taurus</u> <u>Virgo</u> <u>Capricornio</u>

A origem da Ciência

- *Os homens desejam por natureza o saber. Os homens começam e começaram sempre a filosofar movidos pelo espanto. (Metafísica de Aristóteles)*
 - *Com o desenvolvimento da civilização e a formação de cidades, o homem sentiu-se mais protegido dos infortúnios da natureza; muitas questões filosóficas surgiram e estas não puderam mais ser respondidas através da mitologia. Nascia a Ciência.*
 - *A história da Filosofia costuma iniciar-se com o reconhecimento da idéia de uma unidade primordial que gera dentro de si todos os seres.*
- *Tales, Anaximandro e Anaxímenes da cidade de Mileto,*
 - *Heráclito de Éfeso,*
 - *Pitágoras (de Samos) e seus seguidores,*
 - *Parmênides e Zenão de Eléia,*
 - *Anaxágonas de Clazómena,*
 - *Empédocles de Agrimento*
 - *Demócrito de Abdera.*
- Em que consiste o elemento, se é que ele existe, do qual se originam as coisas que existem na natureza?*
- Como ocorre a transformação dos seres, o vir e o devir das coisas?*

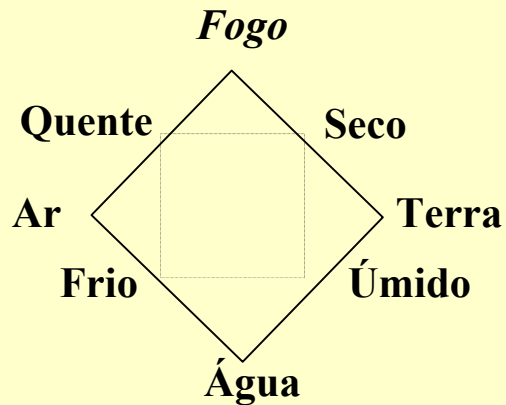
Tales e a água



Tales foi um mercador, engenheiro e astrônomo que acreditava que a substância básica da qual todas as outras são formadas era a **água**; esta crença muito provavelmente deveu-se às propriedades físicas e químicas peculiares da água sem as quais não haveria a vida, como também às suas viagens marítimas, principalmente ao Egito.

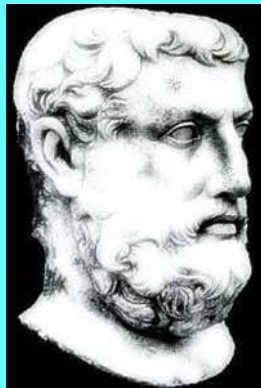
É considerado o fundador da filosofia cosmológica e sua grande contribuição para a Matemática reside no fato de que as verdades, mesmo que evidentes, devem ser provadas.

Cosmogonias e Cosmologias



- Aximandro e o ápeiron
- O caos
- Anaxímenes e o ar

A transformação da matéria



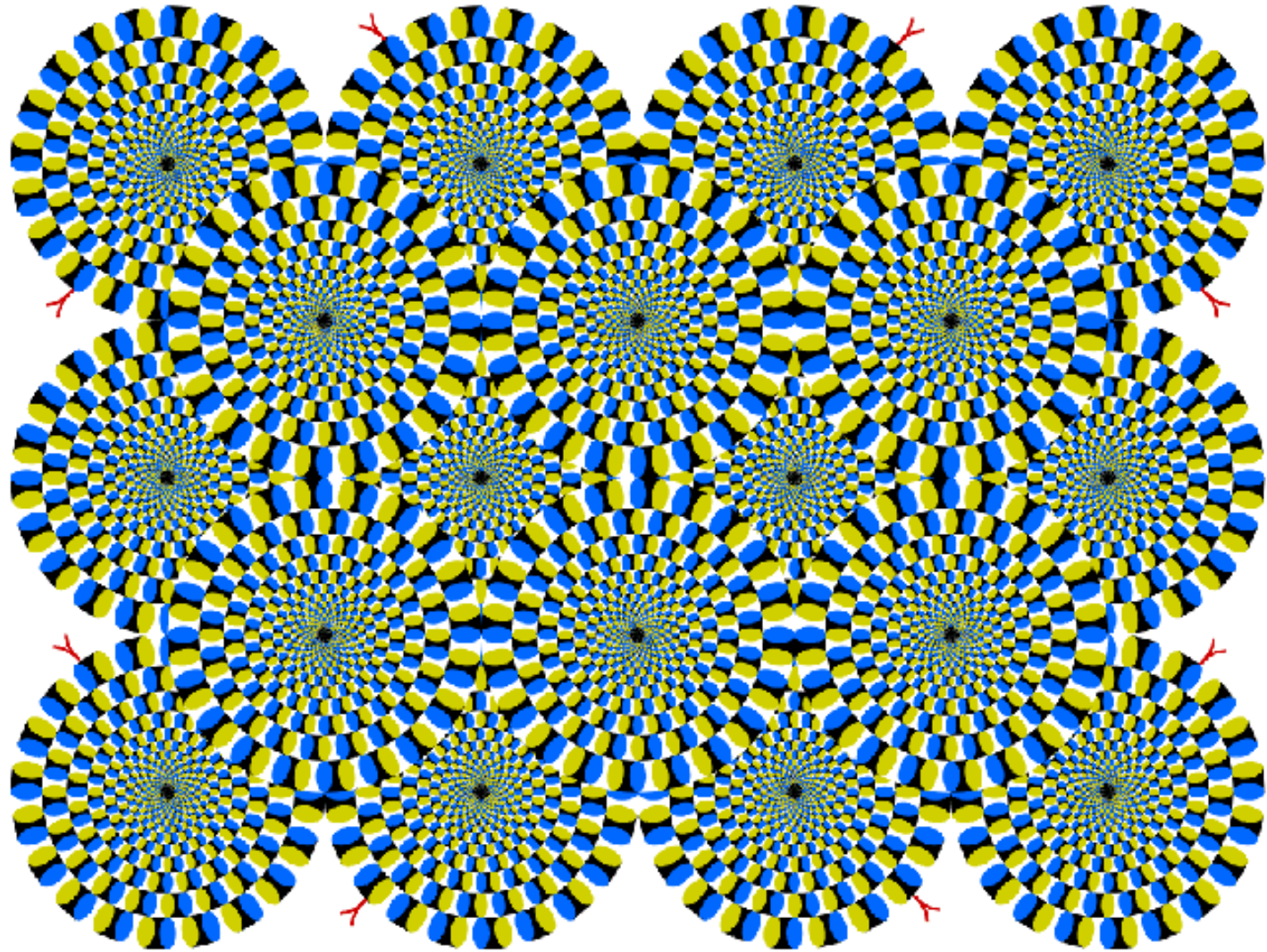
- Heráclito, “o obscuro”

