

# Aula 8

## Máximos e mínimos

Nesta aula estaremos explorando procedimentos estratégicos para determinar os *valores extremos* de uma função  $f$ , ou seja, o *valor máximo* e o *valor mínimo* de uma função  $f$ , em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , sem recorrer a um esboço do gráfico de  $f$  nesse intervalo.

Um teorema da Análise Matemática, conhecido na literatura como *Teorema de Weierstrass*, nos garante:

**(Teorema de Weierstrass)** *Se uma função  $f$  é contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  (sendo  $a$  e  $b$  números reais), então existem pontos  $x_0$  e  $x_1$  em  $[a, b]$  tais que  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$  são, respectivamente, os valores máximo e mínimo de  $f(x)$ , para  $x$  em  $[a, b]$ .*

Os pontos  $x_0$  e  $x_1$  aos quais se refere o teorema de Weierstrass são chamados *ponto de mínimo de  $f$*  e *ponto de máximo de  $f$* , respectivamente. O teorema é ilustrado na figura 8.1.

Elucidando os conceitos aqui apresentados, sendo  $I \subset D(f)$  um intervalo (limitado ou ilimitado), dizemos que

1.  $f(x_0)$  é o valor mínimo de  $f$  (ou de  $f(x)$ ) em  $I$  se

$$f(x_0) \leq f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

2.  $f(x_1)$  é o valor máximo de  $f$  (ou de  $f(x)$ ) em  $I$  se

$$f(x_1) \geq f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

Por exemplo, no intervalo  $I = [-1, +\infty[$ , a função dada por  $f(x) = x^2$  tem um ponto de mínimo  $x_0 = 0$ , sendo  $f(0) = 0$  seu valor mínimo, pois  $x^2 \geq 0$  para todo  $x \in I$ . Nesse intervalo,  $f$  não tem valor máximo pois  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

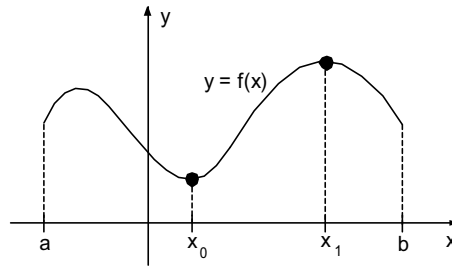


Figura 8.1. A função  $f$ , contínua em  $[a, b]$ , tem  $x_0$  e  $x_1$  como seus pontos de *mínimo* e de *máximo*, respectivamente.

## 8.1 Estratégias para determinar máximos e mínimos de uma função contínua, em um intervalo

Como determinar os pontos de um intervalo fechado  $[a, b]$ , onde uma função contínua  $f$  atinge seus valores máximo e mínimo? Uma solução deste problema seria esboçar o gráfico de  $f$  nesse intervalo, conforme as estratégias desenvolvidas nas aulas 6 e 7, e então localizar os valores extremos de  $f$ . Mas como determinar os valores máximo e mínimo de  $f$ , no intervalo  $[a, b]$ , sem recorrer ao estudo do esboço de seu gráfico? É isto que trataremos de responder.

Recapitulando um conceito introduzido na aula 6, diremos que  $x_0$  é um *ponto de mínimo local* de  $f$  se existe um intervalo aberto  $I \subset D(f)$ , com  $x_0 \in I$ , tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I$$

E neste caso,  $f(x_0)$  é um *valor mínimo local* de  $f$ .

Analogamente, diremos que  $x_1$  é um *ponto de máximo local* de  $f$ , e que  $f(x_1)$  é um *valor máximo local* de  $f$ , se existe um intervalo aberto  $I \subset D(f)$ , com  $x_1 \in I$ , tal que

$$f(x_1) \geq f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I$$

**Teorema 8.1** Se  $f$  tem derivada em um intervalo aberto  $I$ , e se  $x_0 \in I$  é ponto de mínimo local de  $f$ , então  $f'(x_0) = 0$ . Se  $x_1 \in I$  é ponto de máximo local de  $f$ , então  $f'(x_1) = 0$ .

