APLICAÇÃO DA METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ABERTOS NO ENSINO SUPERIOR

Roberto R. Paterlini

Departamento de Matemática - UFSCar

Resumo: O presente trabalho descreve resultados preliminares de pesquisas que temos realizado na aplicação de problemas abertos no ensino de Matemática em cursos de formação inicial e continuada de professores. Assumimos aqui que a implementação em sala de aula de atividades exploratórias e investigativas constitui uma importante prática educativa para o ensino da Matemática em todos os níveis escolares. Apesar da importância dessa metodologia ser consenso entre educadores da Matemática e em propostas oficiais curriculares, sua implantação no fazer pedagógico quotidiano é lenta e encontra muitos obstáculos. Nossa pesquisa, realizada no âmbito do ensino superior, em cursos de formação inicial e continuada de professores, atua em quatro vertentes: (a) construção de cenários propícios para a resolução de problemas abertos, principalmente em sala de aula; (b) pesquisa de problemas abertos adequados para uso no ensino de Álgebra, Análise e Geometria; (c) produção de textos que incentivem essa prática; e (d) compreensão dos processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas abertos. Estamos construindo sugestões para a solução das três primeiras questões. Com essa finalidade aplicamos essa metodologia em diversas situações, sempre recolhendo material produzido por estudantes para avaliação do método. Nossa coleção de problemas abertos está aumentando constantemente e já a estamos disponibilizando em textos que podem servir de apoio no ensino de vários assuntos. Quanto à compreensão dos processos cognitivos naturalmente se trata de uma questão bem mais difícil, e no momento estamos nos atendo ao papel da percepção de regularidades como mecanismo de construção de conjecturas e de caminhos para demonstrações.

Palavras-chave: Problema aberto, investigação, ensino superior.

Introdução

O uso de problemas para o ensino da Matemática é uma prática muito antiga. Sabemos que ela é adotada pelo menos desde o tempo das civilizações egípcia e suméria. Nos dias de hoje essa prática tem sido revitalizada pelas ideias da escola renovada. Extensos estudos, incluindo investigações em sala de aula, apontam a eficácia desse método e sugerem as abordagens mais adequadas para nossa época e para as situações que encontramos em nossas escolas.

São muitos os tipos de atividades que podem ser utilizadas no ensino, e são classificadas como exercícios, problemas, projetos, experimentos, jogos, simulações, modelagem, etc. Suas características são descritas por palavras como fácil ou difícil, de exploração ou de investigação, aberto ou fechado, aplicado ou abstrato. Essas classificações são relativas e dependem muito do contexto. Explicações sobre essas características podem ser lidas em (Ponte, 2003).

Educadores e matemáticos vêm há tempos insistindo que para aprender Matemática é necessário "fazer Matemática". Por exemplo, lemos em (Pólya, 1985 e 1987) as frases: "Para aprender eficazmente, o aluno deve descobrir, por si só, uma parte tão grande da matéria ensinada quanto possível", e "A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa".

"Fazer Matemática" significa desenvolver processos característicos da atividade matemática. Esses processos costumam ser descritos através do termo "investigar". Por investigar em Matemática entendemos a construção e o estudo de objetos abstratos relacionados com os aspectos quantidade e forma de natureza concreta ou subjetiva, assim como análise das relações entre esses objetos. Além disso, a Matemática tem a proposta, construída historicamente, de ser uma ciência exata, de modo que seus objetos são definidos em estruturas lógico-dedutivas e as relações entre esses objetos são descritas por afirmações que devem ser inseridas nessas estruturas. Como se costuma dizer, as afirmações devem ser demonstradas.

Para propiciar aos estudantes "fazer Matemática" sugere-se que o professor trabalhe, em sala de aula, com atividades exploratórias e investigativas. Dentre essas atividades destacamos, nesse trabalho, os denominados problemas abertos. São questões com um enunciado que delimitam um contexto, e o estudante é convidado a explorar aquela situação. O problema aberto se contrapõe ao problema fechado, e a diferença entre eles pode, de forma simples, ser caracterizada pelo fato de que este último diz o que o estudante deve demonstrar, enquanto o primeiro o deixa livre para perceber quaisquer relações matemáticas naquele contexto. Naturalmente podem ser utilizados problemas com enunciado intermediário, em que o trabalho do estudante é parcialmente direcionado.