Não podemos entrar duas vezes no mesmo rio, dizia, pois da segunda vez tanto o rio como nós, mudamos.

- Parmênides

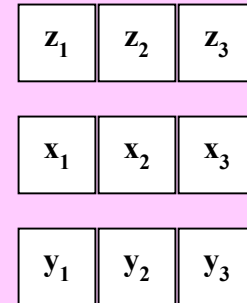
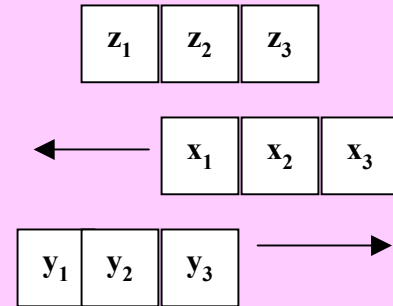
O *ser* é imutável e ao mesmo tempo eterno, pois se o *ser* pudesse se transformar, deixaria de ser o que é, sendo assim um *não-ser*, e se tornaria novamente um *ser*

Percepção x Razão



Zenão e seus paradoxos

- Aquiles e a tartaruga
- Divisibilidade do tempo



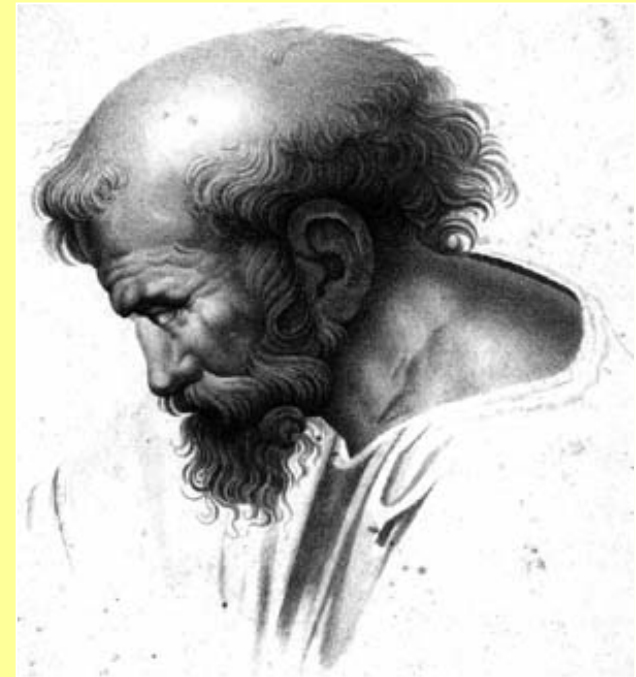
Pitágoras

Pitágoras foi uma figura lendária, fundador de uma sociedade secreta de cunho religioso, voltada ao estudo da Filosofia, tendo a Matemática como via de salvação.

A cosmologia pitagórica vê o universo formado por unidades indivisíveis, separadas por intervalos resultante da respiração do universo vivo. As unidades indivisíveis seriam os números, que formariam assim a alma de tudo o que existe.

Para os pitagóricos os quatro qualidades – quente, frio, úmido e seco - são apenas manifestações das combinações ou dissociações dos números.

A descoberta pelos pitagóricos da existência de números irracionais provocou uma profunda crise em sua sociedade e, muito provavelmente por causa disto, passaram a estudar os aspectos geométricos, em detrimento aos aspectos mais algébricos, da Matemática.



A primeira coisa que todo matemático deveria saber

A medida da diagonal do quadrado de lado 1 não é racional

A medida da diagonal d do quadrado elevada ao quadrado deve ser igual a 2, devido ao Teorema de Pitágoras. Se, raciocinando por absurdo, d fosse a divisão de dois inteiros, poderíamos cancelar os fatores comuns do numerador e do denominador nesta divisão e obter uma fração equivalente irredutível, ou seja

$$d = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0, \quad \text{mdc}(p, q) = 1. \text{ Como } d^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

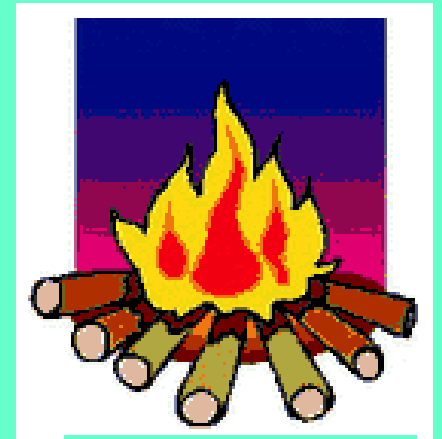
e como o quadrado de p é par, p deve ser par. Mas a última equação nos diz que q também deve ser par, pelo mesmo motivo anterior. Isto é uma contradição pois $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Pluralismo

Demócrito foi o pai da teoria que coloca os átomos como formadores do universo. Eles eram, para ele, partículas indivisíveis e minúsculas que se achavam em constante movimento. O vácuo entre os átomos, para Demócrito, teria existência real.

