Sequências e Séries

Sadao Massago

Setembro de 2014

Sumário

Capítulo 1

Aritmética Infinitesimal

Definição 1.1. O *infinito* é a representação da "quantidade" maior que qualquer número e é denotado por ∞.

Definição 1.2. O valor infinitesimalmente maior que a é denotado por a^+. Temos que $a^+ > a$ para o cálculo infinitesimal, mas o valor numérico de a^+ é igual a a. Analogamente, o valor infinitesimalmente menor que a é denotado por a^-. Entre estes valores infinitesimalmente próximos, 0^+ e 0^- são frequentemente usados, juntamente com o jogo de sinal. Por exemplo, $\frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$.

A regra de operação envolvendo os valores infinitesimais (infinitamente pequeno ou infinitamente grande), requer formalismo de limites. A seguir, algumas regras sem a demonstração.

$\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty^\infty = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0^+$, $\frac{1}{0^+} = \infty$,$\infty + c = \infty$,
Se $a > 0$ então $a \cdot \infty = \infty$, $\infty^a = \infty$.
Se $a > 1$ então $a^\infty = \infty$

Indeterminados:

$\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$, 0^0, 0^∞, ∞^0, 1^∞.

Observação 1.3. No caso de 0^0 não ter originado dos limites, convenciona-se que $0^0 = 1$.

Exercício 1.4. Justifique cada um dos indeterminados, através de contra exemplos (apresentar limites adequados).

Exercício 1.5. Para $0 < a$, tem-se $a^{-\infty} = 0^+$.

Exercício 1.6. Para $0 < b < 1$ tem-se $b^\infty = 0^+$.

Exercício 1.7. Para $c < 0$ tem-se $\infty^c = 0^+$.

Exercício 1.8. Para, $a > 1$ tem-se $\log_a \infty = \infty$ e $\log_a 0^+ = -\infty$.

Capítulo 2

Sequências Numéricas

Uma sequência real é uma função que associa um valor a cada número inteiro não negativo. Quando tem uma expressão, escrevemos x_n (denominado de termo geral quando n é genérico) para designar o $x(n)$ que também indicaria o elemento de índice n na lista de suas imagens. A representação mais usada é pela lista de suas imagens como em $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ ou pela expressão do termo geral como em $x_n = \frac{1}{n}$ para $n > 0$. No caso de indicar a imagem, é essencial que tenha parenteses.

Note que uma sequência pode começar em pontos diferentes de 1.

Definição 2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_0 \implies |x_n - L| < \varepsilon$. Neste caso, a sequência é denominado de *sequencia convergente* e L é dito *limite da sequência.*

Note que, $|x_n - L| < \varepsilon$ se, e somente se, $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$, o que é bastante empregado nas demonstrações.

Definição 2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_0 \implies x_n > M$. Neste caso, dizemos que a *sequência diverge para infinito* e denotamos por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Analogamente, a sequência diverge para $-\infty$ se, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_0 \implies x_n < M$. É imediato que uma sequencia x_n diverge para $-\infty$ se, e somente se, $-x_n$ diverge para infinito.

Definição 2.3. A sequência não convergente é denominado de *sequência divergente.* As sequências divergentes podem ser divergentes para $\pm\infty$, ou que não tem limites.

2.1 Algumas propriedades operacionais

Propriedades.

Se (a_n) e (b_n) são sequências convergentes (começando de mesmo índice), então

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ desde que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

- Caso f for contínua, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$

As demonstrações são similares ao caso das funções reais e não serão repetidos aqui.

Observação 2.4. No caso da sequência que diverge para $\pm\infty$, a operação pode ser efetuado se a aritmética infinitesimal for possível. A demonstração destas propriedades no caso de limite da sequência ser infinito fornece as regras de cálculo infinitesimal apresentado na seção anterior.

Para resolver problemas envolvendo potências, a fórmula $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\ln a}$ para $a > 0$, é uma das identidades mais importantes.

Observação 2.5. Para obter o limite, basta analisar para n grandes.

2.2 Teste da subsequência

Para mostrar que o limite não existe, o teste de subsequências são um dos mais utilizados. Subsequência é uma sequência formado pelas partes da sequência dada, isto é $y_k = x_{n_k}$ onde $k \mapsto n_k$ é injetiva ($n_i = n_j$ então $i = j$).

Teorema 2.6. *Seja x_n uma sequência convergente. Então qualquer subsequência y_k de x_n converge e tem o mesmo limite.*

A forma mais usada do Teorema acima é

Corolário 2.7 (teste da subsequência)**.** *Qualquer sequência que possui duas subsequências com limites diferentes será divergente.*

Este corolário é um dos mais importantes para provar a divergência das sequências.

Exemplo 2.8. $x_n = (-1)^n$ diverge, pois a subsequência $x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ converge para 1, e a subsequência $x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ converge para -1 que são valores diferentes.

Para mostrar que a sequência x_n converge através de subsequências, todas as subsequências consideradas devem ter o mesmo limite e além disso, a união destas subsequências, respeitando as posições dentro de (x_n) deve ser exatamente a sequência (x_n), respeitando as suas respectivas posições.

Exemplo 2.9. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge para 0. Para provar, considere as subsequências $y_k = x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}$ na qual tem-se $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2k} = \dfrac{1}{\infty} = 0^+ = 0$ e $z_k = x_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = \frac{-1}{2k+1}$ na qual $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{-1}{2k+1} = \dfrac{-1}{\infty} = 0^- = 0$. Como y_n e z_n são subsequências que possuem o mesmo limite e a "união" de y_k e z_k é exatamente a sequência (x_n), a sequência x_n converge para 0.

Note que o problema acima é muito mais fácil de ser resolvido pelo Teorema de Sanduiche (Teorema 2.14 da página 4) que veremos mais adiante.

Exemplo 2.10. $x_n = (-1)^n$ e consideremos $y_k = x_{4k} = (-1)^{4k+2} = 0$ na qual tem-se $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1$ e $z_k = x_{4k+2} = (-1)^{4k+2} = 1$ na qual $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1$. Como y_k e z_k possuem o mesmo limite, podemos dizer que, se x_n convergir, o limite será 1. No entanto, a "união" deles não é exatamente a sequência x_n e não podemos afirmar se a sequência converge ou não.

De fato, já tínhamos visto que ele diverge (Exercício 2.8 da página 3).

Exercício 2.11. Mostre que uma sequência com sinal alternada é convergente se, e somente se o a sequência dos valores absolutos convergir para zero.

A seguir, alguns teoremas e técnicas para obter limites.

2.3 Sequências definidas pela função contínua

Teorema 2.12. *Se $x_n = f(n)$ onde f é uma função contínua (para x grande) tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.*

Exemplo 2.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{n^2} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{L'Hopital}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{2n} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{L'Hopital}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{2} = \dfrac{\infty}{2} = \infty$. Note o abuso de linguagem para considerar n como número real na qual na sequência era números inteiros.

Lembrar que, não ter o limite da função, não significa que a sequência diverge, como no caso de $x_n = \operatorname{sen}(n\pi)$.
Neste caso, $x_n = 0$ e consequentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, mas $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x\pi) = \operatorname{sen}(\infty) = \nexists$.

2.4 Teorema de Sanduíche

Teorema 2.14 (Teorema de Sanduíche)**.** *Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ então $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.*

Demonstração. Apesar da demonstração ser análoga do caso das funções, repetiremos a demonstração devido a sua importância. Sendo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, temos que, $\forall\varepsilon > 0$, existe $N_a \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N_a$ tem-se $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$. Analogamente, existe $N_c \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N_c$ tem-se $L - \varepsilon \leq c_n \leq L + \varepsilon$. Considere $N = \max\{N_a, N_c\}$. Então, para $n > N$, temos que $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$. e $L - \varepsilon \leq c_n \leq L + \varepsilon$. Logo, $L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$. □

Exemplo 2.15. $x_n = \frac{\cos n}{n}$ então temos que $-1 \leq \cos n \leq 1$ implicando que $\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$ e consequentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$. Assim, $\dfrac{-1}{\infty} = 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{\infty} = 0$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

Uma das consequências importantes do Teorema de Sanduíche é

Corolário 2.16. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

cuja demonstração é deixado como exercício.

Exemplo 2.17. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\infty} = 0^+$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Outro exemplo do uso do Teorema de Sanduíche.

Exemplo 2.18. Vamos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$. Observe que $\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\times 1}{n^n} \leq \frac{\overbrace{n \times n \cdots n}^{(n-1)\text{ vezes}}}{n^n} = \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$. Logo, $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$, o que implica que $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\infty} = 0$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

2.5 Usando a ordem da função

Definimos a ordem de convergência da função como segue. Dizemos que y_n tem ordem maior que x_n e denotamos por $x_n = o(y_n)$ quando $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

O estudo da ordem da função não costuma ser tratado no nível de Cálculo, mas ajuda muito quando precisamos determinar o limite. Dizemos que $f = o(g)$ em a quando $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Se usar a lista da ordem de convergência das funções elementares no infinito, o cálculo de limites da sequências ficará mais simples.

Claro que qualquer função que vai para o infinito, tem a ordem maior que a função constante.