*Demonstração.* Mostraremos que  $f'(x_0) = 0$ , usando a definição de derivada.

Tome  $\Delta x \neq 0$ , com  $x_0 + \Delta x \in I$ .

Então  $f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$  e daí  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$ .

Se  $\Delta x > 0$ , temos  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$ , e se  $\Delta x < 0$ , temos  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$ .

Temos  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ .

Neste caso,  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ .

Mas  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$  e  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$ .

Logo,  $f'(x_0) \geq 0$  e  $f'(x_0) \leq 0$ , e portanto  $f'(x_0) = 0$ .

Deixamos ao leitor a dedução do resultado para pontos de máximo locais. ■

Observemos que se  $x_0$  é um ponto de mínimo (absoluto) de  $f$ , então  $x_0$  tem uma das seguintes características:

- (i)  $x_0$  é também um ponto de mínimo local de  $f$ , e  $f$  tem derivada em  $x_0$ . Neste caso, conforme o teorema 8.1,  $f'(x_0) = 0$ .
- (ii)  $x_0$  é um ponto de mínimo local de  $f$ , mas  $f$  não tem derivada no ponto  $x_0$ .
- (iii)  $x_0$  é um dos extremos do intervalo  $[a, b]$ , ou seja,  $x_0 = a$  ou  $x_0 = b$ .

Os casos (i), (ii) e (iii) são ilustrados na figura 8.2.

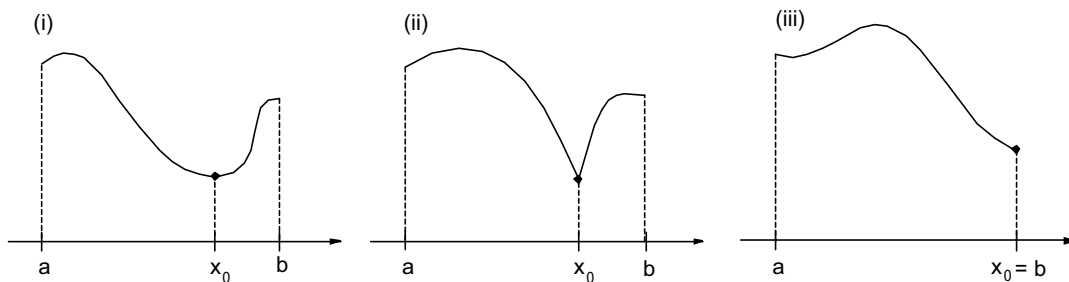


Figura 8.2. Pontos de mínimo típicos.

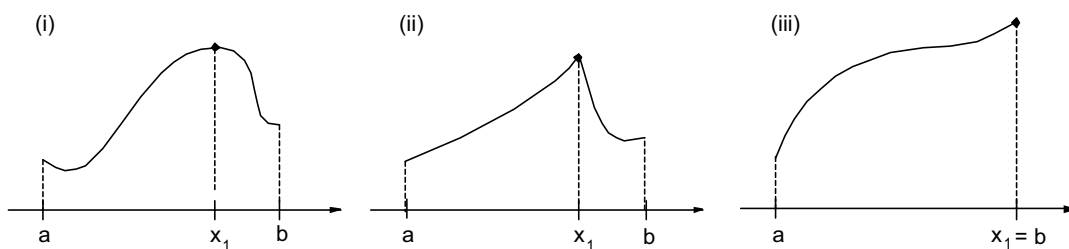


Figura 8.3. Pontos de máximo típicos.

Analogamente, se  $x_1$  é um ponto de máximo de  $f$ , então  $x_1$  tem uma das três seguintes características:

- (i)  $x_1$  é também um ponto de máximo local de  $f$ , e  $f$  tem derivada em  $x_1$ . Neste caso, conforme o teorema 8.1,  $f'(x_1) = 0$ .
- (ii)  $x_1$  é um ponto de máximo local de  $f$ , mas  $f$  não tem derivada no ponto  $x_1$ .
- (iii)  $x_1$  é um dos extremos do intervalo  $[a, b]$ , ou seja,  $x_1 = a$  ou  $x_1 = b$ .

