Aula 13

Limites indeterminados e as regras de L'Hopital

Nesta aula, estaremos apresentando as *regras de L'Hopital*, regras para calcular limites indeterminados, da forma $0/0$ ou ∞/∞, usando derivadas. Estaremos também examinando gráficos de funções envolvendo funções exponenciais.

Diremos que o limite $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ *tem a forma indeterminada* $0/0$, se o quociente de funções reais $f(x)/g(x)$ está definido em um conjunto da forma $I - \{a\}$ (sendo I um intervalo, e a uma extremidade ou ponto interior de I), $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas e deriváveis para $x \neq a$, e $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Diremos que o limite $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ *tem a forma indeterminada* ∞/∞, se o quociente de funções reais $f(x)/g(x)$ está definido em um conjunto da forma $I - \{a\}$ (sendo I um intervalo, e a uma extremidade ou ponto interior de I), $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas e deriváveis para $x \neq a$, e $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

Os mesmos conceitos são definidos analogamente se tivermos $x \to a^+$ ou $x \to a^-$, ou ainda se $a = \pm\infty$.

São duas as chamadas regras de L'Hopital. Uma para formas indeteminadas $0/0$ e outra para formas indeterminadas ∞/∞. Ambas podem ser enunciadas conjuntamente em um único teorema (que não demonstraremos).

Teorema 13.1 (Regras de L'Hopital) *Se* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ *tem uma forma indeterminada* $0/0$ *ou* ∞/∞, *então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

caso o limite $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ *exista (sendo finito ou infinito). O mesmo vale se* a *é substituído por* a^+ *ou* a^-, *ou se* $a = +\infty$ *ou* $-\infty$.

Exemplo 13.1 *Calcular* $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2}$

Solução. Um cálculo direto nos dá a forma indeterminada $0/0$. Pelo método tradicional, usando fatorações, fazemos

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(3x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{3x+1} = 3/7$$

Aplicando regras de L'Hopital, não necessitamos da fatoração:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - x - 2)'}{(3x^2 - 5x - 2)'} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{6x-5} = 3/7$$

No caso de quociente de polinômios, não precisamos das regras de L'Hopital, mas às vezes as regras de L'Hopital são nosso único recurso para o cálculo de um limite:

Exemplo 13.2 *Calcular* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

O limite é indeterminado, da forma $0/0$, a agora não podemos colocar em evidência nenhuma potência de x. Aplicando L'Hopital, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x^3)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} && \text{(= 0/0, aplicamos novamente L'Hopital)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = 1/6 && \left(\text{usando } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\right)
\end{aligned}$$

Exemplo 13.3 *Calcular* $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$

Aqui temos uma indeterminação da forma ∞/∞. Aplicando L'Hopital, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^{2x})'}{(x^3)'} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{2x}}{3x^2} && (= \infty/\infty, \text{ aplicamos novamente L'Hopital}) \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{(2e^{2x})'}{(3x^2)'} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{4e^{2x}}{6x} && (= \infty/\infty, \text{ aplicamos novamente L'Hopital}) \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{8e^{2x}}{6} = \frac{+\infty}{6} = +\infty
\end{aligned}$$

No cálculo de limites, sabemos que também $0 \cdot \infty$ e $(+\infty) - (+\infty)$ são símbolos de indeterminação. No caso $0 \cdot \infty$ também podemos aplicar regras de L'Hopital, após uma manipulação conveniente das funções no limite.

Suponhamos que $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$ é indeterminado na forma $0 \cdot \infty$, isto é, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$.

Neste caso, primeiramente fazemos

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = 0/0$$

e então, aplicando L'Hopital, calculamos

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{(1/g(x))'}$$

ou então

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \infty / \pm \infty$$

e então, por L'Hopital, calculamos

$$\lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{(1/f(x))'}$$

Exemplo 13.4 *Calcular* $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x$.

Temos $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0 \cdot (-\infty)$. Recorde-se que $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (veja aula 9).

Neste caso, fazemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad (= -\infty / + \infty) \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

13.1 Novos símbolos de indeterminação

Estudaremos agora procedimentos para lidar com os símbolos de indeterminação 0^0, ∞^0 e 1^∞.