Teorema 2.19. *Para o limite no infinito, temos*

- *Se* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *então* $c = o(f)$. *Qualquer função que tende a infinito tem ordem maior que a função constante.*
- *Para números reais* $a < b$, *temos* $x^a = o(x^b)$. *Potenciação maior tem ordem maior.*
- *Para* $u > 0$ *e* $a > 1$, *temos que* $\log_a x = o(x^u)$ *e* $x^u = o(a^x)$. *Logaritmo tem (com base maior que 1) ordem menor que qualquer potenciação (positiva) e exponenciação (com base maior que 1) tem ordem maior que qualquer potenciação (positiva). Em particular, lnx tem ordem menor que potenciação (positiva) e* e^x *tem ordem maior que potenciação (positiva).*
- *Para* $a > 1$, *tem-se* $a^x = o(\Gamma(x))$ *e* $\Gamma(x) = o(x^x)$, *onde* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *para* n *inteiro é denominado de função gamma. No caso de inteiros, é equivalente a* $a^n = o(n!)$ *e* $n! = o(n^n)$.

prova parcial. As demonstrações podem ser feito diretamente com o uso da regra de L'Hopital, exceto para o caso da ordem de função gamma. Assim, será deixado como exercício.

No caso de envolver a função gamma, vamos provar somente no caso da variável ser inteira. A propriedade $a^n = o(n!)$ é a Proposição 3.48 (página 17). O caso de $n! = o(n^n)$ é o exemplo 2.18 (página 4). Caso de x ser real, precisaria usar o fato das funções serem contínuas crescente, o que omitiremos aqui. □

Assim, se denotarmos $f \prec g$ para o caso de $f = o(g)$ em ∞ ($\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$), a ordem das funções poderá ser resumido como $c \prec \log_a n \prec x^u \prec a^n \prec n! \prec n^n$ para $u > 0$ e $a > 1$ (claro que a pode ser e que é maior que 1). Aliado ao fato de $n^a \prec n^b$ e $a^n \prec b^n$ para números reais $a < b$, podemos simplificar a obtenção do limite das sequências através do seguinte resultado.

Proposição 2.20. *Se* $f = o(g)$ *em* a, *então* $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Demonstração. Como $f = o(g)$ em a, temos que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ por definição. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} + 1\right) g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (0+1) \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ □

Exemplo 2.21. Obter o limite de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+n^2}}{e^n + \ln n}$, caso exista. Como $1 = o(n^2)$ e $\ln n = o(e^n)$, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}}{e^n+\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}=\frac{1}{e^\infty}=\frac{1}{\infty}=0.$$

2.6 Sequências monótona

Uma sequência a_n é dito monótona crescente quando $a_{n+1}\geq a_n$ para todo n. Da forma análoga, uma sequência a_n é dito monótona decrescente se $a_{n+1}\leq a_n$ para todo n.

Definição 2.22. As sequências crescente ou decrescente são denominados de sequências monótonas.

Caso especial das sequências monótonas são as sequências estritamente monótonas definidos como segue.

Definição 2.23. No caso de ter $a_{n+1}>a_n$ para todo n, dizemos que a sequencia é estritamente crescente e caso de ter $a_{n+1}<a_n$ para todo n, dizemos que a sequência é estritamente decrescente.

Uma sequência é estritamente monótona se for estritamente crescente ou estritamente descrescente.

Note que, em vez de dizer crescente, também podemos dizer não decrescente. O mesmo vale para decrescente que podem ser referenciado como não crescente. No entanto, é recomendado não abreviar o termo "estritamente" quando não ser igual é essencial.

Uma sequência é dita limitada se existe M tal que $\forall n, |x_n|\leq M$.

Um dos teoremas mais importantes da sequência monótona é

Teorema 2.24. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Para quem interessar, a demonstração está no apêndice (Subseção B, página B).

Exemplo 2.25. $x_{n+1}=\frac{n}{n+3}$. A sequência é limitada, pois $|x_n|\leq 1$. Ele é crescente, pois $x_{n+1}\geq x_n\Leftrightarrow\frac{n+1}{n+2}\geq\frac{n}{n+1}\Leftrightarrow(n+1)^2\geq n(n+2)\Leftrightarrow n^2+2n+1\geq n^2+2n\Leftrightarrow 1\geq 0$ que vale sempre. Logo, a sequência converge. Note que, é fácil ver que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ pela regra de L'Hopital, o que implica que é convergente. O critério da convergência da sequência monótoma é importante para estudos teóricos tais como obter critérios de convergência das séries.

2.7 Limite da sequência definida pela recorrência

Quando a sequência é definida pela fórmula de recorrência (tipo $x_{n+1}=f(x_n)$) e tem a garantia de convergência (por exemplo, monótona e limitada), aplique o limite em ambos os lados na forma de recorrência e use $L=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ (assim, ficaria $L=f(L)$).

Exemplo 2.26. Sabendo que $x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}$ converge, encontre o seu limite. Denotando $L=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, teremos

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2+2}{2x_n}=\dfrac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)^2+2}{2\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$ que seria $L=\frac{L^2+2}{2L}$. Resolvendo, teremos $2L^2=L^2+2\Rightarrow L^2=2\Rightarrow L=\pm\sqrt{2}$.

Assim, caso tiver o limite, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\sqrt{2}$. No caso de ter $x_0>0$, teríamos $x_n>0$ e consequentemente, $L\geq 0$. Logo, no caso de ter $x_0>0$, teríamos $L=\sqrt{2}$.

Observação 2.27. No Cálculo, não vamos preocupar muito em como mostrar que uma sequência recursiva (definida pela recorrência) é convergente, mas é importante para o Cálculo Numérico.

2.8 Alguns limites importantes

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Prova: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\left(\sqrt[n]{n}\right)}$. Mas $\ln\left(\sqrt[n]{n}\right) = \ln n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln n = \frac{\ln n}{n}$.
  Assim, $\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = \dfrac{\ln\infty}{\infty} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{L'Hopital}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\infty} = 0$.
  Como $\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\left(\sqrt[n]{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{n}\right)} = e^0 = 1$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ para $a > 0$ (prova é análoga a anterior e deixado como exercício)

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \nexists, & a \leq -1 \end{cases}$. Caso de $a > 0$ é provado de forma similar ao caso anterior, mas observando o sinal de $\ln a$. Caso de $a = 1$ e $a = 0$ são triviais e o caso de $a = -1$ já foi mostrado, usando a subsequência. O caso de $a < -1$ segue do caso de $a > 1$ (tente provar).

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Prova: Observe que $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\times 1 \geq \underbrace{\dfrac{n}{2}\cdots\dfrac{n}{2}}_{\frac{n}{2}\text{vezes}}\left(\frac{n}{2}-1\right)! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$.
  Logo, $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} \geq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{\infty}}{\sqrt{2}} = \infty$. Consequentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Capítulo 3

Séries Numéricas

A soma dos termos de uma sequ6encia a_n é denominado de séries de termo geral a_n e é denotado por $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Neste caso, a_n é denominado de termo geral da séries. Quando não importa onde inicia a soma, as vezes abreviamos como $\sum a_n$ como no caso de somente analisar a convergências (se a soma é número ou não).

Definir a soma de infinitos termos não é simplesmente somar. Por exemplo, na séries $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$ enquanto que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$, tendo valores diferentes. Assim, não podemos tratar somas de infinitos termos como no caso da some de finitos termos. Para que não perca algumas das propriedades essenciais da soma como no caso acima, estabelecemos que os termos precisam ser somados em sequências. Para ser mais formal, considere uma série $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = S$. Definimos a soma parcial $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} a_n = a_{n_0} + \cdots a_N$ que é uma sequência recursiva dado por $S_{n_0} = a_{n_0}$ e $S_N = S_{N-1} + a_N$ para $N > n_0$. Escrevemos $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = S$ quando tiver $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Note que, para esta definição, a soma precisam ser feitas em ordem, somando um termo a cada etapa.

Definição 3.1. Quando S_n converge, dizemos que a série é *convergente*. Quando S_n diverge, dizemos que a série é *divergente*.

Como a soma parcial é uma soma finita, permite efetuar associação dos termos. Logo, a séries convergente permite efetuar associação dos termos da soma. Assim, a séries $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ é divergente por não permitir associação. No entanto, as trocas das posições dos termos nem sempre pode ser efetuada (Ver o Exemplo D.1 da página 32).

Observação 3.2. Existe o estudo da convergência da séries usando a sequência de média das somas parciais na qual $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$. A convergência pelas médias das somas parciais requer estudos mais sofisticados, o que não será apresentado neste texto.

Exemplo 3.3. A séries $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ é divergente.

Como $S_{2k} = (-1)^0 + \cdots + (-1)^{2k} = 1-1+1-1+\cdots+1 = (1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+1 = 0+\cdots+0+1 = 1$, temos que $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = 1$.

Agora, $S_{2k+1} = (-1)^0 + \cdots + (-1)^{2k+1} = 1-1+1-1+\cdots-1 = (1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1) = 0+\cdots+0 = 0$, temos que $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = 0$. Assim, S_n tem duas subsequências com limites diferentes, o que implica que é divergente.

Note o uso de associatividade da soma em S_n por ser uma soma finita para cada n.

3.1 Algumas propriedades operacionais

Propriedades.

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes, então

- $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.
- $\sum(\lambda a_n) = \lambda \sum a_n$.
- $\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|$ caso $\sum |a_n|$ for convergente.

Caso o limite envolver ∞, vale somente se a operação correspondente for válido (consegue operar) na aritmética infinitesimal.

A convergência das séries depende somente de termos para n grande. Assim, onde começar a séries é importante somente para obter o seu valor.

Observação 3.4. Para $\lambda \neq 0$, A série $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum \lambda a_n$ converge.