Esses casos são ilustrados na figura 8.3.

Um número real  $x$  é chamado um *ponto crítico de  $f$*  quando  $f'(x) = 0$  ou quando  $f$  é contínua em  $x$  mas não existe  $f'(x)$ .

Assim, um ponto de máximo ou de mínimo de uma função  $f$ , em um intervalo  $[a, b]$ , é um ponto crítico de  $f$  ou uma das extremidades do intervalo.

**Exemplo 8.1** Determinar os valores máximo e mínimo de  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ , no intervalo  $[-3, 3]$ .

*Solução.* A função  $f$  é contínua no intervalo  $[-3, 3]$ . Temos  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$ . As soluções de  $f'(x) = 0$  são  $x_1 = -2$  e  $x_2 = 1$ . Estes são os pontos críticos de  $f$  no intervalo  $[-3, 3]$ . Calculando os valores de  $f$  nos extremos do intervalo e nos pontos críticos, temos:

$$f(x_1) = f(-2) = 20, f(x_2) = f(1) = -7, f(-3) = 9 \text{ e } f(3) = 45.$$

Assim sendo, por comparação dos valores obtidos, o ponto de mínimo de  $f$ , para  $-3 \leq x \leq 3$ , é  $x_{\min} = x_2 = 1$ , sendo  $f(1) = -7$  o valor mínimo de  $f$  nesse intervalo. Já o ponto de máximo de  $f$ , para  $-3 \leq x \leq 3$ , é  $x_{\max} = 3$ , sendo  $f(3) = 45$  o valor máximo de  $f$  nesse intervalo. Como ilustração, temos um esboço do gráfico de  $f$ , no intervalo  $[-3, 3]$ , na figura 8.4.

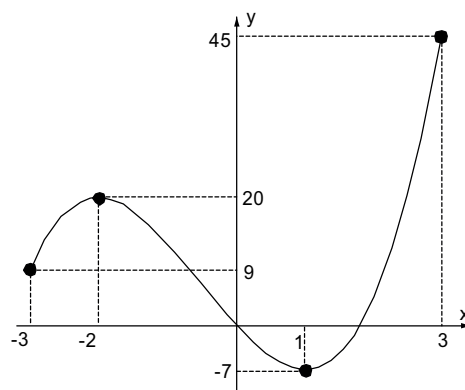


Figura 8.4.

**Exemplo 8.2** Determinar os valores máximo e mínimo de  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot (x - 2)^2$ , no intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ .

*Solução.* A função  $f$  é contínua no intervalo  $[-1, 1]$ .  $f'(x) = \frac{4(2x^2 - 5x + 2)}{3\sqrt[3]{x}}$ .

Temos  $f'(x) = 0$  se e somente se  $x = 2$  ou  $x = 1/2$ .

Agora, 0 também é um ponto crítico de  $f$ , uma vez que  $f$  é contínua no ponto 0, mas não se define  $f'(0)$ .

Assim, Como  $2 \notin [-1, 1]$ , os pontos críticos de  $f$  são  $x_1 = 1/2$  e  $x_2 = 0$ .

Calculando os valores de  $f$  nos extremos do intervalo e nos pontos críticos, temos:

$$f(x_1) = f(1/2) = \frac{9}{4\sqrt[3]{4}} \approx 1,4 \quad (\sqrt[3]{4} \approx 1,6), \quad f(0) = 0, \quad f(-1) = 9 \text{ e } f(1) = 1.$$

Portanto,  $f(0) = 0$  é o valor mínimo de  $f$ , enquanto que  $f(-1) = 9$  é seu valor máximo.

**Questão** Como determinar os pontos de um intervalo  $I \subset D(f)$ , nos quais  $f$  atinge seus valores máximo e mínimo, se  $I$  é um intervalo aberto ou ilimitado, e  $f$  é contínua em  $I$ ?

