

# Aula 5

## Limites laterais

Para cada  $x$  real, define-se o *valor absoluto* ou *módulo de  $x$*  como sendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Por exemplo,  $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ ,  $|+3| = +3$ ,  $|-4| = 4$ ,  $|0| = 0$ ,  $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$  (pois  $1 - \sqrt{2} < 0$ ).

Para apresentar o conceito de limites laterais, consideraremos a função

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|}$$

cujo campo de definição (domínio) é o conjunto  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

Se  $x > 0$ ,  $|x| = x$  e portanto  $f(x) = x + 1$ . Se  $x < 0$ ,  $|x| = -x$  e portanto  $f(x) = x - 1$ . O gráfico de  $f$  é esboçado na figura 5.1.

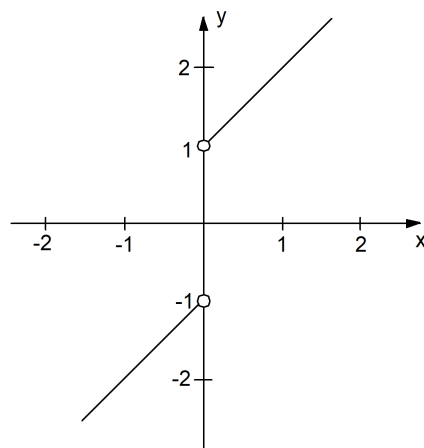


Figura 5.1. Esboço do gráfico de  $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$ .

Se  $x$  tende a 0, mantendo-se  $> 0$ ,  $f(x)$  tende a 1. Se tende a 0, mantendo-se  $< 0$ ,  $f(x)$  tende a  $-1$ .

Dizemos então que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a 0 pela direita, é igual a 1, e denotamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Dizemos também que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a 0 pela esquerda, é igual a  $-1$ , e denotamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

De um modo geral, sendo  $f(x)$  uma função, se  $x_0$  está no interior ou é extremo inferior de um intervalo contido em  $D(f)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ significa } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

Se  $x_0$  está no interior ou é extremo superior de um intervalo contido em  $D(f)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ significa } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

### Exemplo 5.1

Consideremos agora a função  $f(x) = 1/x$ . Conforme já observado no exemplo 4.7, aula 4 (reveja-o), esta função não tem limite quando  $x \rightarrow 0$ .

Temos  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = ] - \infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$ . Assim, 0 é extremo superior do intervalo  $] - \infty, 0[ \subset D(f)$ , e também é extremo inferior do intervalo  $] 0, +\infty[ \subset D(f)$ .

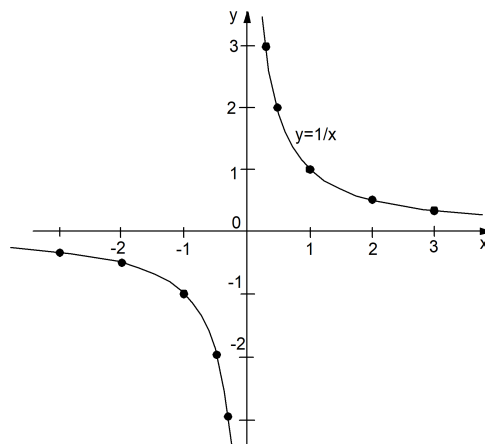


Figura 5.2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

No esboço do gráfico de  $f$ , figura 5.2, ilustramos a ocorrência dos limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

(Também ilustramos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ .)

Neste caso, é conveniente denotar, introduzindo novos símbolos em nossa álgebra de limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

**Observação 5.1** Em geral, dizemos que

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$  se

(i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , e

(ii)  $f(x)$  mantém-se  $> 0$  quando  $x \rightarrow x_0$ , ou seja,  $f(x) > 0$  para todo  $x$  suficientemente próximo de  $x_0$ .

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^-$  se

(i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , e

(ii)  $f(x)$  mantém-se  $< 0$  quando  $x \rightarrow x_0$ , ou seja,  $f(x) < 0$  para todo  $x$  suficientemente próximo de  $x_0$ .

Escrevemos ainda  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0^+$  para indicar que

(i)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0$ , e (ii)  $f(x) > 0$  quando  $x \rightarrow x_0$  e  $x > x_0$ .

Analogamente, podemos também conceituar os casos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 0^-, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 0^+.$$

Nossa álgebra de limites passa a contar agora com os seguintes novos resultados:

$$\frac{c}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \quad \frac{c}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Também é fácil intuir que

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \quad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \quad \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

**Exemplo 5.2**

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0^+, \text{ portanto } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - 3}{x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x - 3} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$$

**Exemplo 5.3** Calcular  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{|x+2|}$  e  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{|x+2|}$

*Solução.* Observe que  $x+2 > 0$  se e somente se  $x > -2$ .

Assim sendo, se  $x > -2$ , temos  $x+2 > 0$  e então  $|x+2| = x+2$ .

Por outro lado, se  $x < -2$ , temos  $x+2 < 0$  e então  $|x+2| = -(x+2)$ .