3.2 Limite do termo geral

A seguir, algumas formas de verificar a convergência das séries.

Teorema 3.5. *A série $\sum a_n$ converge então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.*

Demonstração. Como $S_n = S_{n-1} + a_n$ e sabemos que o limite existe por série ser convergente, passamos o limite em ambos os lados da equação, temos $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} a_n$.

Sendo $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, temos $S = S + \lim_{n\to\infty} a_n$. Logo, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Como consequência, temos

Corolário 3.6 (teste do termo geral)**.** *Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, então a série $\sum a_n$ diverge.*

que é um dos critérios mais usados para verificar a divergência das séries.

Exemplo 3.7. $\sum \frac{n}{n+1}$ diverge, pois $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \neq 0$.

Exercício 3.8. Mostre que $\sum \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^2}$ diverge.

Agora vamos ver um exemplo particular na qual é possível obter a soma

Exemplo 3.9 (Série Telescópica)**.** Vamos encontrar o valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Usando a técnica de frações parciais, podemos escrever o termo geral em soma de duas frações. Escrevendo $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$, obtivemos $(a+b)n + a = 1$. Como n é genérico, temos $\begin{cases} a+b & = 0 \\ a & = 1 \end{cases}$, o que implica que $a = 1$ e $b = -a = -1$. Logo, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Agora veremos a soma parcial.

Temos $S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Passando o limite, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1)$.

Exercício 3.10. Seguindo o exemplo anterior, mostre que a séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ diverge, apesar de ter $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Em muitas séries, não é possível determinar se é convergente. No caso de obter o seu valor é tarefa mais complicada ainda. Com a exceção das séries geométricas, poucas séries (convergentes) tem o seu valor conhecido.

3.3 Séries geométricas

Definição 3.11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$ ($a_0 \neq 0$ e $r \neq 0$) é denominado de *séries geométrica.*

Teorema 3.12 (séries geométricas)**.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$ *($a_0 \neq 0$) converge se, e somente se $|r| < 1$. Neste caso,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1-r}$.

Demonstração. A prova consiste em aplicar limite na soma parcial que é uma soma de P.G. (progressão geométrica).

Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$ ($a_0 \neq 0$ e $r \neq 0$). Então $a_n = a_{n-1} r$ para $n > 0$. Multiplicando r na soma parcial $S_n = a_0 + \cdots + a_n$, temos que $rS_n = a_0 r + \cdots + a_n r = a_1 + \cdots + a_{n+1}$. Subtraindo do S_n, temos $S_n - rS_n = a_0 - a_{n+1}$. Observando que $a_i = a_0 r^i$, temos $(1-r)S_n = a_0 - a_{n+1} = a_0 - a_0 r^{n+1} = a_0(1 - r^{n+1})$ e consequentemente, $S_n = \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r}$ para $r \neq 1$. Quando $|r| < 1$, temos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |r^n| = 0$ (Ver subseção 2.8, página 7) de modo que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Assim, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a_0}{1-r}$. No caso de $|r| \geq 1$, observemos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_0 r^n| \neq 0$ (exercício), o que implica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_0 r^n \neq 0$. Assim, a séries diverge pelo teste do termo geral. □

Exemplo 3.13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{2^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{6}$ pois $a_0 = \frac{1}{8}$ e $r = \frac{1}{4}$ com $|r| < 1$.

Exemplo 3.14. $1.2\underline{36}\,\underline{36}\cdots = 1.2+0.036+0.00036+\cdots = 1.2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0.036}{10^{2n}}$ que é uma série geométrica com $|r|<1$. Como $a_0 = 0.036$ e $r = \frac{1}{100}$ na parte da série, temos $11.2\underline{36}\,\underline{36}\cdots = 1.2 + \frac{0.036}{1-1/100} = \frac{12}{10}+\frac{0.036}{0.99} = \frac{12}{10}+\frac{36}{990} = \frac{1188+36}{990} = \frac{1224}{990}$

Exemplo 3.15. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{e^{3n+1}}$ como n não começa de 0, fazemos uma translação da índice $k = n-2$ (assim, $n=0$ implica que $k=0$), tendo $n = k+2$. Substituindo na série, temos $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{e^{3n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e^{3k+7}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e^7}\left(\frac{1}{e^3}\right)^k = \frac{1}{e^7}\frac{1}{1-\frac{1}{e^3}}$ por ser séries geométricas com $a_0 = \frac{1}{e^7}$ e $r = \frac{1}{e^3}$, tendo $|r|<1$.

3.4 Séries alternadas

Definição 3.16. A séries $\sum(-1)^n a_n$ com a_n positivo é denominado de *série alternada.*

Teorema 3.17 (teste de Leibiniz para série alternada)**.** *A séries alternada $\sum(-1)^n a_n$ com $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e a_n decrescente (não crescente) é convergente.*

Além disso, o erro de aproximação do valor da séries pela soma parcial S_n é no máximo $|a_{n+1}|$.

Demonstração. Considere a subsequência S_{2k} da sequência da soma parcial S_n da séries $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. Então $S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq S_{2k}$ pois $a_{2k+1} \geq a_{2k+2}$. Assim, S_{2k} é decrescente. Analogamente, a subsequência S_{2k+1} é crescente por ter $S_{2k+3} = S_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq S_{2k+1}$. Como $S_{2k+1} = S_{2k} - a_{2k+1} \leq S_{2k} \leq S_0 = a_0$, a sequência S_{2k} é decrescente e é limitada inferiormente, será convergente. Da mesma forma, S_{2k+1} é crescente e é limitada superiormente por $a_0 - a_1$, será convergente. Como S_{2k} e S_{2k+1} juntas formam a sequência S_n, basta mostrar que ambas limites são iguais para garantir a convergência de S_n. Sejam $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S_p$ e $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S_I$. Passando limite na equação $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$ e observando que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, temos que $S_I = S_P + 0$. Assim, ambos limites coincidem, o que prova que S_n converge. Denotamos por $S = S_I = S_P$ para analisar o erro de aproximação.

Observe que S_{2k+1} é crescente e S_{2k} é decrescente. Assim, temos que $S_{2k+1} \leq S < S_{2k}$. Logo, $|S - S_{2k}| \leq |S_{2k+1} - S_{2k}| = a_{2k+1}$ para aproximação por S_{2k}. Como exercício, mostre que a aproximação por S_{2k+1} é inferior a a_{2k+2}. □

Para verificar se é decrescente (não crescente) no caso de $a_n = f(n)$ para função diferenciável f, costuma analisar se vale $f'(x) \leq 0$. Caso não for diferenciável ou derivadas torna complexa, precisaria verificar diretamente que $a_{n+1} \leq a_n$.

Exemplo 3.18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge, pois é uma série alternada tal que

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\infty} = 0$ e a_n é decrescente, pois $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)+1} \leq \frac{1}{2n+1} \Leftrightarrow 2n+1 \leq 2n+3 \Leftrightarrow 1 \leq 2$. Note que, na séries alternada, a_n já é assumido sem o sinal para efetuar testes e estimar erros. Para obter o erro inferior ou igual a 0.05, temos que somar até $|E_n| \leq a_{n+1} \leq 0.05$, isto é, $\frac{1}{2n+1} \leq 0.05 \Leftrightarrow \frac{1}{0.05} \leq 2n+1 \Leftrightarrow 20-1 \leq 2n \Leftrightarrow \frac{19}{2} \leq n \Leftrightarrow 9.5 \leq n \Leftrightarrow 10 \leq n$, pois n deve ser inteiro. Assim, terá que somar até $n = 10$. A convergência lenta desta séries é justificada pelo fato do valor de r que pode ser obtido pelo teste da razão (Teorema 3.40 que veremos mais adiante) é igual a 1.

Exemplo 3.19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ é uma série alternada com $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{\infty \ln \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$ e $a_n = f(n) = \frac{1}{n \ln n}$ com f decrescente para x grande, por ter $f'(x) = \frac{-(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} \leq 0$ para $x \geq 1$. Logo a série converge. Para ter erro inferior a 0.05, tem-se que $a_n = \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{1}{n}$ para $n > e$ e logo, basta ter $\frac{1}{n} \leq 0.05 \implies n \geq 20$.

Exercício 3.20. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-10.5)^2}$ converge.

3.5 Séries de termos positivos

No caso das séries de termos positivos, a soma parcial sempre é crescente. Assim, se ele for limitado superiormente, será convergente (ver Teorema 2.24 da página 6). Assim, podemos obter alguns critérios especiais.

Exercício 3.21. Uma séries de termo positivo é divergente se, e somente se, divergir para o infinito.

Teorema 3.22 (teste da integral). *A séries $\sum a_n$ com $a_n = f(n)$ onde f é uma função contínua, positiva e decrescente (por exemplo, $f'(x) \leq 0$) para x grande, então a séries converge se, e somente se, a integral $\displaystyle\int_A^{\infty} f(x)dx$ converge para algum A. Além disso, o erro cometido pela aproximação do valor da séries S pela soma parcial S_N é no máximo $\displaystyle\int_N^{\infty} f(x)dx$.*

Demonstração. Temos que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + \cdots + a_N + \sum_{N}^{\infty} a_n = S_N + \sum_{N+1}^{\infty} a_n$. Como $f(x) \geq 0$ para $n \geq N$, temos que a soma parcial S_n da séries é crescente para $n \leq N$. Assim, a séries converge se, e somente se $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ for limitada.

Para cada $n > N$, temos que $a_{n+1} \leq f(x) \leq a_n$ para $x \in [n, n+1]$ por f ser decrescente (Figura 3.1).