Neste caso, a resposta é:

*Sendo  $f$  contínua em um intervalo  $I$ , comparamos os valores de  $f$  nos extremos que efetivamente pertencem ao intervalo com os valores de  $f$  nos seus pontos críticos desse intervalo. Comparamos ainda esses valores com os limites de  $f(x)$  quando  $x$  tende a extremos que não pertencem ao intervalo.*

Como reforço estratégico na pesquisa de máximos e mínimos locais, temos também o seguinte teorema.

**Teorema 8.2** Sendo  $f$  uma função contínua, com  $f'$  também contínua, em um intervalo aberto  $I$ , e  $x_0$  um ponto de  $I$ ,

1. se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$ , então  $x_0$  é um ponto de mínimo local de  $f$ ;
2. se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) < 0$ , então  $x_0$  é um ponto de máximo local de  $f$ ;

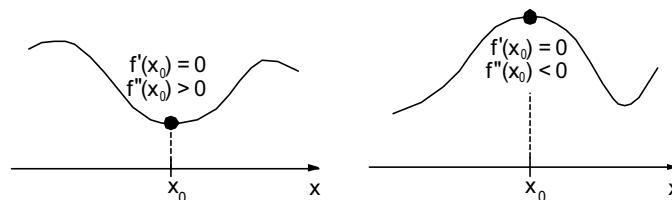


Figura 8.5.

Não faremos a demonstração do teorema 8.2 aqui, mas faremos a seguinte observação geométrica, que o torna intuitivamente óbvio.

Se  $f'(x_0) = 0$ , a reta tangente ao gráfico de  $f$ , em  $P = (x_0, f(x_0))$ , é horizontal.

Se, além disso,  $f''(x_0) > 0$ , temos a concavidade do gráfico de  $f$ , em  $P$ , voltada para cima, e assim  $x_0$  é um ponto de mínimo local de  $f$ . Se  $f''(x_0) < 0$ , a concavidade do gráfico de  $f$ , em  $P$ , é voltada para baixo, e  $x_0$  é então um ponto de máximo local de  $f$ . Estas duas possibilidades são ilustradas na figura 8.5.

**Exemplo 8.3** Determinar os valores máximo e mínimo de  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , para  $x > 0$ .

*Solução.* Estamos procurando os valores máximo e mínimo de  $f$  no intervalo  $]0, +\infty[$ . Temos  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ , e portanto  $f'(x) = 0$  (com  $x > 0$ ) se e somente se  $x = 1$ .

Agora,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Portanto,  $f$  não tem valor máximo em  $]0, +\infty[$ .

Temos ainda  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$  e  $f''(1) > 0$ . Assim,  $x_1 = 1$  é ponto de mínimo local de  $f$ . Como  $f$  não tem outros pontos críticos, 1 é o ponto de mínimo global de  $f$ , sendo  $f(1) = 2$  o valor mínimo de  $f$  no intervalo  $]0, +\infty[$ .

## 8.2 Aplicações a problemas de otimização

**Exemplo 8.4** Qual é a maior área retangular que pode ser cercada com 200 m de tela de arame?

*Solução.*

(Passo 1) *Analisamos o problema, e desenhamos um diagrama incluindo toda a informação. Introduzimos variáveis.*

Fazemos isto na figura 8.6

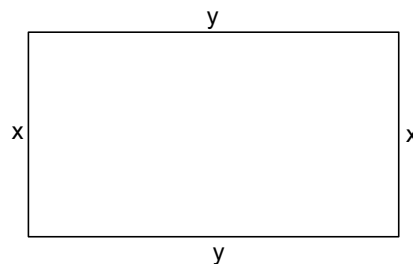


Figura 8.6. O perímetro do retângulo é  $2x + 2y$ .

(Passo 2) *Expressamos a quantidade a ser maximizada como uma função de uma variável. Determinamos o domínio dessa função a partir das condições do problema.*

A área do retângulo deve ser maximizada, sob a condição de que o perímetro é 200 m.

Essa área é dada por  $A = xy$ . Como  $y = 100 - x$ , temos

$$A = A(x) = x(100 - x)$$

e, nas condições do problema, temos  $0 \leq x \leq 100$ .