Assim sendo, temos

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x+2}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} -1 = -1$$

**Observação 5.2** A afirmação

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

é equivalente à afirmação, simultânea, de que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$$

Se no entanto  $f(x)$  é definida para  $x > x_0$ , mas não é definida para  $x < x_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{significa} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

Por exemplo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ , muito embora  $\sqrt{x}$  não esteja definida para  $x < 0$ . Neste caso, afirmar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  significa que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ , já que não se define o limite  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$

**Observação 5.3** (O gráfico de uma função contínua em  $[a, b]$ )

No exemplo ao início da aula, vimos que a função  $f(x) = x + x/|x|$  tem limites laterais diferentes no ponto  $x_0 = 0$ , sendo  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ . Assim, conforme podemos visualizar na figura 5.1, o gráfico de  $f$  apresenta um salto no ponto 0.

Também a função  $f(x) = 1/x$  tem um salto no ponto 0. Agora porém o salto é infinito, sendo  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ .

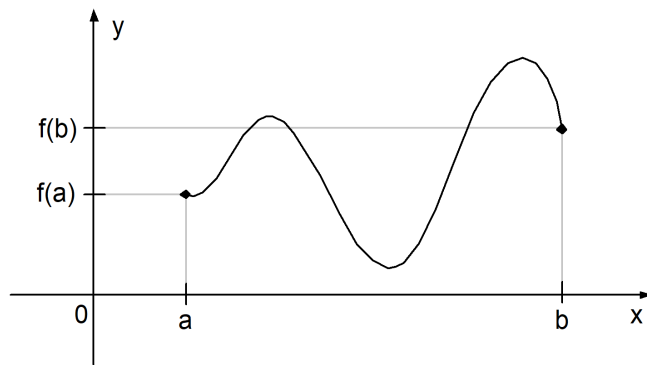


Figura 5.3.  $f$  é contínua e diferenciável no intervalo  $[a, b]$ .

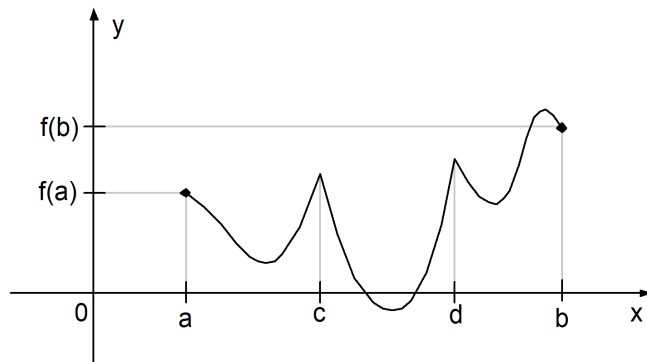


Figura 5.4.  $f$  é contínua no intervalo  $[a, b]$ , mas não tem derivadas nos pontos  $c$  e  $d$ .

Na aula 4, estivemos observando que a função  $f(x) = 1/x^2$  tem limite infinito no ponto 0:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ . Aqui, nas proximidades de 0, o gráfico “salta” para cima dos dois lados, apresentando uma quebra na curva do gráfico.

Quando uma função  $f(x)$  é contínua nos pontos de um intervalo  $[a, b]$ , a curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , gráfico de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ , não apresenta quebras ou saltos.

Intuitivamente falando, podemos desenhar o gráfico ligando o ponto inicial  $A = (a, f(a))$  ao ponto final  $B = (b, f(b))$  sem tirarmos o lápis do papel, tal como na figura 5.3.

**Observação 5.4 (Uma função contínua pode não ter derivada sempre)** Já na figura 5.4 temos uma ilustração de uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  que, no entanto, não tem derivada em dois pontos desse intervalo. Note que nos pontos correspondentes a  $c$  e  $d$  não é possível traçar retas tangentes ao gráfico de  $f$ .

**Observação 5.5 (Continuidade significa  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ )** Na observação 2.1, aula 2, vimos que, sendo  $x_0 \in D(f)$ , se existe  $f'(x_0)$  então  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ . Na verdade, não é necessário termos  $f$  diferenciável  $x_0$  para que tenhamos  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ .

A condição necessária e suficiente para que tenhamos  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$  é que  $f$  seja contínua no ponto  $x_0$ .

Vejam:  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

Fazendo  $x = x_0 + \Delta x$ , temos  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ . Temos que  $\Delta x \rightarrow 0$  se e somente se  $x \rightarrow x_0$ .

Se  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ , logo  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)] = 0 + f(x_0) = f(x_0)$ . Assim,  $f$  é contínua em  $x_0$ .

Se  $f$  é contínua em  $x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Logo,  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ , e então  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ .

Assim,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Quando existe  $f'(x_0)$ , temos  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$  e então  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , ou seja

Se  $f$  tem derivada em  $x_0$  então  $f$  é contínua em  $x_0$ .

No entanto, podemos ter  $f$  contínua em  $x_0$ , sem ter derivada em  $x_0$ . Veja problemas 5 e 6 abaixo.