Anaxágoras acreditava que no princípio havia um *magma* em que tudo estava misturado e que existia uma força inteligente ou um motor cósmico, separada do magma, que provocaria neste um movimento - como um turbilhão - separando o denso e o rarefeito, o frio e o quente, o úmido e o seco, a luminosidade da escuridão.

Empédocles acreditava na pluralidade; defendia que o universo era composto pelos seguintes quatro elementos básicos: **ar, água, fogo e terra** e que a qualidade de nenhum deles seria preponderante sobre os outros. As coisas existentes seriam o resultado da mistura desses quatro elementos.



O que ocorre com a madeira queimando? A água é o que faz a madeira crepitar e estalar. A fumaça é devido ao ar, o fogo é o que vemos e as cinzas são a terra.

A Filosofia centrada no homem

Com o desenvolvimento das cidades-estado na Grécia Antiga e a participação dos homens livres nas decisões políticas, as preocupações filosóficas passaram então a **focalizar o homem enquanto ser político e social**, colocando de lado as questões principais da filosofia pré-socrática acerca da natureza e da essência do universo.

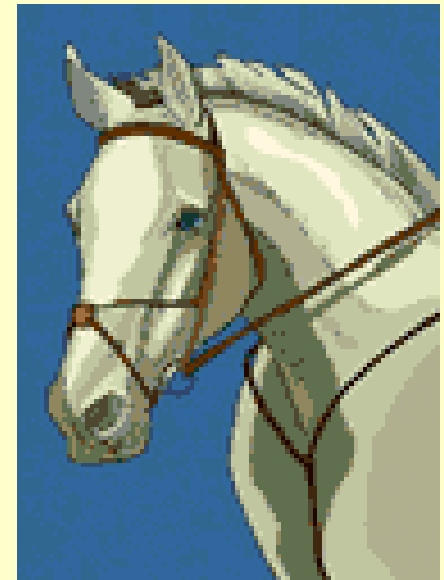
Os sofistas

Paradoxo sofista do cavalo bom e barato

Tudo o que é raro é caro.

Um cavalo bom e barato é raro.

Logo um cavalo bom e barato é caro.



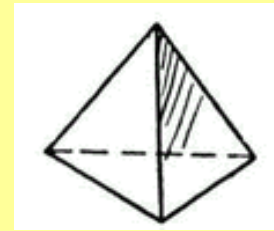
Sócrates – mais sábio de todos os homens

Sócrates usava o diálogo como forma de argumentação filosófica, levando seu interlocutor, muitas vezes ironicamente, à descoberta e consciência de verdades encravadas em sua própria alma. A ética, a moral e a busca pelo bem em sociedade foram os legados deste admirável pensador. Foi acusado e condenado por incitar e rebelar os jovens de sua época e morreu envenenado para não trair seus ideais.

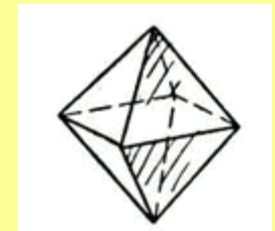


Platão

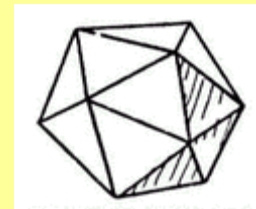
- Platão foi discípulo de Sócrates e herdou as preocupações morais de seu mestre.
- Platão fundou em Atenas uma academia que durou mais de nove séculos, agregando importantes filósofos, matemáticos e astrônomos e contribuindo significativamente para a Filosofia da Ciência.
- Platão priorizava a razão sobre a sensação; todas as ciências deveriam ser matematizadas em detrimento de uma abordagem experimental.
- Existiria um mundo ideal, separado do mundo sensível e acessível apenas pela razão; segundo Platão somente o raciocínio permite-nos adentrar no mundo ideal afim de atingir o verdadeiro conhecimento.



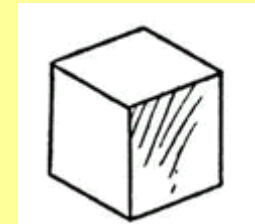
fogo



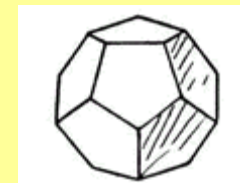
ar



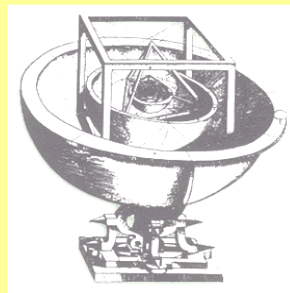
água



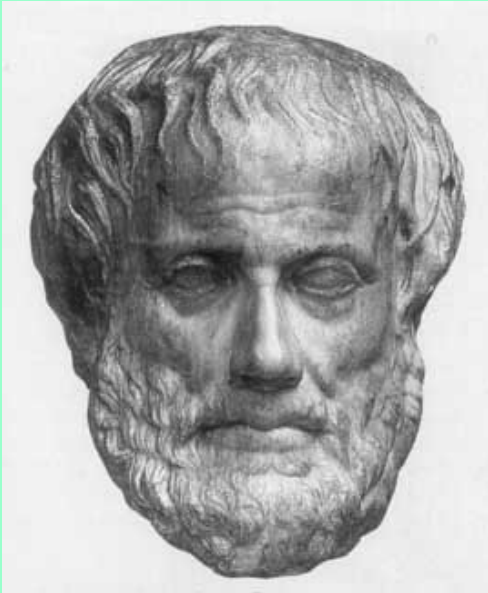
terra



universo



Aristóteles



Foi discípulo de Platão e professor de Alexandre, o Grande.