(Passo 3) *Determinamos o ponto de máximo e o valor máximo da função, no intervalo em que ela está definida.*

Usando os procedimentos discutidos anteriormente, sendo  $A(x) = 100x - x^2$ , temos  $A'(x) = 100 - 2x$ .

$A'(x) = 0$  se e somente se  $x = 50$ . Temos  $A(50) = 50 \cdot (100 - 50) = 50^2 = 2500$ . Temos ainda  $A(0) = A(100) = 0$  (valor mínimo da área).

Assim, o valor máximo de  $A(x)$  é atingido quando  $x = 50$  m. Assim, o retângulo de perímetro 200 m, com área máxima, é um quadrado de 50 m de lado.

**Exemplo 8.5** *Uma grande caixa deve ser construída cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos de uma folha retangular de zinco, de 3 m por 8 m, dobrando-se os quatro lados (abas laterais) para cima e soldando-se as arestas verticais que ficaram justapostas. Encontre o maior volume possível para esta caixa.*

*Solução.*

(1) Um diagrama contendo todas as informações do problema, bem como a introdução de uma variável, é mostrado na figura 8.7

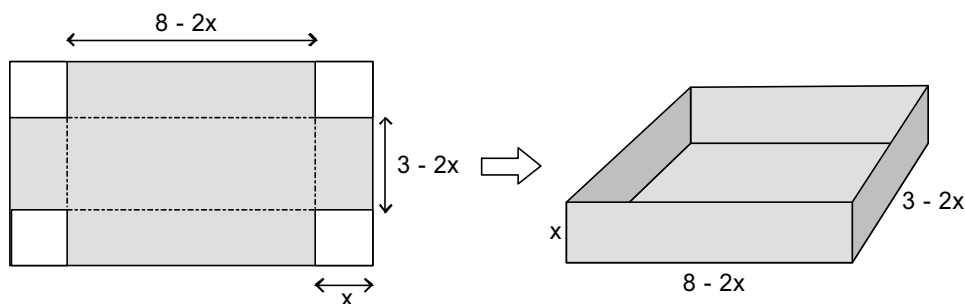


Figura 8.7.

(2) O volume da caixa da figura 8.7 é dado por

$$V = V(x) = x(8 - 2x)(3 - 2x), \text{ para } 0 \leq x \leq 3/2$$

(3)  $V'(x) = 0$  se e somente se  $x = 2/3$  ou  $x = 3$  (esta última solução está descartada, pois  $3 \notin D(V)$ ).

O único ponto crítico de  $V$  é  $2/3$ . Nas extremidades do domínio temos  $V = 0$ . Como  $V \geq 0$ , o ponto crítico só pode ser máximo local, e portanto máximo absoluto.

Assim,  $x = 2/3$  é ponto de máximo de  $V$ , e as dimensões da caixa de volume máximo são  $20/3$ ,  $5/3$  e  $2/3$  m, tendo ela volume  $200/27$  m<sup>3</sup>.

**Exemplo 8.6** *Deseja-se construir uma lata cilíndrica totalmente fechada, de volume  $v$ , gastando-se, em sua confecção, a menor quantidade de material possível. Determine a razão entre a altura e o diâmetro dessa lata.*

*Solução.*

(1) Diagramas contendo todas as informações do problema, bem como a introdução de uma variável, estão na figura 8.8

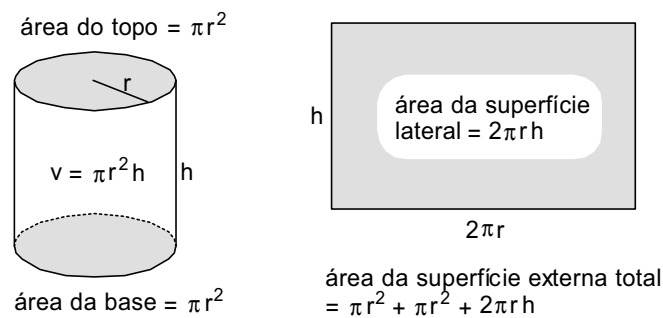


Figura 8.8.