## 5.1 Problemas

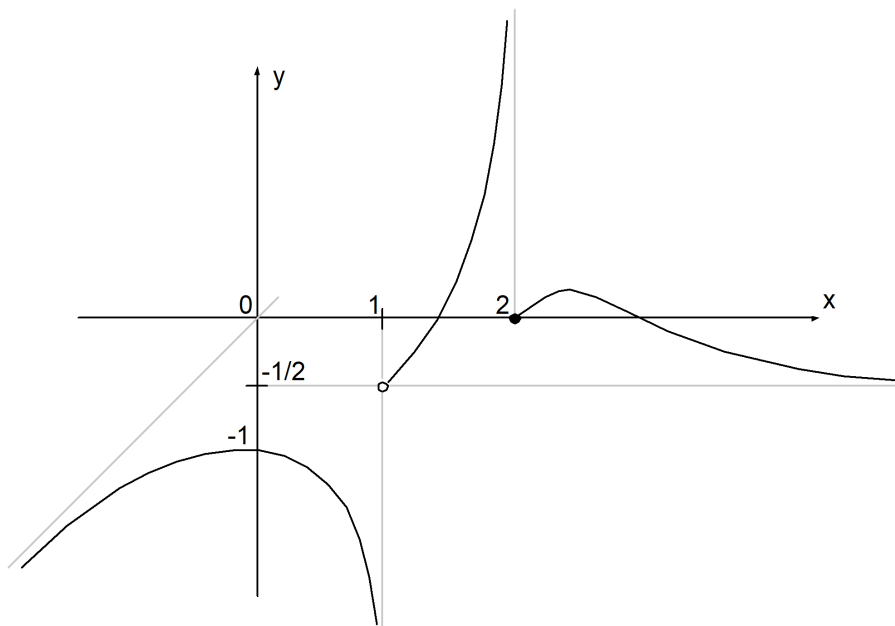


Figura 5.5.

1. Na figura 5.5 está esboçado o gráfico de uma função  $y = f(x)$ . Complete as igualdades:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \\ \text{(g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = & \end{array}$$

2. Em que pontos a função  $f$  do problema anterior é definida? Em quais pontos é contínua?
3. Calcule os limites laterais

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\pi - x|}{x - \pi} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{|\pi - x|}{x - \pi} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{1}{x - 8} \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{1}{x - 8} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{2 - x} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x - 2} \end{array}$$

4. Calcule os limites  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$  e diga se existe o limite  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ . Diga também se  $f$  é contínua no ponto  $-3$ .

$$\text{(a)} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2 - 3x} & \text{se } x < -3 \\ \sqrt[3]{x + 2} & \text{se } x \geq -3 \end{cases} \quad \text{(b)} f(x) = \begin{cases} \frac{9}{x^2} & \text{se } x \leq -3 \\ \sqrt[3]{4 + x} & \text{se } x > -3 \end{cases}$$

5. Verifique que a função  $f(x) = |x|$  é contínua em  $x_0 = 0$ , mas não existe  $f'(0)$  (mostre que não existe o limite  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ ). Mostre que existem os limites laterais  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$  e  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ , chamados respectivamente de *derivada direita de  $f$  no ponto 0* ( $f'(0^+)$ ) e *derivada esquerda de  $f$  no ponto 0* ( $f'(0^-)$ ). Esboce o gráfico de  $f$  e interprete geometricamente os fatos deduzidos acima.

6. Verifique que a função  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  é contínua em  $x_0 = 0$ , mas  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = +\infty$ . Neste caso, por abuso de linguagem, dizemos que  $f'(0) = +\infty$ . Esboce o gráfico de  $f$ , traçando-o cuidadosamente através dos pontos de abscissas  $0, \pm 1/8, \pm 1, \pm 8$ , e interprete geometricamente o fato de que  $f'(0) = +\infty$ .

### 5.1.1 Respostas e sugestões

1. (a)  $-\infty$  (b)  $-1/2$  (c)  $+\infty$  (d)  $0$  (e)  $-1$  (f)  $-1$  (g)  $-1/2$  (h)  $-\infty$
2. A função  $f$  é definida em  $\mathbb{R} - \{1\}$ . É contínua em  $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ .
3. (a)  $-1$  (b)  $1$  (c)  $-\infty$  (d)  $+\infty$  (e)  $+\infty$  (f)  $0$

4.

(a)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 1/11$ . Não se define (não existe) o limite  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ .  $f(-3) = -1$ , mas como não existe  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ ,  $f$  não é contínua no ponto  $-3$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1$ .  $f$  é contínua no ponto  $-3$  pois  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3)$ .

5. Ao esboçar o gráfico de  $f$ , notamos que  $f(x) = x$ , se  $x \geq 0$ , e  $f(x) = x$ , se  $x \leq 0$ . Assim,  $f'(0^+) = 1$  indica a presença de uma reta tangente ao gráfico de  $f$ , “à direita do ponto  $(0, 0)$ ”, como sendo a reta tangente ao gráfico de  $y = x$ ,  $x \geq 0$ , no ponto  $(0, 0)$  (a reta tangente a uma reta é a própria reta). Analogamente, interpreta-se  $f'(0^-) = -1$ .
6.  $f'(0) = +\infty$  significa que a reta tangente à curva  $y = \sqrt[3]{x}$ , no ponto  $(0, 0)$ , é vertical.