Vejamos um exemplo de um problema que já aplicamos em muitas situações, tanto na forma fechada com na forma aberta. Vejamos primeiro a forma fechada.

"Prove, para todo inteiro n, que 8 é divisor de n^2-1 se e somente se n é ímpar."

Este é um problema adequado para o estudante que está começando a refletir sobre o conceito de divisor e suas representações algébricas, e é uma oportunidade para ele aprender a lidar com uma afirmação do tipo "se e somente se". Trata-se de um problema fechado por que traz as afirmações que devem ser demonstradas.

Um enunciado aberto correspondente a esse problema pode ser:

"Explore propriedades matemáticas dos seguintes experimentos com quadrados de números ímpares:

$$\begin{aligned}
3^2 &= 8 \cdot 1 + 1 \\
5^2 &= 8 \cdot 3 + 1 \\
7^2 &= 8 \cdot 6 + 1 \\
9^2 &= 8 \cdot 10 + 1 \\
&\vdots \quad\quad \vdots
\end{aligned}$$

"

Um enunciado mais direcionado para a prática da investigação em Matemática pode ser:

"Divida por 8 os quadrados dos números ímpares 3, 5, 7 e 9. Que regularidades você observa? Faça mais alguns testes para constatar se as regularidades permanecem com outros valores. Transforme as regularidades em conjecturas gerais. Use algum método considerado válido pela Matemática para verificar se as conjecturas são verdadeiras ou falsas. Investigue as recíprocas de suas conjecturas."

Aplicamos esse problema várias vezes na disciplina de Teoria dos Números para estudantes calouros do curso de graduação em Matemática na UFSCar. Em todas as situações em que o apresentamos na forma aberta constatamos que os estudantes o desenvolvem muito bem. Observamos que eles têm muita facilidade em perceber regularidades e em transformá-las em conjecturas. A verificação dessas conjecturas traz mais dificuldades, o que é natural, pois não é tão fácil imaginar caminhos para uma demonstração. Mas o contexto favorece o trabalho dos estudantes, pois eles se sentem autores das conjecturas, e assim estão mais motivados a realizar o trabalho de verificação. Por outro lado, a aplicação do problema em sua forma fechada parece não trazer a mesma motivação para a maioria dos estudantes.

Dificuldades na mudança de paradigma

Sabendo que o uso de atividades exploratórias e investigativas é importante para a aprendizagem da Matemática, nos perguntamos por que motivos esse método continua praticamente ausente do cotidiano da sala de aula de nossos cursos de graduação. Se considerarmos a amostra mais reduzida de cursos de graduação em Matemática ministrados por professores de departamentos que têm pós-graduação, a pergunta é ainda mais instigante. Esses professores, em tese, seriam os mais interessados em formar estudantes pesquisadores. No entanto frequentemente as atividades didáticas em sala de aula prosseguem com a tradicional apresentação de um assunto seguida de listas de problemas fechados. Mais surpreendente ainda: parece que assim ocorre sistematicamente nos próprios cursos de pós-graduação.

Certamente que existem motivos de ordem prática para que isso aconteça. Uma classe lotada de carteiras com estudantes, com pouco espaço para circulação ou formação de grupos de trabalho, inviabiliza qualquer método didático diferenciado. Existe também a pressão do currículo, a enorme quantidade de matéria a "ser dada", o curso de pós-graduação exigente que segue a graduação, a enorme lista de competências solicitadas pelo mercado de trabalho, etc.

Mas esses motivos nem sempre estão presentes ou constituem impedimentos. Por exemplo, em uma disciplina do tipo ensino da Matemática através de problemas, é uma contradição que o professor nunca apresente problemas abertos aos estudantes.