(2) A superfície externa total da lata cilíndrica, ilustrada na figura 8.8, é dada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Como  $\pi r^2 h = v$ , temos  $h = \frac{v}{\pi r^2}$ , e então

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2v}{r}$$

sendo  $S(r)$  definida somente para  $r > 0$ .

$$(3) S'(r) = 4\pi r - \frac{2v}{r^2}.$$

$S' = 0$  se e somente se  $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ , e este é o único ponto crítico de  $S$  no intervalo  $r > 0$ .

Temos também que  $\lim_{r \rightarrow 0} S(r) = +\infty$  e  $\lim_{r \rightarrow +\infty} S(r) = +\infty$ . Assim,  $S(r)$  não tem valor máximo, e seu único ponto crítico só pode ser ponto de mínimo local. Isto é confirmado observando-se que  $S''(r) = 4\pi + \frac{4v}{r^3} > 0$  para todo  $r > 0$ . Portanto, o



gráfico de  $S = S(r)$  tem convexidade voltada para cima, o que confirma  $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$  como seu ponto de mínimo local, e também ponto de mínimo absoluto da função  $S$ .

Sendo  $r = \sqrt[3]{v/(2\pi)}$ , temos

$$\frac{h}{r} = \frac{v}{\pi r^3} = \frac{v}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}\right)^3} = \frac{v}{\pi \left(\frac{v}{2\pi}\right)} = 2$$

Portanto,  $h = 2r$ , ou seja, a altura da lata deve ser igual ao diâmetro da base se quisermos minimizarmos o material a ser gasto em sua confecção.

*Este é o padrão, ao menos aproximado, de algumas latas de conservas, tais como latas de creme de leite e de leite condensado. Por questões de praticidade, muitas latas fogem deste padrão, como por exemplo as latas de óleo comestível.*

### 8.3 Problemas

Encontre os pontos de máximo e de mínimo, bem como os valores máximo e mínimo, das funções dadas, nos intervalos indicados.

1.  $f(x) = \sqrt[3]{x}(x+4)$ ,  $x \in [-4, 2]$

*Resposta.*  $x_{\min} = -1$ ,  $x_{\max} = 2$ ,  $f(-1) = -3$ ,  $f(2) = 6\sqrt[3]{2} \approx 7,6$ .

2.  $f(x) = x^2 + 2x - 4$ ,  $x \in [-2, 2]$ .

*Resposta.*  $x_{\min} = -1$ ,  $x_{\max} = 2$ ,  $f(-1) = -5$ ,  $f(2) = 4$ .

3.  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

*Resposta.*  $x_{\min} = -1$ ,  $x_{\max} = 1$ ,  $f(-1) = -1/2$ ,  $f(1) = 1/2$ .

4.  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ ,  $x \neq \pm 1$ .

*Resposta.*  $f$  não tem máximo, nem mínimo.

Resolva os seguintes problemas de otimização.

- Um recipiente de lata, de forma cilíndrica e aberto no topo, deve ter capacidade de  $v$  litros. Determine a razão entre a altura  $h$  e o diâmetro  $d$  da base de modo que a quantidade de lata usada na sua fabricação seja a menor possível.

*Resposta.*  $h = d/2$ .

2. Um estudante quer construir um viveiro retângular para seu hamster, usando a parede de um cômodo como um dos lados e cercando os demais três lados com 3 metros de tela disponíveis, obtendo a maior área retangular possível. Quais devem ser as dimensões de seu viveiro?

*Resposta.* O viveiro deve ter 1,5 m na frente e 0,75 m nos lados.

3. Determinar as dimensões de um cilindro, de volume máximo, inscrito em uma esfera de raio  $R$ .

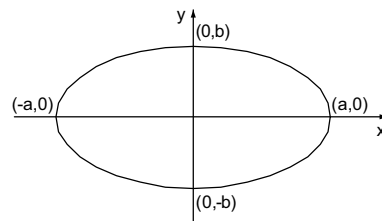
*Sugestão.* Faça um desenho visualizando o cilindro de perfil dentro da esfera. No desenho, você terá um retângulo dentro de um círculo. Demarque a altura  $h$  do cilindro, e diâmetro da sua base,  $2r$ . Demarque também o raio  $R$  da esfera. Use o teorema de Pitágoras obter relações entre  $h$  e  $r$ . O volume do cilindro é dado por  $V = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}) = \pi r^2 \cdot h$ .