A filosofia nasce do espanto admirativo que os seres humanos têm diante de uma situação problemática, mas não é um impulso espontâneo, sendo causada por uma **aporia**, isto é uma dificuldade insolúvel para o pensador.

Aristóteles desenvolveu um sistema filosófico próprio, em que a **essência do que existe é obtida pela razão aplicada aos dados fornecidos pelos sentidos**, colocando o conhecimento da verdade como uma abstração da natureza.

Silogismo aristotélico atual

Se a propaganda é a alma do negócio e sexo é a alma da propaganda, então sexo é a alma do negócio.

Foi um organizador; nas ciências naturais classificou os seres (animados e inanimados).

Fundou a **Lógica** estudando a estrutura dos silogismos, dentre outras inúmeras contribuições.

Aristóteles e os quatro elementos

Aristóteles estudou e comentou os trabalhos dos filósofos anteriores a ele. Analisando os princípios substanciais que constituem o universo, ele discerniu três grupos de idéias:

- **as que defendiam os elementos materiais como formadores do mundo físico**
- **as que colocavam o princípio fundamental como imaterial**
- **o concreto, os seres em sua individualidade (visão do homem comum).**

Introduziu as idéias de **matéria e forma**.

Quando a matéria recebe a forma ela se organiza nos quatro elementos perceptíveis: quente, seco, frio e úmido, ou seja, a matéria dos seres físicos é aquela que recebeu a forma dos quatro elementos: **fogo, terra, ar e água**. Todas as substâncias naturais seriam assim combinações desses elementos em proporções variadas.

Quanto à transformação da matéria, ele introduziu os conceitos de **potência** (possibilidades latentes da matéria) e **ato** (a realização da potência). Os movimentos naturais são apenas três:

para cima – próprio dos corpos leves, como o **fogo** e o **ar**

para baixo – próprio dos corpos pesados, como a **terra** e a **água**

circular – próprio dos astros celestes.

O quinto elemento – o **éter** ou a quinta-essência. O universo seria ordenado do seguinte modo: o centro do mundo é a terra, depois vem a água, depois o ar, a seguir o fogo e finalmente as esferas de éter.

O período helenístico



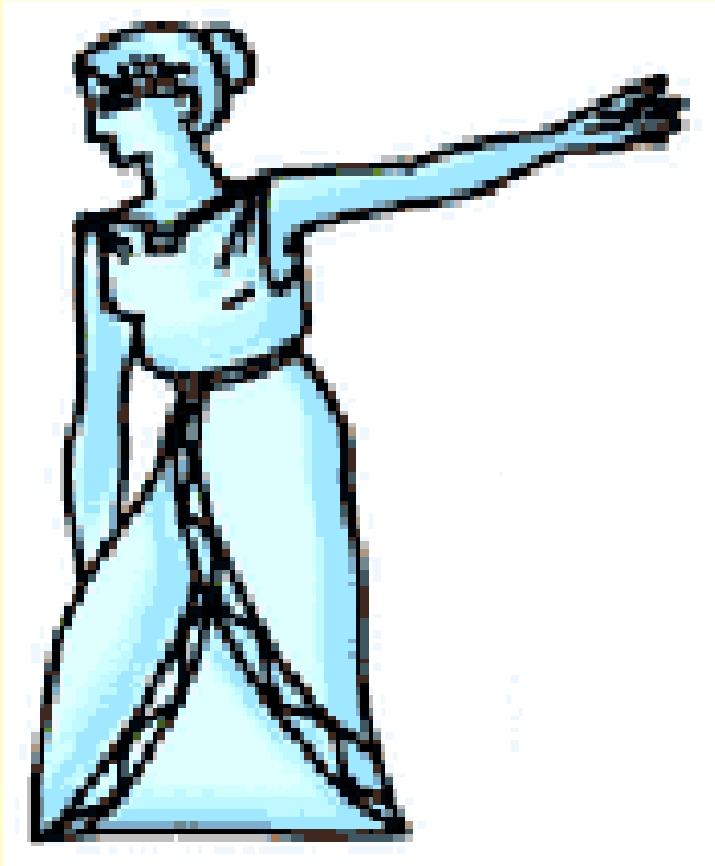
- Alexandria
- Euclides e Arquimedes
- A SEGUNDA COISA QUE TODO MATEMÁTICO DEVERIA SABER

Provar que existem infinitos números primos

- Dado um número natural n , a seqüência de números naturais que se inicia em n e termina em $n!+1$, deve conter pelo menos um número primo.

De fato, se dividirmos $n!+1$ por qualquer número entre 2 e n inclusive, sempre teremos resto 1, pois $n!$ contém todos esses números como fatores. Agora, todo número maior do que 1 tem um divisor maior do que 1, pois o próprio número é um divisor de si mesmo. Existe portanto um menor número que é divisor de $n!+1$ e ele deve ser entre n e $n!+1$ (contando-se o extremo superior). Este número tem que ser primo, porque se ele tivesse um divisor menor do que ele e diferente de 1, este divisor também dividiria $n!+1$ e seria menor do que o menor divisor, o que é um absurdo. Logo ele deve ser primo e assim provamos que entre n e $n!+1$ sempre existe um número primo. Como n é qualquer, existem infinitos números primos.