Isto nos leva a outros motivos, de ordem cultural. O autor (Ponte, 2003) discorre sobre alguns. Penso que o mais importante é a dicotomia entre as atividades de ensinar e aprender, introduzida artificialmente por uma prática escolar inadequada. O pesquisador /professor aprende principalmente investigando, mas, no momento em que entra na sala de aula, esquece que o estudante, para aprender, precisa investigar. Assim separa as duas atividades, pois não percebeu que são interligadas, ou por que não se interessa em aprender a utilizar métodos adequados para conectá-las. Outros motivos também se fazem presentes, como a ideia de que a investigação é reservada a um grupo especial de pessoas, assim como a ideia de que a descoberta só é importante quando alguém a faz pela primeira vez conforme os registros acadêmicos. Ocorre também, por parte dos professores, o receio de se depararem, durante a aula, com problemas cuja resposta não conhecem de imediato. Com essa concepção se perde a motivação pedagógica da descoberta e se reduz o ensino à transmissão do produto histórico da investigação, perdendo-se o valor da compreensão do processo de produção desse conhecimento (Sacristán, 1998, pág. 60).

Esse procedimento, quando presente em cursos de licenciatura em Matemática, tem mais um efeito agravante. Os futuros professores não aprendem construir e aplicar problemas abertos, pois não experimentam esse método. Sabemos como é importante, num curso profissionalizante, a coerência entre a formação oferecida e a prática esperada. É o que se chama de simetria invertida: o professor aprende a profissão vivenciando um processo similar àquele em que irá atuar, mas numa situação invertida. Assim os cursos de licenciatura ficam com mais uma dívida com nossos professores.

Ações empreendidas

A construção de ambientes didáticos propícios para a resolução de problemas abertos, principalmente em sala de aula, tem sido o foco da pesquisa de muitos autores. (Skovsmose, 2000) chama de “cenários para investigação” um ambiente que pode dar suporte a atividades de investigação. Em nossas atividades didáticas temos experimentado vários tipos de cenários: projetos de iniciação científica, oficinas em encontros científicos, minicursos, e, mais especialmente, atividades em disciplinas de curso de graduação e de mestrado profissional. Nas atividades em disciplinas experimentamos duas modalidades de cenários: trabalhos extraclasse e trabalhos em classe, tanto na forma individual quanto com grupos. Experimentamos também, uma vez, formar um grupo de voluntários de uma classe para realizar o trabalho com problemas de investigação em horários extraclasse.

Dentre todos os cenários citados o único em que a metodologia não funcionou bem foi o caso de trabalhos obrigatórios extraclasse devido à prática de plágio entre os estudantes. Constatamos que essa ocorrência nada tinha a ver com a metodologia que estava sendo aplicada, sendo um costume que os estudantes adotaram para qualquer tipo de trabalho extraclasse.

Nessas atividades em sala de aula o método foi utilizado como recurso auxiliar, não se constituindo o eixo didático principal. A ideia é, num primeiro momento, aplicar o método sem interferir demasiadamente no andamento normal da disciplina, amenizando a passagem da didática da reprodução para a didática da reconstrução. Ocorre também que precisamos ter cuidado para não propor o método como uma panacéia absoluta, que resolveria magicamente os problemas do ensino da Matemática.

Dessa forma procuramos construir protocolos didáticos que possam ser propostos para outros professores. Para isso nada melhor do que utilizar textos didáticos que contemplem, pelo menos parcialmente, essa proposta. Como esses textos não existem, pelo menos que eu saiba, resolvi eu mesmo escrever alguns deles (Paterlini, 2008 e 2010). Esses textos foram testados muitas vezes em disciplinas de cursos de licenciatura e formação continuada de professores do ensino básico. Trazem várias novidades metodológicas, entre elas propostas para trabalho com problemas abertos. A presença desses problemas ocorre ao longo de todo o texto, mas de forma especial no final de cada capítulo, em que apresentamos uma seção chamada “temas para investigação”. Nessas seções propomos problemas abertos com vários níveis de dificuldade e sobre assuntos complementares àqueles que foram tratados no capítulo, ou sobre temas que servem de preparação para assuntos que são apresentados em capítulos posteriores.