*Resposta.*  $r =$  raio da base  $= \sqrt{\frac{2}{3}}R$ .  $h =$  altura do cilindro  $= \sqrt{2}r$ .

4. Determinar as dimensões de um cilindro, inscrito em uma esfera de raio  $R$ , cuja área da superfície externa total é a máxima possível.

*Resposta.*  $r =$  raio da base  $= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}R$ ,  $h = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}R$ .

5. Na elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , inscreva um retângulo, de área máxima, com dois de seus lados paralelos ao eixo  $x$  (e os outros dois paralelos ao eixo  $y$ ). *Sugestão.* Os quatro vértices do retângulo, todos pertencentes à elipse, serão pontos  $(x, y)$ ,  $(-x, y)$ ,  $(x, -y)$  e  $(-x, -y)$ .



*Resposta.* O retângulo tem dimensões  $\sqrt{2}a$  e  $\sqrt{2}b$ .

6. Quer-se construir um tanque de aço para armazenar gás propano, com a forma de um cilindro circular reto, com um hemisfério (semi-esfera) em cada extremidade. Se a capacidade desejada para o tanque é 100 decímetros cúbicos (litros), quais as dimensões que exigem a menor quantidade de aço? (Despreze a espessura das paredes do tanque).

*Resposta.* O tanque deve ser esférico, de raio  $\sqrt[3]{75/\pi} \approx 2,88$  metros.

7. Qual ponto da parábola  $y = x^2 + 1$  está mais próximo do ponto  $A = (3, 1)$ ?

*Sugestão.* A distância de um ponto qualquer  $P = (x, y)$  ao ponto  $A$  é dada por  $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$ . Se  $P$  é um ponto da parábola, temos  $y = x^2 + 1$ , e então  $d = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ . Como  $d \geq 0$ , temos que  $d$  terá seu valor mínimo quando  $d^2$  assumir seu valor mínimo. Assim, basta procurarmos o valor mínimo de  $f(x) = (x-3)^2 + x^4$ . *Resposta.*  $(1, 2)$ .

8. Um veterinário tem 100 m de tela de arame. Com isto deseja construir seis canis, primeiro cercando uma região retangular e depois subdividindo essa região em seis

retângulos menores, através de cinco cercas divisórias internas, paralelas a um dos lados. Que dimensões externas, dessa região retangular, maximizam sua área total, se o veterinário gasta os 100 m de tela nessa construção?

*Resposta.* 25 m por  $50/7 \approx 7,14$  m.

9. Ao procurar o ponto da hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$  mais próximo da origem, Joãozinho raciocinou da seguinte maneira.

*Temos que procurar, dentre os pontos da hipérbole, aquele para o qual  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$  tem valor mínimo. Como  $d \geq 0$ ,  $d$  será mínimo quando  $d^2$  for mínimo. Agora, sendo  $P = (x, y)$  um ponto da hipérbole, temos  $y^2 = x^2 - 1$ , logo  $d^2 = x^2 + y^2 = 2x^2 - 1$ .*

*Procurando o valor mínimo de  $d^2 = f(x) = 2x^2 - 1$ , calculamos  $f'(x) = 4x$ . Temos  $f'(x) = 0$  se e somente se  $x = 0$ . Para  $x = 0$  porém, temos  $y^2 = 0^2 - 1 = -1$ , uma impossibilidade. Logo, não há nenhum ponto da hipérbole cuja distância à origem seja mínima.*

Explique o erro no raciocínio de Joãozinho, já que um esboço da hipérbole (faça-o) revela que os pontos  $(\pm 1, 0)$  são seus pontos mais próximos da origem. *Sugestão.* Para quais valores de  $x$  define-se  $d$ ?