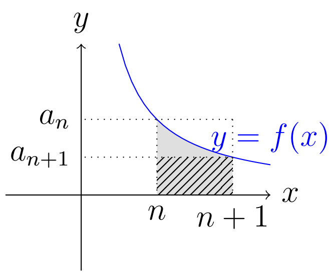

Figura 3.1: Teste da integral

Então $\displaystyle a_{n+1} = \int_n^{n+1} a_{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} a_n dx = a_n$.
Se a integral converge, temos que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots \leq \int_N^{N+1} f(x)dx + \int_{N+1}^{N+2} f(x)dx + \cdots = \int_N^{\infty} f(x)dx$$

que é limitada, o que implica que a séries converge.

Por outro lado, se a séries converge, temos que

$$\int_N^{\infty} f(x)dx \leq \int_N^{N+1} f(x)dx + \int_{N+1}^{N+2} f(x)dx + \cdots \leq a_N + a_{N+1} + \cdots = \sum_{n=N}^{\infty} a_n,$$

implicando que a integral é limitada e pelo fato da função ser não negativa, ele converge.

Para analisar o erro, observemos que o erro de aproximação do valor da séries por S_N é igual a $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$, o que conclui o teorema. □

Note que, se a integral convergir, teria $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, o que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplo 3.23. $\sum \frac{n}{e^{n^2}}$ é convergente. De fato, $a_n = f(n)$ onde $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$ que é positiva para $x > 0$. Agora, $f'(x) = \frac{1e^{x^2} - xe^{x^2}2x}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{(1-x^2)e^{x^2}}{e^{2x^2}} \leq 0$ para $1 < x^2$ (ou seja para $x > 1$ que é para todo x suficientemente grande). Como o termo da séries e definidos pela função não negativa e decrescente, aplicaremos o teste da integral.

$$\int \frac{x}{e^{x^2}}dx = \int e^{-x^2}xdx = \frac{-1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)dx = \frac{-1}{2}e^{-x^2} + C = \frac{-1}{2e^{x^2}} + C.$$

Portanto, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}dx = \left(\frac{-1}{2e^{x^2}}\right]_1^{\infty} = \frac{-1}{2e^{\infty^2}} - \frac{-1}{2e^{1^2}} = \frac{-1}{\infty} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e}$ que é um número (não é ∞). Assim, a integral converge e consequentemente, a séries converge.

Exercício 3.24. Verifique a convergência da série $\sum \frac{1}{n \ln n}$.

Definição 3.25. A séries $\sum \frac{1}{n^p}$ é denominado de p-séries.

Teorema 3.26 (p-séries)**.** *$\sum \frac{1}{n^p}$ converge se, e somente se, $p > 1$.*

A demonstração é feita pelo teste da integral (Teorema 3.1 da página 12) para o caso de $p > 0$ e o teste do termo geral (Corolário 3.6) para o caso de $p \leq 0$ e será deixado como exercício.

A séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é conhecido como a séries harmônicas que "fica no limite" entre séries convergentes e divergentes, tendo divergência muito lenta (para infinito). A amostra da soma parcial parece convergir para um número.

Exemplo 3.27. Seja a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{3/2}}$. Fazendo $k = n+1$ (logo, $n = k-1$), tem-se que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{3/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ que é uma p-série com $p = \frac{3}{2} > 1$. Então ele converge.

Teorema 3.28 (teste da comparação)**.** *Se as Séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são de termos positivos ($a_n > 0$ e $b_n > 0$) com $a_n \leq b_n$ então:*

- *Se* $\sum a_n = \infty$, *temos que* $\sum b_n = \infty$;
- *Se* $\sum b_n$ *converge, temos que* $\sum a_n$ *também converge. Além disso,* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$

Demonstração. Sejam $(S_a)_N = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} a_n$ e $(S_b)_N = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} b_n$ as somas parciais. Como são de termos positivos, eles são crescentes e $(S_a)_n \leq (S_b)_n$. Se $\sum a_n$ divergir, tem-se que $\lim\limits_{N\to\infty} (S_a)_N = \infty$ e logo, $\infty = \lim\limits_{N\to\infty} (S_a)_N \leq \lim\limits_{N\to\infty} (S_b)_N$ de modo que $\sum b_n = \infty$.

Se $\sum b_n$ convergir, $(S_a)_N \leq (S_b)_N \leq \lim\limits_{N\to\infty} (S_b)_N = S_b < \infty$ de modo que $(S_a)_N$é uma sequencia crescente limitada superiormente por S_b. Logo converge. Além disso, $(S_a)_N \leq (S_b)_N \implies \lim\limits_{N\to\infty} (S_a)_N \leq \lim\limits_{N\to\infty} (S_b)_N$ e consequentemente, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$. □

Exemplo 3.29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Como $\frac{1}{n(n+1} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge por ser p-série com $p = 2 > 1$, a série converge.

Exemplo 3.30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-e^{-n}}{n} = -\sum \frac{e^{-n}}{n}$. Como $\frac{e^{-n}}{n} \leq e^{-n}$ e $\sum e^{-n}$ é convergente por ser série geométrica de razão $r = \frac{1}{e} < 1$, a série converge. além disso, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}$.

Teorema 3.31 (teste de comparação forma limite)**.** *Se as séries* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *são de termos positivos com* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L \neq \infty$. *Então temos*

- *Se* $L \neq 0$, *então as séries* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$, *ambas convergem ou ambas divergem.*
- *Se* $L = 0$ *e* $\sum b_n$ *converge, então* $\sum a_n$ *também converge.*
- *Se* $L = 0$ *e* $\sum a_n$ *diverge, então* $\sum b_n$ *também diverge.*

Demonstração. Caso de $L \neq 0$. Como a_n e b_n são de termos positivos, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ na condição do teorema. Assim, para $\varepsilon = \frac{L}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \implies L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$ e consequentemente, $b_n(L-\varepsilon) < a_n < (L+\varepsilon)b_n$. Se $\sum b_n$ convergem, $\sum (L+\varepsilon)b_n$ também converge. Logo, $\sum a_n$ converge.

Se $\sum a_n$ for convergente, note que $\varepsilon = \frac{L}{2}$ implica em $L - \varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ e consequentemente, $b_n < \frac{a_n}{(L-\varepsilon)}$. Como $\sum \frac{a_n}{L-\varepsilon}$ converge, $\sum b_n$ também converge pelo teste da comparação.

Caso de $L = 0$. Se $\sum b_n$ convergente então, dado $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \implies -1 = L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon = 1$ e consequentemente, $a_n < b_n$. Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge pelo teste da comparação e se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ também diverge pelo teste da comparação.

□

Exercício 3.32. Sejam as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ que são de termos positivos com $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$. Mostre que

- $\sum a_n$ converge, então $\sum b_n$ também converge.

- $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ também diverge.

Exercício 3.33. Dica: Imitar a demonstração do caso de $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ou observe que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ então $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$.

O teorema acima simplifica a verificação de convergência da séries de termos no caso de ser quociente da soma de funções elementares. A simplificação é baseado na "ordem de convergência da função" como no caso do teste de comparação das sequências (Veja subseção 2.5 da página 5).

Exemplo 3.34. $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge. Simplificando $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pela ordem da função, obteremos $b_n = \frac{1}{n^2}$. Como exercício, verifique que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq 0$. Como $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ é uma p-séries com $p > 1$, é convergente. Logo a séries $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ também é convergente, pelo teste de comparação forma limite (Teorema 3.31). Note que o procedimento de simplificação pela ordem da função nem sempre funciona para usar diretamente o teorema de comparação forma limite.

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2+n}$ é convergente, mas a simplificação dos termos, seria $\sum e^{-n^2}$ que é convergente, mas não serve para teste da comparação por ter $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

No entanto, é fácil de verificar a convergência pelo teste da razão (Toerema 3.40 da página 3.40).

3.6 Séries absolutamente convergentes

Definição 3.35. Uma série $\sum a_n$ é dito *absolutamente convergente* quando $\sum |a_n|$ converge. Se $\sum a_n$ converge, mas $\sum |a_n|$ não converge, é dito *condicionalmente convergente.*

Temos que

Teorema 3.36 (série absolutamente convergente)**.** *A série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Como $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ e como $2\sum |a_n|$ é convergente, pelo teste da comparação $\sum(a_n + |a_n|)$ converge por ser séries de termos positivos. Assim, $\sum a_n = \sum(a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$ é a diferença de séries convergentes, o que implica que é convergente. $\square$

Exemplo 3.37. $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ converge, pois temos que $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Como $\sum \frac{1}{n^2}$ é série convergente por ser p-séries com $p > 1$, $\sum |a_n|$ converge pelo teste de comparação acima. Logo a série é absolutamente convergente, o que implica que ele é convergente.

Uma das características mais importantes da séries absolutamente convergente é ter a mesma soma, independente de rearranjos dos termos (Veja [3, Teorema do reagrupamento]). No caso das séries condicionalmente convergentes, o rearranjo pode alterar o valor da soma (Veja o exemplo D.1 da página 32).

É possível provar que, se for dado uma série condicionalmente convergente, consegue obter qualquer número real como valor da série obtido pelo rearranjo dos seus termos.

3.7 Teste da raiz e da razão

Para verificar a convergência das séries sem características especiais, o teste da raiz e da razão são os mais usados. A seguir, veremos estes testes.