Império Romano



- O declínio da civilização grega foi provocada e seguida pelo Império Romano. A cultura grega foi incorporada à romana e muitos dos ideais filosóficos gregos foram retomados por pensadores do novo império.
- Herão
- O Cristianismo

O FOGO

Como usar o fogo para derivar $\frac{1}{2}$ vez uma função descontínua?

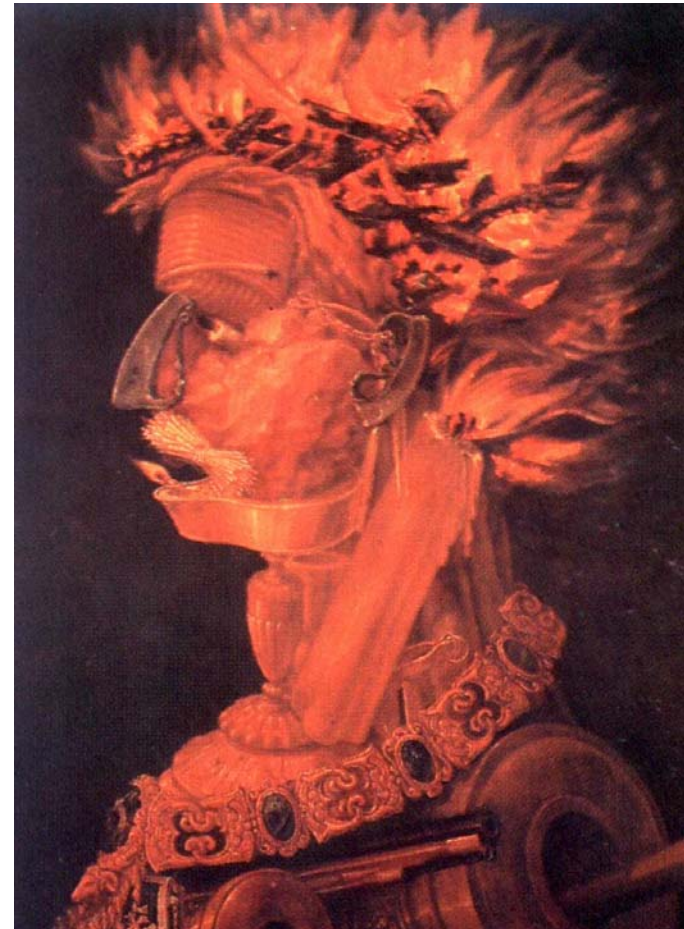
TEOREMA: Toda função derivável é contínua.

Demonstr.:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) =$$

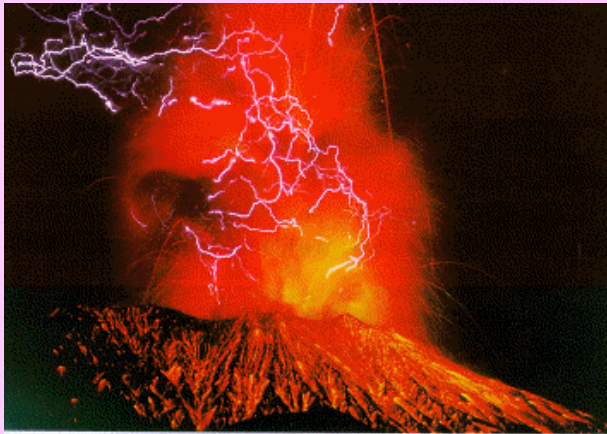
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Logo, é impossível derivar uma função descontínua.



O fogo e a Ciência

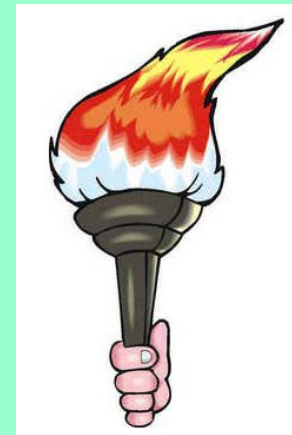
- A fúria da natureza
- A revolução agrícola e a idade dos metais



Fogo – mitos e primeiros usos

- O fogo e as religiões
- O mito de Pandora

Zeus resolveu castigar Prometeu por este ter entregue aos homens o segredo do fogo. Para isto ordenou que os demais deuses criassem uma mulher com todos os dons, chamada Pandora. Zeus entregou a ela uma caixa que deveria ser entregue a Prometeu, mas seu irmão Epimeteu, encantado com a beleza de Pandora casou-se com ela e permitiu que a misteriosa caixa fosse aberta, liberando todos os males do mundo; quando ele tentou fechar a caixa, só restou a Esperança. Zeus ordenou então que Prometeu fosse acorrentado a uma rocha e que uma águia devorasse seu fígado eternamente.