Chegamos assim à questão bem mais agradável de como se pode construir problemas abertos. Ora, a princípio, todo problema fechado foi, um dia, um problema aberto. É verdade que os autores de problemas raramente contam o processo de descoberta. Assim, para transformar um problema fechado em aberto devemos imaginar algum caminho possível de sua gênese. Se esse caminho é adequado para uso pedagógico, a questão de saber se foi essa a gênese ocorrida com o autor do problema passa a ser irrelevante.

Nos textos de Matemática temos uma profusão de problemas fechados. Com alguma habilidade podemos obter deles uma infinidade de problemas abertos.

Penso ser útil apresentar um exemplo elementar. Consideremos o seguinte problema fechado, que pode aparecer em um texto sobre progressões aritméticas:

"Prove que 131 é o termo de ordem 27 na progressão aritmética 1, 6, 11, ..."

Um pouco melhor seria

"Que lugar da progressão aritmética 1, 6, 11, ... ocupa o número 131?"

Um problema aberto inspirado pelo problema acima pode ser:

"Explore regularidades matemáticas da seguinte tabela formada pelos números naturais dispostos, em ordem, em linhas com cinco números em cada linha:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

"

Se o professor desejar especificamente que o estudante descubra o lugar do número 131 pode acrescentar essa solicitação, mas certamente o estudante não se sentirá delimitado e poderá descobrir e demonstrar muitas outras propriedades.

Encerramos essa seção observando que os probemas abertos não devem, necessariamente, ter como origem problemas fechados. Problemas abertos podem servir como preparação para teoremas importantes que serão estudados posteriormente no texto, ou mesmo para teoremas que estejam ausentes do texto mas serão objeto de estudo futuro no currículo. Fizemos isso com o Pequeno Teorema de Fermat em (Paterlini, 2008). Por se tratar de um texto introdutório à Teoria dos Números, esse teorema é estudado no final do livro. Mas no meio do livro adiantamos a possibilidade do estudante "descobrir" um caso particular do teorema propondo-lhe investigar as regularidades dos divisores de 2^n-1, sendo n um inteiro positivo qualquer. O estudante pode não só redescobrir esse caso particular do Pequeno Teorema de Fermat como também perceber e demonstrar muitas outras propriedades, conforme está descrito em (Souza, 2008).

Processos cognitivos da investigação matemática

A atividade investigativa é mobilizada por processos de pensamento do tipo heurístico, analítico e relacional, cuja força é sua generalidade, pois se aplicam a uma grande variedade de problemas (Oliveira, 2002, pág. 168). Esses processos, quando aplicados a um problema para o qual o estudante está motivado a investigar, dão origem a percepções de regularidades e padrões, de invariantes, de relações funcionais e de transformações, abstração e generalização, formulação de conjecturas, testes de conjecturas e validação, e construção de modelos matemáticos.

Em nossa pesquisa na aplicação de problemas abertos damos grande importância à observação da ação desses mecanismos psicológicos. Essa observação só é possível quando permitimos que os estudantes investiguem com liberdade e se sintam à vontade em conversar com o professor.

Temos visto que o processo mais fácil de ser observado é o da percepção de regularidades numéricas ou de padrões geométricos. Os estudantes não se sentem intimidados em fazer as mais diversas observações. Em seguida, vem a construção de conjecturas, atividade não tão fácil, pois exige a generalização das observações e às vezes é necessário dominar os elementos de uma linguagem de representação algébrica. Nesse ponto é importante que o professor não faça julgamentos sobre a importância das conjecturas dentro do contexto lógico-dedutivo da Matemática. O próprio estudante irá perceber, com a evolução de sua experiência, a adequação de suas conjecturas.

A maior dificuldade que os estudantes encontram é no passo seguinte da investigação, que é a verificação de suas conjecturas: testar as conjecturas, eliminar as que são facilmente detectáveis como falsas, e tentar uma demonstração para aquelas que persistem nos testes de veracidade. Uma sugestão que tenho feito aos estudantes é que percebam caminhos para uma demonstração usando analogia ou refinando suas conjecturas.