Teorema 3.38 (teste da raiz). *Se $r = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então temos que*

- *Se $r < 1$ a séries $\sum a_n$ converge (série será absolutamente convergente);*
- *Se $r > 1$, então a séries $\sum a_n$ diverge.*
- *Se $r = 1$, não se sabe.*

Demonstração. A demonstração é feita, comparando com a série geométrica de razão r.

Se $r = \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, considere $\varepsilon = \frac{1-r}{2}$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, $r - \varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < r + \varepsilon$. Denotando $\bar{\tilde{r}} = r + \varepsilon$, temos que $\tilde{r} < 1$ e $|a_n| < \tilde{r}^n$. Como a série $\sum_{k=N}^{\infty} \tilde{r}^k$ é uma série geométrica com razão $|\tilde{r}| < 1$, ele converge. Pelo teste da comparação, a série $\sum |a_n|$ é convergente, o que implica que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Se $r = \lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, considere $\varepsilon = \frac{r-1}{2}$ e $\tilde{r} = r - \varepsilon$. Como no caso acima, teremos $\tilde{r}^k < a_n$ com $\tilde{r} > 1$.

Assim, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (prove). Logo, não pode ter $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (prove), o que significa que a série é divergente. □

Exemplo 3.39. $\sum \frac{e^n}{n^2}$ diverge, pois $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^n}{n^2}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e}{\sqrt[n]{n^2}} = e > 1$. A prova de que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$ é deixado como exercício.

Teorema 3.40 (teste da razão). *Se $r = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ então temos que*

- *Se $r < 1$ a séries $\sum a_n$ converge (série será absolutamente convergente);*
- *Se $r > 1$, então a séries $\sum a_n$ diverge.*
- *Se $r = 1$, não se sabe.*

Demonstração. A demonstração é análoga do teste da raiz, mas requer mais cuidados.

Se $r = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, considere $\varepsilon = \frac{1-r}{2}$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, $r - \varepsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r + \varepsilon$. Denotando $\tilde{r} = r + \varepsilon$, temos que $\tilde{r} < 1$ e $|a_{n+1}| < |a_n|\tilde{r}$. Assim, podemos usar a indução finita para obter $|a_{N+k}| < a_N\tilde{r}^k$. Como a série $\sum |a_N|\tilde{r}^k$ é uma série geométrica com razão $|\tilde{r}| < 1$, ele converge. Pelo teste da comparação, a série $\sum |a_{N+k}|$ é convergente, o que implica que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Quando $r = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, considere $\varepsilon = \frac{r-1}{2}$ e $\tilde{r} = r - \varepsilon$ no caso acima, obtendo $\left|a_N\tilde{r}^k\right| < |a_{N+k}|$ com $\tilde{r} > 1$.

Assim, temos que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{N+k} = \infty$ (prove). Logo, não pode ter $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (prove), o que significa que a séries é divergente. □

Observação 3.41. O critério do teste da razão e da raiz é mesmo, exceto em como determinar o valor de r.

Observação 3.42. Quado existem os limites considerados, o valor de r obtidos pelo teste da raiz e da razão são mesmos. Logo, não adianta trocar o teste quando $r = 1$. No entanto, existem casos que somente um dos testes consegue determinar o r.

Observação 3.43. Quanto menor o r, mais rápido será a convergência da série. Assim, $r = 0$ indica que a séries converge muito rápido, enquanto que $r = 1$ indica que, se a séries convergir, converge bem de vagar.

Note que na demonstração da divergência nos testes da raiz e da razão, foi mostrado que o termo geral não tende a zero, o que faz perguntar porque então existem problemas que aplica o teste da razão em vez do teste do termo geral para provar que a série diverge. O fato é que, existe problemas em que obter o limite da raiz ou da razão pode ser mais simples do que o limite do termo geral.

Exemplo 3.44. $\sum \frac{n^2}{n!}$ converge, pois

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1.$$ Assim, a séries converge (converge bem rápido).

Note que nem sempre podemos empregar o teste da razão. A seguir, o exemplo que precisa do teste da raiz por envolver forma similar a n^n, o que torna difícil de aplicar a teste da razão..

Exemplo 3.45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2} \right)^n$ converge, pois $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$

Exercício 3.46. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n + 1/2}{n} \right)^n$ converge. **Dica:** Aplique o teste da razão, considerando o caso de n ser par e n ser impar.

Observação 3.47. As vezes, mostra que a série converge para provar que o limite da sequência é 0. Isto ocorre quando o termo envolve $a^n, n!, n^n, etc$ que são fáceis de ser manipulado pelo teste da razão ou da raiz, mas é difícil de ser trabalhados diretamente.

A proposição a seguir é impostante para estudo do erro de Taylor que veremos mais adiante. A sua demonstração será simples, se utilizar a série.

Proposição 3.48. *Dado um número c, temos que* $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$.

Demonstração. Consideremos a série $\sum \frac{c^n}{n!}$. Pelo teste da razão,

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^{n+1}}{c^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1} = \frac{c}{\infty} = 0 < 1.$$

Então a série converge e consequentemente, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0.$ □

Capítulo 4

Séries de Potências

Definição 4.1. A séries do tipo $\sum a_n(x-c)^n$ é denominado de *séries de potências.*

Dado uma séries de potências, existe R na qual a série converge para $|x-c|<R$ (no interior do intervalo de raio R com centro em c) e diverge para $|x-c|>R$. Este valor R é denominado de *raio de convergência.* Quanto mais próximo do centro, a convergência será mais rápida e quanto mais próximo dos extremos, a convergência será mais lenta.

Frequentemente, a séries de potência aparece com expoente de $(x-c)$ diferente de n, como no caso de $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ que tem $2n+1$ como potências. Assim, requer cuidados na hora de obter o raio de convergência.

Observação 4.2. Convencionaremos que $0^0 = 1$ e $0! = 1$ para simplificar a notação.

4.1 Raio de convergência

Uma forma de obter o raio de convergência R é aplicar o teste da razão ou da raiz, incluindo potências de $(x-c)$ para determinar valores de x na qual a séries converge.

Exemplo 4.3. $\sum \frac{n}{e^n} x^{3n+5}$. Considerando o termo geral $a_n = \frac{n}{e^n} x^{3n+5}$, incluindo as potências de $x-c$, temos que

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} \frac{e^n}{e^{n+1}} \frac{|x|^{3(n+1)+5}}{|x|^{3n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{ne}|x|^3 = \frac{\infty}{\infty} \\ &\overset{L'Hopital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^3}{e} = \frac{|x|^3}{e}. \end{aligned}$$

Observe que o limite é aplicado em n e consequentemente, L'Hopital é aplicado em n. Como precisamos de $r<1$ para garantir a convergência, $\frac{|x|^3}{e} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt[3]{e}$. Logo, o raio de convergência é $R = \sqrt[3]{e}$.

O caso de ter deslocamento do centro é análogo.

Exemplo 4.4. $\sum \frac{n}{2^n}(x-1)^{\frac{n+1}{2}}$. Temos que

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1}(x-1)^{\frac{n+1+1}{2}}\right|}{\left|a_n(x-1)^{\frac{n+1}{2}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n}\frac{2^{n+1}}{2^n}|x-1|^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2}{n}|x-1|^{\frac{1}{2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando a regra de L'Hopital, temos $r = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}|x-1|^{\frac{1}{2}} = 2|x-1|^{\frac{1}{2}}$. Logo, a convergência é dado pela condição $r = 2|x-1|^{\frac{1}{2}} < 1 \implies |x-1|^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \implies |x-1| < \frac{1}{4}$. Logo, $|x-1| < \frac{1}{4}$. Assim, o raio de convergência é $R = \frac{1}{4}$.

É importante observar que $|x-c| < R$ e não $|ax-c| < R$ ou similar.

Exemplo 4.5. $\sum(2x-1)^{\frac{n}{2}}$. Temos que $r = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(2x-1)^{\frac{n+1}{2}}\right|}{\left|(2x-1)^{\frac{n}{2}}\right|} = \lim_{n\to\infty} |2x-1|^{\frac{1}{2}} = |2x-1|^{\frac{1}{2}}$. Logo, a convergência é dado pela condição $r = |2x-1|^{\frac{1}{2}} < 1 \implies |2x-1| < 1$. Logo, $2\left|x-\frac{1}{2}\right| < 1 \implies \left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$. Assim, o raio de convergência é $R = \frac{1}{2}$ e centro de convergência é $\frac{1}{2}$. Outra alternativa é reescrever a série como $\sum(2x-1)^{\frac{n}{2}} = \sum 2^{\frac{n}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ antes de aplicar o teste da razão ou raiz.

Observação 4.6 (para implementação computacional). Se a séries de potências é da forma $\sum a_n(x-c)^{\alpha n+\beta}$, o que aparece com maior freqüência, a razão ou raiz da parte das potências de $(x-c)$ será $\lim_{n\to\infty} \frac{|(x-c)^{\alpha(n+1)+\beta}|}{|(x-c)^{\alpha n+\beta}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(x-c)^{\alpha n+\alpha+\beta}|}{|(x-c)^{\alpha n+\beta}|} = |x-c|^{\alpha}$. Logo, se $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ ou $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (caso existam os limites, serão mesmos) onde a_n é o termo sem as potências de $(x-c)$, temos que

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1}(x-c)^{\alpha(n+1)+\beta}\right|}{|a_n(x-c)^{\alpha n+\beta}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(x-c)^{\alpha(n+1)+\beta}\right|}{|(x-c)^{\alpha n+\beta}|} = \rho|x-c|^{\alpha}.$$

Assim, a convergência é dado pela condição $r = \rho|x-c|^{\alpha} < 1 \Rightarrow |x-c| < \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, ou seja, o raio de convergência é $R = \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Esta fórmula é útil para implementação computacional, mas no caso de cálculo manual, é aconselhável que efetue teste da raiz ou da razão de forma direta para evitar erros.