Relógios de fogo

- Relógios de corda



- Relógios de vela

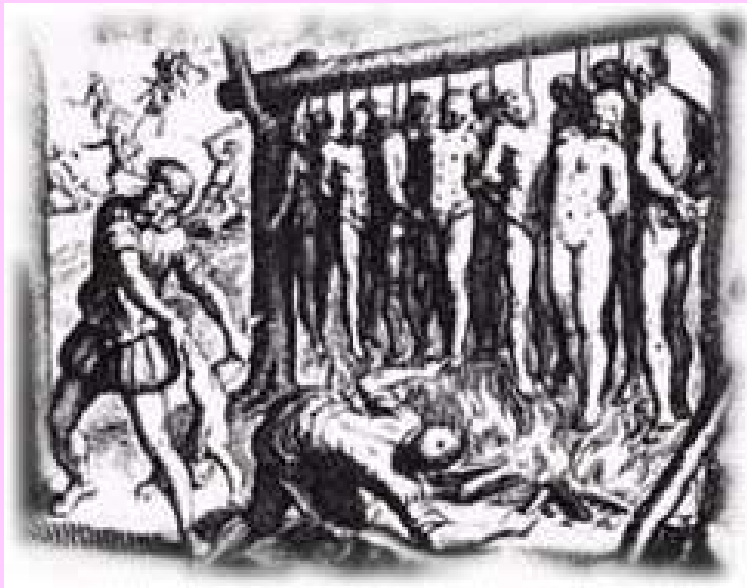


- Despertador de fogo



Usos não recomendados do fogo

- Invenção da pólvora
- A Idade Média e o fogo



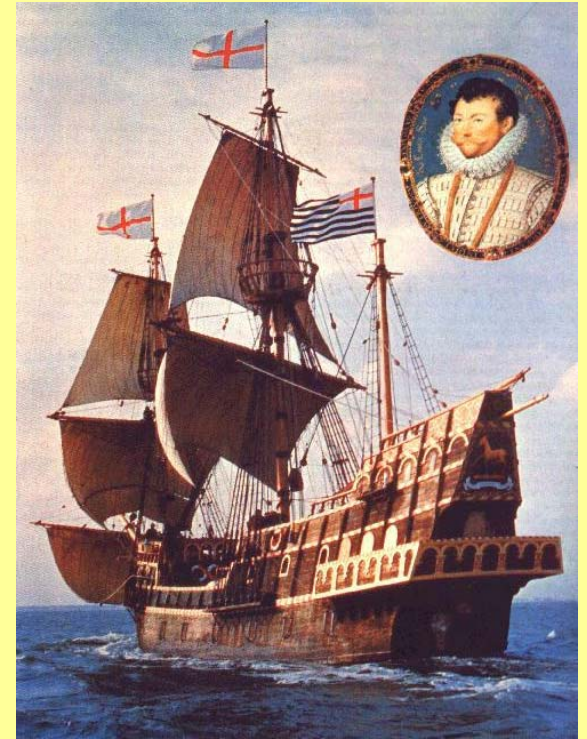
O fogo na Era das Explorações

Depoimento de nativos mexicanos:

No verão de 1520, estrangeiros brancos, os conquistadores de Cortés, chegaram ao mar do oriente em grandes embarcações. Eles montavam animais estranhos, falavam uma língua desconhecida e divertiam-se com armas que vomitavam estrondo e fumaça e que matavam a grande distância.

Enquanto isso na Europa:

*“O grande ímpeto dado à Matemática no século XVII foi partilhado por todas as atividades intelectuais e se deveu aos avanços políticos, econômicos e sociais da época... **A atmosfera política mais favorável do norte da Europa e a superação geral da barreira do frio e da escuridão nos longos meses de inverno, com os progressos no aquecimento e na iluminação, correspondem provavelmente, em grande parte pelo deslocamento da atividade econômica no século XVII da Itália para a França e Inglaterra**”.*



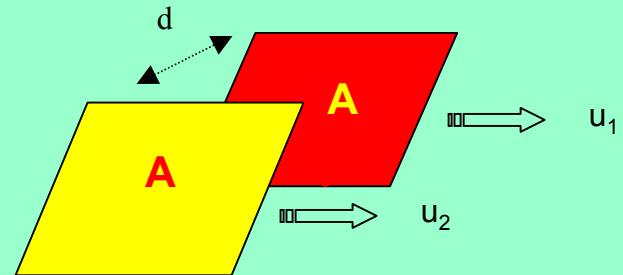
A descoberta de uma poderosa ferramenta – o Cálculo

- Domínio da energia mecânica
- Estudos sobre a transmissão do calor
- Lei de Newton do resfriamento

Se duas placas paralelas com mesma área A estiverem separadas por uma pequena distância d , haverá passagem de calor da placa mais quente para a mais fria. Denotando por u_1 a temperatura da primeira placa e por u_2 a temperatura da segunda, a quantidade de calor que passa de uma placa a outra, por unidade de tempo, é proporcional à área A , à diferença de temperatura $|u_2 - u_1|$ e inversamente proporcional à separação d .

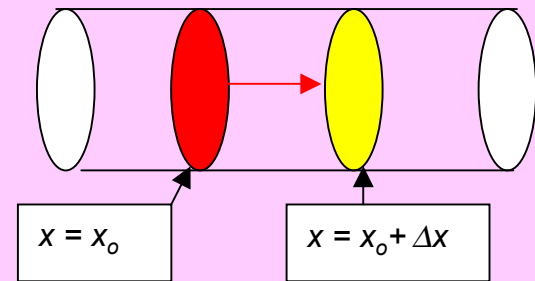


Newton (1642-1727) Leibniz (1646-1716)



A Equação do Calor

- É uma equação obtida a partir da lei de conservação do calor
- Fluxo de Calor:
 $q(x,t) = - m \cdot A \cdot u_x(x,t)$
- $u(x,t)$ é a temperatura no ponto x no instante t .
- $u_x(x,t)$ é a derivada de u com relação a x
- m é constante - depende do material.
- O sinal negativo aparece pois o calor difunde-se do mais quente para o mais frio.



$$Q = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} q(x_0 + \Delta x, t) dt = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} m [u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)] A dt$$

A Equação do Calor

- O **calor específico** (c) de uma substância é a quantidade de calor necessária para elevar 1°C a temperatura de um grama da substância.
- A **densidade** (razão entre massa e volume) da substância será denotada por ρ .