Vejamos um exemplo. Consideremos o problema:

"Sabemos que existem muitos primos p para os quais $p+2$ também é primo. Por exemplo, 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19. Esses pares de primos são denominados *primos gêmeos*. Verifique se existem muitos *primos trigêmeos*, isto é, primos p para os quais $p+2$ e $p+4$ também sejam primos."

Tentando vários exemplos encontramos apenas os primos trigêmeos 3, 5 e 7. Podemos assim fazer a conjectura de que não existem outros primos trigêmeos. Mas, como demonstrar algebricamente essa afirmação? Uma ideia é estudar mais detalhadamente os exemplos através de uma tabela que organiza os dados:

p	$p+2$	$p+4$
3	5	7
5	7	9
7	9	11
11	13	15
13	15	17

Examinando as regularidades observamos que, para $p>3$, pelo menos um dos dois números $p+2$ ou $p+4$ é múltiplo de 3. Mais exatamente, para $p>3$ temos: se $p=3k+1$ então $p+2$ é múltiplo de 3, e se $p=3k+2$ então $p+4$ é múltiplo de 3. De fato, se $p=3k+1$ então $p+2 = 3k+3 = 3(k+1)$ e se $p=3k+2$ então $p+4 = 3k+6 = 3(k+2)$. Como todos os números são maiores do que 3, segue que não são primos.

Outro caminho é usar (e demonstrar) que dados três ímpares consecutivos um deles é múltiplo de 3. Aqui temos um exemplo do uso da analogia, pois comparamos a afirmação da conjectura com uma afirmação correspondente que está em um lugar diferente da teoria.

Vemos que a demonstração ficou fácil quando refinamos a observação de regularidades. Infelizmente, ou felizmente, depende do ponto de vista, isso nem sempre é suficiente.

Considerações finais

Sabemos da importância da aplicação de atividades exploratórias e investigativas em nossas aulas de Matemática. Reconhecemos o desafio que se apresenta ao professor, já assoberbado com inúmeras solicitações. Nosso encaminhamento é o de aprofundar as pesquisas sobre a aplicação do método no ensino superior, incluindo os cursos de formação inicial de professores. Pensamos que essa seria uma primeira etapa para que se chegue ao uso mais disseminado do método.

Para isso é necessário cumprir uma etapa de divulgação do método entre os professores, o que tem sido feito em outros países há algum tempo. Numa segunda etapa, ou de forma concomitante, o material produzido em artigos, teses, palestras, oficinas, etc. precisa migrar para os livros textos usados nas disciplinas dos cursos de graduação e no ensino básico. Supomos que, dessa forma, veremos o método ser utilizado de uma forma mais ampla em um curto espaço de tempo.

Referências

OLIVEIRA, P. **A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica**. Tese de mestrado. Universidade de Lisboa, 2002.

PATERLINI, R. R. **Aritmética dos números inteiros**. São Carlos: Preprint UFSCar. 2008.

PATERLINI, R. R. **Aritmética dos números reais**. São Carlos: Preprint UFSCar. 2010.

PÓLYA, G. **O Ensino por meio de problemas**. Revista do Professor de Matemática, nº. 7, 1985, pp. 11-16.

PÓLYA, G. **Dez mandamentos para professores**. Revista do Professor de Matemática, nº. 10, 1987, pp. 1-10.

PONTE, J. P. M. **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do ProfMat. Lisboa: APM, 2003, pp. 25-39. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm

SACRISTÁN, J. G. e GÓMEZ, A. I. P. **Compreender e transformar o ensino**. 4ª. edição. São Paulo: ARTMED, 1998.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. Bolema nº. 14, 2000, pp. 66-91.

SOUZA, F. D. A. e PATERLINI, R. R. **Uma Experiência com a Metodologia Investigação em um Projeto de Iniciação Científica em Matemática**. I Seminário em Resolução de Problemas. Rio Claro, UNESP, outubro de 2008.