4.2 O Intervalo de convergência

O intervalo de convergência é o intervalo I com centro em c e raio R tal que a séries de potências converge se, e somente se, $x \in I$. Como convergência é garantido em $|x-c<R \implies -R<x-c<R \implies c-R<x<c+R$ e a divergência é análoga, o intervalo é similar a $[c-R, c+R]$ com cada extremos, abertos ou fechados dependendo da série, o que requer testes. Uma das propriedades importantes das séries de potências é

Teorema 4.7 (Abel)**.** *A séries de potência é contínua no intervalo de convergência.*

Observação 4.8. Note que a séries de potências é especial por convergir para função contínua graças ao Teorema de Abel. Na sequência de funções quaisquer, isto não acontece como no caso de $f_n(x) = x^n$ que é uma sequência de funções contínuas e é convergente no intervalo $]-1,1]$. No entanto, o limite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ é uma função descontínua dado como $f(x) = \begin{cases} 0 & ,-1<x<1 \\ 1 & ,x=1 \end{cases}$ (exercício).

Exemplo 4.9. Determine o intervalo de convergência de $\sum \frac{x^n}{n}$.

$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|}{n} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{1} = |x|.$

Como $r < 1$ para convergir, $|x| < 1$. Logo raio de convergência é $R = 1$. Como o centro é $c = 0$, o intervalo é $I =]-1, 1[$, com ou sem fechar os extremos. Testaremos cado um dos extremos. $x = 1$ então $\sum \frac{1}{n}$ é p-série com $p = 1$ que é divergente. Para $x = -1$, temos $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ que é uma série alternada com $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$ e a_n não crescente, pois $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq n+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1$. Logo, é convergente. Portanto, o intervalo é $I = [-1, 1[$.

4.3 Derivadas e integrais

Derivadas e integrais das séries de potências são efetuadas termo a termo. Tome cuidado quando obtêm a derivada, pois o termo constante vai sumir ($a_n x^n$ para $n = 0$). Caso não observar, poderá aparecer potências negativas! Na derivada, pode perder a convergência nos extremos e na integral, poderá ganhar convergência nos extremos, mas o raio de convergência mão muda. Para saber se ocorreu a perda (no caso da derivada) ou o ganho (no caso da integral) nos extremos, terá que testá-los.

Exemplo 4.10. Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo x (veja Exemplo 5.6) , temos que

$\int e^{x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + C$ que tem o raio de convergência $R = \infty$.

Assim, conseguimos uma representação em séries de potências, da função $\int e^{x^2} dx$ que não tem representação em termos de funções elementares.

Também poderá obter o integral definido em termos de séries numéricas.

Exemplo 4.11. A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n}$ converge no intervalo $(-2, 2)$ (exercício) de forma que poderá calcular a integral em $[-1, 1]$.

$$\int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n} dx = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{2^n(n+1)} \right]_{-1}^{1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} \right]_{-1}^{1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n}.$$

Como é somas de duas séries geométricas,

$$\int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n} dx = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-1}{2}.$$

No exemplo acima, até foi possível obter o valor exato da integral definida, mas no caso geral, a série pode não ser fácil de ser resolvido. No entanto, a soma parcial da série resultantes pode ser usado para estimar a integral definida.

Exemplo 4.12. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ para $-1 < x \leq 1$. Note que $\ln x$ não pode ser escrito na séries da forma $\sum a_n x^n$ (sem deslocamento na origem), pois $\ln 0 = \nexists$, mas a série converge em $x = 0$. No entanto, com o deslocamento em x, $f(x) = \ln(1+x)$ existe para $x = 0$.

Sabemos que $f'(x) = (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_o r^n = \frac{a_0}{1-r}$, temos que $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ para $r = -x$ com $|r| = |-x| = |x| < 1$.

Integrando, temos que $f(x) = \int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Calculando para $x = 0$, temos $f(0) = 0+C \implies \ln 1 = C \implies 0 = C$. Logo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ para $|x| < 1$. Para os pontos de extremos, para $x = 1$ a séries converge (exercício) e para $x = -1$, a séries diverge. Como $\ln(1+x)$ é contínua neste intervalo, pode ser representado pela séries de potências obtida, para $-1 < x \leq 1$. Se fizermos $u = 1+x$, temos que $x = u-1$ e fornece $\ln(u) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(u-1)^{n+1}}{n+1}$ que converge para $0 < u \leq 2$.

Observação 4.13. Note que $x = c$ é o único ponto na qual podemos obter o valor de qualquer séries de potência $\sum a_n (x-c)^n$.

Observação 4.14. Note que o valor da séries harmônicas alternadas pode ser obtido facilmente com $x = 1$ na séries de potências de $\ln(1+x)$. Assim, $\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

Exemplo 4.15. Temos que $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ para $-1 \leq x \leq 1$. Como $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, é a soma da séries geométricas com razão $r = -x^2$ para $|r| = |-x^2| < 1 \implies |x| < 1$. Assim, $\arctan'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

Integrando, temos $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + C$. Como $\tan 0 = 0 \implies \arctan 0 = 0$, temos que $C = 0$ (exercício). Logo, $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Como a séries converge para $x = -1$ e $x = 1$ (exercício), a séries coincide com a função para $-1 \leq x \leq 1$ por arco tangente ser uma função contínua.

Observação 4.16. Como $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, temos que $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (séries de Madhava-Leibniz).

Exercício 4.17. Mostre que a função de Bessel de ordem k $J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}$ converge para todo x.

Capítulo 5

Séries de Taylor e de Maclaurin

Teorema 5.1. *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *então* $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Demonstração. Como séries de potências tem derivadas, f também terá. Derivando ambos os lados e observando que $(x - c)^0$ é constante, temos que $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)(x-c)^{n-k}$ (exercício).

Assim, $f^{(k)}(c) = a_k k \times (k-1) \times \cdots \times (k-k+1) = a_k k!$ (porquê?) e consequentemente, $a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$. □

No caso da função ser séries de potências, o teorema acima permite obter a séries de potências que representa a função, mas nem toda função é igual a uma séries de potências, o que requer cuidados.

Seguinte teorema permite aproximar funções pelo polinômio, assim como verificar se é possível escrever a função em termos de séries de potências.

Teorema 5.2 (Taylor)**.** *Se f tiver derivadas contínuas até a ordem $N+1$ no intervalo contendo c e x então* $f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!} + R_N$ *onde* $R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$ *com* $z \in [c, x]$.

Escrevendo $f(x) = p_N(x) + R_N$ com $p_N(x) = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_N(x-c)^N$ e assumindo que derivadas até ordem N de f coincide com do polinômio, podemos mostrar que $a_i = \frac{f^{(i)}(c)}{i!}$ (exercício). No entanto, a prova da expressão do erro requer mais trabalhos, o que não é feito aqui.

O polinômio $p_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$ é chamado de polinômio de Taylor de ordem N em torno de c e serve para estimar o valor de $f(x)$. O erro é estimado por $|R_n| \leq \frac{M_{n+1}|x-c|^{n+1}}{(n+1)!}$ onde M_{n+1} é um limitante para $|f^{(n+1}(z)|$, isto é, um número tal que $|f^{(n+)}(z)| \leq M_{n+1}$ que não independe de z (depende somente de x e n). A séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$ é denominado de séries de Taylor em torno de c. Quando $c = 0$, a aproximação/séries de Taylor é denominado de aproximação/séries de Maclaurin. Lembre-se que, quanto mais próximo for o x de c, menor será o erro. Assim, se já tiver o valor de x que queremos estimar, deverá desenvolver em torno do ponto mais próximo em que sabemos o valor da função e suas derivadas.

Exemplo 5.3. Estimar o valor de $\operatorname{sen} 0.1$ usando o Taylor de ordem 3 e estime o seu erro. Temos que $\operatorname{sen}' x = \cos x$, $\operatorname{sen}'' x = -\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}''' x = -\cos x$ e $\operatorname{sen}^{(4)} x = \operatorname{sen} x$. O ponto mais próximo de 0.1 que sabemos os valores de função e suas derivadas é 0. Taylor de terceira ordem em 0 é $p_3(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\frac{(x-0)^2}{2!} + f'''(0)\frac{(x-0)^3}{3!}$. Temos $f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0, f'''(0) = -\cos 0 = -1$ de onde $p_3(x) = 0 + x + \frac{0x^2}{2!} + \frac{-x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$. Assim, $\operatorname{sen} 0.1 \simeq 0.1 - \frac{0.1^3}{6} = 0.1 - \frac{0.001}{6} = 0.1 - 0.00016666\cdots = 0.0998333\cdots$

Para estimar o erro, temos que $M_4 \geq \max\{|f^{(4)}(z)|\} = \max\{|\operatorname{sen} z|\}$ com $z \in [c,x] = [0, 0.1]$. Como $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$, podemos tomar $M_4 = 1$. Logo, $|R_3| \leq M_4\frac{|x|^4}{4!} = \frac{0.1^4}{24} = \frac{0.0001}{24}$.

Exercício 5.4. Estimar o valor de $e^{0.1}$ usando o Taylor de ordem 3 e estime o seu erro, sabendo que $e < 3$.