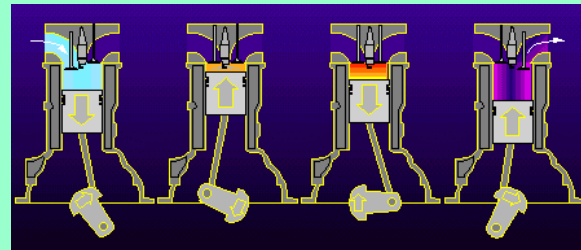
$$Q = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left(\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} c u_t(x, t) dt \right) \rho A dx$$

$$\text{TFC} \Rightarrow \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} m u_{xx}(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} c \rho u_t(x, t) dx dt$$

$$u_t - k u_{xx} = 0 \quad \text{Equação do calor}$$

Equações parabólicas

- Equações de difusão
- Domínio da energia mecânica
- Revolução Industrial
- Os métodos de resolução só apareceram no início do século XIX



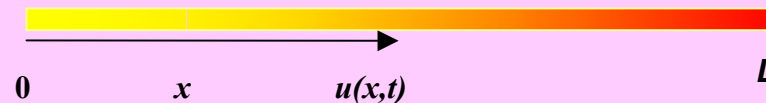
Jean Fourier (1768-1830)

Jean Fourier nasceu em Auxerre em 1768 e faleceu em Paris em 1830. Filho de um alfaiate, ficou órfão aos 8 anos de idade e foi educado numa escola militar dirigida por beneditinos, onde veio a ocupar a cadeira de matemática. Tendo ajudado a promover a Revolução Francesa, foi compensado por uma cátedra na Escola Politécnica. Renunciou a esta posição para, juntamente com Monge, poder acompanhar Napoleão na expedição ao Egito. Retornou à França em 1801, tornando-se prefeito de Grenoble. Foi quando de sua estada em Grenoble que começou suas experiências com o calor.

Talvez como consequência de sua estadia no Egito e de seu trabalho envolvendo o calor, Fourier acabou se convencendo de que o deserto oferecia as condições ideais para uma boa saúde. Por isso vestia-se com várias camadas de roupas e aquecia a temperaturas insuportavelmente altas as dependências que habitava. Dizem alguns que essa sua obsessão pelo calor apressou sua morte, por doença cardíaca, aos 63 anos, cozido de fato.



Um churrasco matemático



$$u_t - ku_{xx} = 0$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

O método de separação de variáveis

$$u(x, t) = F(x) \cdot G(t)$$

Substituindo na equação do calor

$$F(x) \cdot G'(t) - k F''(x) \cdot G(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{1}{k} \frac{G'(t)}{G(t)}$$

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0 \\ G'(t) - k\sigma G(t) = 0 \end{cases}$$

EDO's

Soluções com dados nulos na fronteira

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x),$$

com c_1 e c_2 constantes reais e

$$\lambda = \sqrt{-\sigma}$$

Como $F(0) = F(L) = 0$, então $c_1 = 0$ e $c_2 \sin(\lambda L) = 0$. Logo $\lambda = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Portanto

$$\sigma = -\frac{n^2}{L^2} \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Com esse valor de σ , a segunda equação do sistema pode ser facilmente resolvida:

$$G(t) = c \cdot e^{\sigma kt} = c \cdot e^{\frac{-n^2 \pi^2 kt}{L^2}}$$

$$\Rightarrow u_n = e^{\frac{-n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

São soluções da equação do calor com dados nulos na fronteira



Idéia genial de Fourier

As soluções encontradas

$$u_n = e^{\frac{-n^2\pi^2 kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

não satisfazem, em geral, a condição inicial $u_n(x, 0) = f(x)$, a menos que $f(x)$ fosse um seno (ou, usando a linearidade, uma soma de senos).

SÉRIE DE FOURIER:
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

ou, na forma complexa:
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \quad \text{sendo} \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx$$

A transformada de Fourier

Se $f(x)$ é uma função real, sua transformada de Fourier é dada por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

A transformada de Fourier tem inversa, dada por:

$$\mathfrak{F}^{-1} g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} g(\xi) d\xi$$

A transformada de Fourier destrói derivadas de funções que se anulam em \pm infinito, transformando-as em produtos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} f \right) \hat{(\xi)} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{d}{dx} f(x) dx \underbrace{=}_{\text{partes}} - \int_{\mathbb{R}} -i\xi e^{-ix\xi} f(x) dx \\ \therefore \left(\frac{d}{dx} f \right) \hat{(\xi)} &= i\xi \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

O produto de convolução

O produto de convolução de duas funções é definido por:

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

A importância deste novo produto deve-se aos seguintes fatos:

$$(f \cdot g)^{\hat{}} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g} \quad \text{e} \quad (f * g)^{\hat{}} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

De fato,

$$\begin{aligned} (f * g)^{\hat{}}(\xi) &= \int e^{-ix\xi} (f * g)(x) dx = \int e^{-ix\xi} \int f(x-y)g(y) dy dx \\ &= \int g(y) \left(\int e^{-ix\xi} f(x-y) dx \right) dy = \int g(y) \left(\int e^{-i(z+y)\xi} f(z) dz \right) dy \\ &= \int e^{-ix\xi} g(y) dy \cdot \int e^{-iz\xi} f(z) dz = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