Quando $\lim\limits_{N\to\infty} R_N = 0$, temos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$ e a função é igual a sua séries de Taylor. Neste caso, f é denominado de função analítica. Isto ocorre, por exemplo, se $|f^{(n+1)}(z)| \leq M$ para todo n, $\forall z \in [c,x]$ (valor absoluto das derivadas são limitados pelo número M que não depende de n, nem de z).

Observação 5.5. Note que nem toda função de classe $\mathcal{C}^\infty$ (que tem todas derivadas contínuas) é analítica. Por exemplo, $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ tem todas derivadas contínuas e $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k (exercício). Assim, a séries de Taylor em torno de 0 será $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$ que converge para todo x, mas é obvio que não é $f(x)$ para $x \neq 0$ (não existe intervalo em que $f(x)$ coincide com a séries de Taylor em torno de 0).

Exemplo 5.6. Vamos provar que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo x. Temos $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., $f^{(n)}(x) = e^x$. Ponto onde podemos calcular função e suas derivadas é em $c = 0$. Assim, podemos obter a séries de Taylor em torno de 0. Neste caso, teremos $f(0) = e^0 = 1$ e $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n., tendo a séries de Maclaurin (Taylor em torno de 0) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Para que $f(x)$ seja igual a séries de Taylor, o erro deve tender a zero quando n cresce.

Temos que $|f^{(n+1)}(z)| = |e^z| = e^z$ é contínua no intervalo $[c,x] = [0,x]$. Sabemos que toda função contínua no intervalo fechado possui máximos e mínimos. Então existe um máximo M em $[0,x]$, isto é, constante M tal que $|f^{(n+1)}(z)| \leq M$ para todo $z \in [c,x] = [0,x]$. Como $|f^{(n+1)}(z)| = |e^z| = e^z$ não depende de n, M também não depende de n (se $f^{n+1}(z)$ depender de n, M_n também dependeria de n, mas isto não ocorre neste caso). Assim, $|f^{(n+1)}(z)|$ é limitado pelo número M que não depende de n. Assim, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} |R_N| = \lim_{N\to\infty} \frac{\left|f^{(N+1)}(z_N)\right| x^N}{(N+1)!} \leq \lim_{N\to\infty} \frac{Mx^N}{N!} = M \times 0 = 0$ pela Proposição 17 (página 3.48). Logo, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Veremos outro exemplo.

Exemplo 5.7. Vamos provar que $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo x. Temos $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) =$

$\cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$,$f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x = f(x)$. Como queremos que seja série de Maclaurin, devemos desenvolver em torno de 0.

Iniciaremos pela análise de erro. Como todas derivadas são seno ou cosseno e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$, temos que $|f^{n+1}(z)| \leq 1 = M$ para todo n. Assim, $\lim\limits_{N\to\infty} |R_N| = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\left|f^{(N+1)}(z_N)\right| x^N}{(N+1)!} \leq M \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{x^N}{N!} = M \times 0 = 0$, novamente pela Proposição 3.48 (página 17). Consequentemente, $\operatorname{sen} x$ coincide com a séries de Maclaurin para todo x.

Para obter a séries de Maclaurin ($c = 0$), observemos que $f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$,$f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1$ e quarta em diante repete de novo, pois quarta derivada é igual a f. Assim, da ordem par sempre é nulo, o que significa que não vai aparecer na séries de potências. Da ordem ímpar alterna de sinal e seu valor absoluto é 1. Assim, para $n = 2k+1$, temos que $f^{(n)}(0) = f^{2k+1}(0) = (-1)^k$. Portanto, a séries de Maclaurin (Taylor em torno de 0) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)(x-0)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)x^{2k=1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

.

Nem sempre o limitante da derivada é independente de n, o que torna difícil de trabalhar com o erro de Taylor, como no exemplo a seguir.

Exemplo 5.8. Vamos provar que $\ln x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$ para $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ usando técnicas de séries de Taylor. Sendo $f(x) = \ln x$, temos que $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{1\times 2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = \frac{-1\times 2\times 3}{x^4}$, $f^{(5)}(x) = \frac{1\times 2\times 3\times 4}{x^5}, \dots$ de forma que $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$ para $n > 0$, o que pode ser verificado pela indução finita (exercício).

Logo, $f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{1^{n+1}} = (-1)^{n+1}(n-1)!$ para $n > 0$ de onde temos a séries de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!} = f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!} \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-1)^k}{k+1}. \end{aligned}$$

Para saber quando coincide com $\ln x$, precisamos verificar o termo do erro.

Temos que $|f^{(n+1)}(z)| = \left|\frac{n!}{z^{n+1}}\right|$ que é decrescente. Então ele assume o máximo quando valor de z for mínimo.

Para $1 \leq z \leq x$, o valor de máximo é assumido em $z = 1$, tendo $\left|f^{(n+1)}(z)\right| \leq n!$, Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} |R_n| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|f^{(n+1)}(z_n)\right| |x-1|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \lim_{N\to\infty} \frac{M_n |x-1|^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! |x-1|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

para $|x-1| \leq 1$, o que garante que coincide em $[1, 2]$.

Para intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, observe que $\left|f^{(n+1)}(z)\right|$ assume o maior valor em x por ter $x \leq z \leq 1$.

Logo, $|f^{(n+1)}(z)| = \left|\frac{n!}{z^n}\right| \leq \frac{n!}{x^{n+1}} = M_{n+1}$ se $0 < x < 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}|R_n| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left|f^{(n+1)}(z_n)\right||x-1|^{n+1}}{(n+1)!} \le \lim_{N\to\infty}\frac{M_n|x-1|^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!|x-1|^{n+1}}{x^{n+1}(n+1)!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{n+1}}{x^{n+1}(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x-1}{x}\right|^{n+1}\frac{1}{n+1} = 0\end{aligned}$$

para $\frac{1}{2}\le x\le 1$ por ter $\left|\frac{x-1}{x}\right|\le 1$ (exercício). o que garante que a série coincide com a função.

Note que a técnica acima falha em $\left]0,\frac{1}{2}\right]$, o que torna difícil provar que a série coincide com o $\ln x$ para todo x no intervalo $]0,2]$ (o que já foi provado sem dificuldades, usando a série geométrica).

Exercício 5.9. Mostre que $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ para todo x.

Exercício 5.10. Encontre a séries de Taylor de $\cos x$ em torno de $\frac{\pi}{2}$.

Exercício 5.11. Obtenha a séries de Taylor de $\operatorname{sen}(x^2)$ em torno de 0. Dica: Use a séries de $\operatorname{sen} x$, pois única séries de potênicas que representa a função é de Taylor (Teorema 5.1).

Exercício 5.12. Obtenha a integral definida $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx$ em termos de séries numéricas.

Apêndice A

Séries de Fourier

As séries de potências é uma forma de aproximar a função através da combinação linear (soma dos múltiplos) de potências de x que é $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$. Em vez das potências de x, podemos utilizar outras sequências de funções (com preferencia, as funções cuja suas propriedades já são conhecidas). Uma destas sequências frequentemente utilizadas é a sequência das funções trigonométricas $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \cos(3x), \operatorname{sen}(3x), \ldots\}$. Somando os múltiplos dos termos desta sequência, teremos a séries

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

conhecidas como séries de Fourier e apresenta propriedades interessantes. Assim como a séries de potências, temos a forma de obter os coeficientes a_k e b_k a partir da função dada, para representar a função ou uma aproximação através da sua soma finita.

Teorema A.1. *$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$ em $[-\pi, \pi]$ então*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{A.1}$$

e para $k > 0$, tem-se que

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)dx \tag{A.2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)dx \tag{A.3}$$

Demonstração. Para obter os valores de seus coeficientes, vamos supor que

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$

no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Em vez de tentar ajustar as derivadas (feito para séries de potências), vamos ajustar algumas integrais definidas.

Inicialmente, veremos a integral no intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)dx\right)$$

e observando que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)dx = 0$, temos $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0$. Então

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Para obter os valores de a_k e b_k para $k = 1, 2, 3, \ldots$, analisaremos o integral de $f(x)\cos(kx)$ e $f(x)\,\text{sen}(kx)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$. Para tanto, observemos que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(kx)dx = \pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\text{sen}(kx)dx = 0$ para todo n e k e se $n \neq k$, temos também que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\,\text{sen}(kx)dx = 0$. Estes cálculo podem ser efetuados com o uso de identidades trigonométricas apropriadas.

Com tais integrais,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(kx)dx\right)$$

torna $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = a_k\pi$, o que implica que

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

Analogamente, temos que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(kx)dx = b_k\pi$, o que implica que

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(kx)dx$$

$\square$

A convergência da série de Fourier da função é garantida pelo seguinte teorema

Teorema A.2. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for 2π-periódica ($f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo x), contínua por partes e possui derivadas laterais em x (por exemplo, ter derivadas), então a série de Fourier de f em x converge para o ponto médio dos limites laterais $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. Em particular, se f for contínua em x, a série de Fourier de f em x converge para $f(x)$.*

Para facilitar os cálculos de tais coeficientes, veremos noções básicas sobre função par e impar.

Definição A.3. Uma função f é dito função par se $f(-x) = f(x)$ para todo x e é dito ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para todo x.

Quando f é par, temos que $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$ e quando f é impar, tem-se que $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$.