A terceira coisa que todo matemático deveria saber

Calcular a integral da gaussiana: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Basta calcular I^2 e extrair a raiz (esse truque permite introduzir coordenadas polares)

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \pi$$

Logo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Resolução da equação do calor via Transformada de Fourier

Aplicando a transformada de Fourier com relação à x nas equações:

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad u(x,0) = f(x)$$

Obtemos:

$$\partial_t \hat{u} + \xi^2 \hat{u} = 0, \quad \hat{u}(x,0) = \hat{f}(x)$$

Este problema de valor inicial tem como solução:

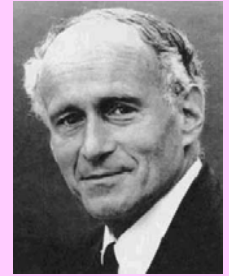
$$u(x,t) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{f}(\xi) \cdot e^{-\xi^2 t})(x) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}^{-1}(\hat{f}(\xi)) * \mathfrak{F}^{-1}(e^{-\xi^2 t})(x)$$

Ou seja

$$u(x,t) = f * K_t(x) \quad \text{sendo} \quad K_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} e^{-\xi^2 t} dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$$



Propriedades do núcleo da equação do calor



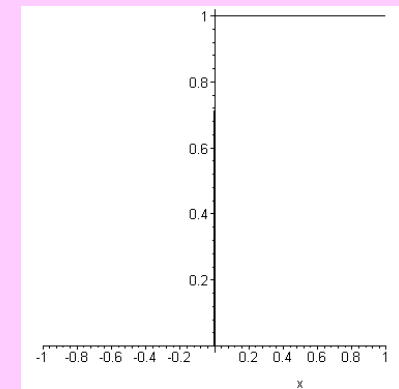
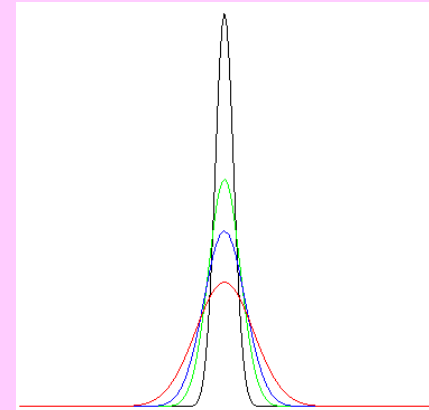
No limite, quando t converge para zero, os gráficos acima indicam que as funções se aproximam da distribuição • de Dirac, "que vale zero fora da origem e infinito na origem".

$$\int \delta(x) dx = 1$$

A distribuição • é a derivada da função de Heaviside $H(x) = 0$ para $x < 0$ e $H(x) = 1$ para $x > 0$.

• é o elemento neutro da convolução:

$$f * \delta = f, \quad \forall f$$



Boas conseqüências das soluções da equação do calor

- **Suavidade**

$$u(x,t) = f * K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy$$

- **O teorema de Stone-Weierstrass: Toda função contínua pode ser uniformemente aproximada em compactos por polinômios .**



Como derivar funções descontínuas? Como fazer isto $\frac{1}{2}$ vez?

$$\left(\frac{d}{dx} f\right)^\wedge(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = i \mathfrak{T}^{-1}(\xi \hat{f}(\xi))(x)$$



Fórmula Mágica

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{i}{2\pi} \int e^{ix\xi} \int \xi e^{-iy\xi} f(y) dy d\xi$$

Outras derivadas

- **Derivadas de 2a. Ordem** $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = -\mathfrak{F}^{-1}(\xi^2 \hat{f}(\xi))(x)$

- **Derivadas de ordem n:**

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = i^n \mathfrak{F}^{-1}(\xi^n \hat{f}(\xi))(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- **Derivadas de ordem 1/2:**

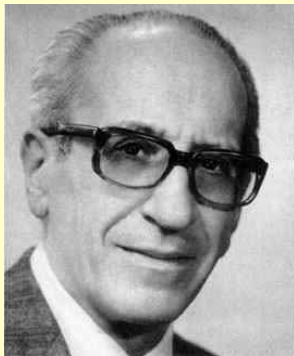
$$\frac{d^{\frac{1}{2}} f}{dx^{\frac{1}{2}}}(x) = i^{\frac{1}{2}} \mathfrak{F}^{-1}(\xi^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi))(x)$$

- **E para outros valores de n?**

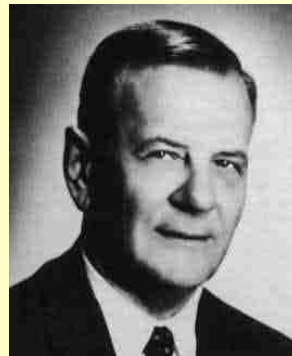
Operadores Pseudo-diferenciais

- Possuem a seguinte forma:

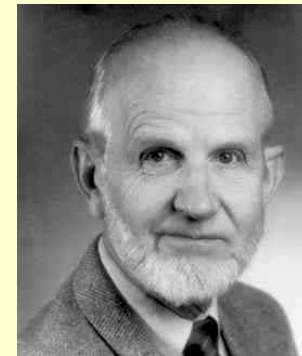
$$Au(x) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{i(x-y)\xi} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi$$



Alberto Calderón



Antoni Zygmund



Lars Hörmander

Estudos futuros



- Teoria Elementar das distribuições
- Introdução aos operadores pseudo-diferenciais
- Teorema de Nash-Moser e suas aplicações