As funções dado por $f(x) = x^n$ é par se n for par e ímpar se n for ímpar. Também tem-se que $\cos(nx)$ é par e $\text{sen}(nx)$ é impar. As funções par e ímpar comporta como jogo de sinal na multiplicação. Temos que o produto de duas funções pares ou ímpares são função par e produto de função par com ímpar é ímpar.

Exemplo A.4. Agora vamos calcular a série de Fourier da função $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ no intervalo $[-\pi, \pi]$. Note que a função é impar. Logo, $a_0 = 0$. Como $f(x)\cos(nx)$ é ímpar, $a_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots$

Então calcularemos os valores de b_k's, observando que $f(x)\,\mathrm{sen}(nx)$ é par.

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x|}{x}\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(nx)dx = \left(\frac{-2}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{-2\cos(n\pi)+2\cos 0}{\pi n} = \begin{cases} 0 & , n \text{ par} \\ \frac{4}{\pi n} & , n \text{ impar} \end{cases}.$

Logo a Série de Fourier será

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\,\mathrm{sen}\left((2k+1)x\right).$$

Observação A.5. No exemplo anterior, para $x = \frac{\pi}{2}$, temos que $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\,\mathrm{sen}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$. Como $\mathrm{sen}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & , k \text{ par} \\ -1 & , k \text{ impar} \end{cases}$, temos que $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$, o que implica que $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ que é mesmo obtido pelo arco tangente (Observação 4.16).

Exemplo A.6. Agora vamos calcular a séries de Fourier da função $f(x) = |x|$ no intervalo $[-\pi, \pi]$. Note que a função é par. Logo $f(x)\,\mathrm{sen}(nx)$ é ímpar, tendo $b_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots$

Então calcularemos os valores de a_k's, observando que $f(x)\cos(nx)$ é par.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = 2\left(\frac{x\,\mathrm{sen}(nx)}{n} - \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{-2}{n^2}\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) = \begin{cases} 0 & , n \text{ par} \\ \frac{-4}{\pi n^2} & , n \text{ impar} \end{cases}.$

Logo a Série de Fourier será

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k+1)^2}\cos\left((2k+1)x\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

Exercício A.7. Obtenha a séries de Fourier da função $f(x) = x$ em $[-\pi, \pi[$.

Observação A.8. Dada uma função f definida no intervalo $[a, b]$, podemos definir $\tilde{f}(x + kT) = f(x)$ para todo inteiro k, onde $T = b - a$. Então $\tilde{f}$ é periódica de período T e coincide com a função f em $[a, b]$. A função $\tilde{f}$ definido desta forma é denominada de extensão periódica de f. Para ter uma série de Fourier de f em $[a, b]$, calcula-se a série de Fourier de $\tilde{f}$. Efetuando a mudança de variáveis e usando $L = \frac{T}{2} = \frac{b-a}{2}$ juntamente com a periodicidade, tem-se que

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\tilde{f}(t)dt = \frac{1}{L}\int_a^b f(t)dt$$

e para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\tilde{f}(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{L}\int_a^b f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\tilde{f}(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{L}\int_a^b f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt$$

e a séries de Fourier é da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right)$$

Exercício A.9. Verifique que a extensão periódica de $f(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi]$ é uma função contínua. Agora, tome $x = \pi$ na expressão da série de Fourier do Exemplo A.4 para obter $\dfrac{\pi^2}{8} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercício A.10. Seja $f(x) = x$ em $[0, 1[$. A extensão periódica de f é contínua? Quanto deve valer o valor da série de Fourier em $x = 2$? Agora obtenha a série de Fourier da função.

Exercício A.11. Obtenha a série de Fourier da função $f(x) = 1$ em $[-1, 1]$ e $g(x) = |x|$ em $[-1.1[$. Usando estas séries, obtenha a série de Fourier de $h(x) = 1 - |2x|$ em $[-1, 1[$.

Apêndice B

Prova do Teorema 2.24

Uma sequência é dita limitada se existe M tal que $\forall n, |x_n| \leq M$.

Um número M é dito limitante superior do conjunto $X \subset \mathbb{R}$, se for maior ou igual a qualquer elemento do conjunto, isto é, $\forall x \in X, x \leq M$. O conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente se tiver limitante superior. Análogo para o limitante inferior. O menor das limitantes superiores é denominado de supremo. Assim, o supremo de $X \subset \mathbb{R}$ é $\sup X = \inf\{M \in \mathbb{R} : M \text{ é limitante superior de } X\}$.

Da mesma forma, podemos definir o ínfimo.

Uma das propriedades importantes do conjunto dos números reais é o fato de todo subconjunto limitado superiormente ter um supremo.

Observação B.1. $S = \sup X$ então para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X : S - \varepsilon < x$.

De fato, se $x \leq S - \varepsilon$ para todo x, temos que $S - \varepsilon$ seria um limitante superior de X menor que S, contradizendo o fato de S ser o supremo (menor limitante superior).

Agora, vamos provar o Teorema 2.24 da página 6. Lembrando que o enunciado do teorema é

Teorema. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

prova do Teorema 2.24. Provaremos somente no caso da sequências crescentes, pois caso decrescente é análoga.

Seja $S = \sup\{x_n\}$ e vamos provar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = S$.

Seja dado $\varepsilon > 0$. Como S é supremo de $\{x_n\}$, existe N tal que $S-\varepsilon < x_N < S$. Como a sequência é crescente, $x_n \geq x_N$ para todo $n > N$. então $S - \varepsilon < x_N < x_n$. Como S é limitante superior, $x_n \leq S$. Assim, $S - \varepsilon < x_n \leq S < S + \varepsilon$, implicando que $\exists N : n > N \implies S - \varepsilon < x_n < S + \varepsilon$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = S$. □

Outro teorema interessante deste tipo, importante para estudos mais avançados das sequências e séries é

Teorema B.2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

A demonstração é baseado na construção de uma sequência crescente usando o supremo e é deixado como exercício.

Apêndice C

Considerações sobre sequências pela recorrência

Quando a sequência é dado por $x_{n+1} = \phi(x_n)$, dizemos que ϕ é uma função de recorrência. O estudo da função de recorrência é importante para saber sobre a sequência gerada, assim como estudar uma função é importante estudar a sequ6encia gerada, considerando a função como função de recorrência.

Teorema de Picard Um dos teoremas mais importante para estudo da convergência de sequências recursivas é o Teorema de Picard.

A versão do teorema de Picard no caso de envolver função diferenciável é

Teorema C.1 (Picard)**.** *Seja ϕ, uma função diferenciável e $\lambda < 1$ tal que $|\phi'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo x. Então a sequência recursiva definida como $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge, independente do valor de x_0.*

A demonstração costuma ser feito usando a séries geométrica e não será apresentado aqui por precisar conceitos da sequências de Cauchy.

Métodos de Newton Uma das formas de conseguir uma sequência recursiva que aproxima um determinado valor é pelo método de Newton.

Seja f, uma função diferenciável e queremos um valor ξ tal que $f(\xi) = 0$. Então definimos $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ determina uma sequência recursiva e em muitos casos, gera uma sequência convergente. Nos não vamos entrar em detalhes, mas veremos o caso de obter sequências que converge para $\sqrt{a}$ para $a > 0$.

Como queremos que $\xi = \sqrt{a}$, considere $x = \sqrt{a} \implies x^2 = a \implies x^2 - a = 0$ (cuja solução é $x = \pm\sqrt{a}$). Assim, usaremos a função $f(x) = x^2 - a$. Então a sequência pode ser definido como sendo $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$. Com um pouco de trabalho, podemos provar que a sequência determinada para o caso de $x_0 > \sqrt{a}$ é decrescente e é limitada inferiormente por $\sqrt{a}$, o que é convergente pelo Teorema 2.24 (página 6). Assim, conseguimos uma sequência que aproxima o valor de $\sqrt{a}$.

Apêndice D

Exemplo de rearranjos dos termos da séries condicionalmente convergentes

Exemplo D.1. Consideremos a séries harmônica alternada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ que é convergente com o valor da soma não nula (exercício).

Seja $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ que não é nula (exercício), consideremos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} &= \frac{1}{2\times 1} - \frac{1}{2\times 2} + \frac{1}{2\times 3} - \frac{1}{2\times 4} + \cdots \\ &= 0 + \frac{1}{2\times 1} + 0 - \frac{1}{2\times 2} + 0 + \frac{1}{2\times 3} + 0 - \frac{1}{2\times 4} + \cdots\end{aligned}$$

Somando S e $\frac{1}{2}S$, temos

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}S &= 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{2}{2\times 2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{2}{2\times 4} + 0 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right).\end{aligned}$$

Desta forma, obtivemos $\displaystyle\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right)$ que tem o valor $\frac{3}{2}S \neq S$.

No entanto, a séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$ é uma séries obtido pela séries harmônica alternada $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ através de rearranjos, colocando dois positivos seguido de um negativo. Assim, concluímos que na séries condicionalmente convergentes, o rearranjo dos termos pode alterar o valor das séries.

Referências Bibliográficas

[1] Simmons, George G. (tradução de Seiji Hariki), "Cálculo com Geometria Analítica", vol. 2, MCGraw-Hill, 1988.

[2] Swokowski, E. W. "O Cálculo com Geometria Analítica", Vol. 2, Makron Books do Brasil Editora Ltda, 2a. edição, São Paulo, 1995.

[3] Matos, Marivaldo P., "Séries e Equações Diferenciais", Prentice Hall, 2002.

[4] Boyce, William E. e DiPrima, Richard C., "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno", LTC Editora, 1999.