Em toda a literatura de matemática universitária, adota-se, ainda que sub-liminarmente às vezes, a definição $0^0 = 1$. No cálculo de limites no entanto, 0^0 é um símbolo de indeterminação. O exemplo abaixo explica porquê.

Consideremos a função $f(x) = x^{k/\ln x}$ (k constante), definida para $x > 0$. Vimos na aula 9, que $\lim_{x \to 0^+} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$.

Assim, utilizando *álgebra de limites*, temos $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^{k/\ln 0^+} = 0^{k/-\infty} = 0^0$.

No entanto, $f(x) = x^{k/\ln x} = e^{\ln(x^{k/\ln x})} = e^{\frac{k}{\ln x}\cdot\ln x} = e^k$, ou seja, $f(x)$ é a função constante e^k, e portanto $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^k$.

Também são formas indeterminadas, ou seja, símbolos de indeterminação, as expressões 1^∞ e ∞^0.

Suponhamos que o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ tem uma das formas indeterminadas 0^0, ∞^0 ou 1^∞. Aqui deveremos ter $f(x) > 0$ no domínio da função f^g.

Em qualquer um desses casos, fazemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

e então

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L$$

sendo

$$L = \lim_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]$$

Para as formas indeterminadas 0^0, ∞^0 e 1^∞, o limite $L = \lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]$ terá sempre a forma indeterminada $0\cdot\infty$ (ou $\infty\cdot 0$), e recaímos então em um caso anteriormente estudado.

Exemplo 13.5 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ *(aqui,* $x\to 0$ *significa* $x\to 0^+$*).*

Solução. Aqui temos uma indeterminação 0^0. Seguindo procedimento descrito acima, fazemos

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\cdot\ln x}$$

e então $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^L$, sendo $L = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

Pelo exemplo 13.4, $L = 0$ e portanto $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$

Exemplo 13.6 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x}$.

Aqui temos uma indeterminação 1^∞.

Fazemos $(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x} = e^{\ln(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\operatorname{sen} 2x)}$. Então

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x} = e^L$, sendo

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\operatorname{sen} 2x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{sen} 2x)}{x} \quad (=0/0).$$

Aplicando L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen} 2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{[\ln(1+\operatorname{sen} 2x)]'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\operatorname{sen} 2x} \cdot 2\cos 2x = 2.$$

Portanto $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/x} = e^2$.

As regras de L'Hopital, nos casos de indeterminação $0/0$ e ∞/∞, dizem que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$, mas somente quando este último limite é efetivamente computável.

No exemplo abaixo, temos uma indeterminação ∞/∞ para a qual a regra de L'Hopital não se aplica porque o limite $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ não existe, mas o limite $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ é calculável.

Exemplo 13.7 *Calcular* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x}$.

Solução. Temos $\operatorname{sen} x \geq -1$, daí $x + \operatorname{sen} x \geq x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo $\lim_{x\to+\infty}(x+\operatorname{sen} x) \geq \lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$. Assim sendo, $\lim_{x\to+\infty}(x+\operatorname{sen} x) = +\infty$, e o limite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x}$ é indeterminado na forma ∞/∞.

Aplicando L'Hopital, consideramos $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(x+\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}(1+\cos x)$. Este limite não existe (não é finito nem infinito) pois quando x cresce indefinidamente, $\cos x$ fica oscilando indefinidamente entre -1 e $+1$.

Entretanto $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$, pois, sendo $x > 0$, como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Como $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, temos $0 \leq \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 0$, e portanto $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

Assim, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1 + 0 = 1$

13.2 Novos casos de gráficos envolvendo funções exponenciais. Dois exemplos

Exemplo 13.8 *Esboçar o gráfico de* $f(x) = 2xe^{-x^2}$.

Solução. Temos $D(f) = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, e $f'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1-2x^2)$. Os pontos críticos de f são $\pm\sqrt{2}/2$. Lembremo-nos de que, por derivação em cadeia, $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

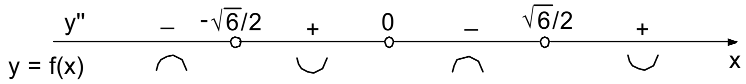
Assim, Temos $f'(x) > 0$ se $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$, e $f'(x) < 0$ se $x > \sqrt{2}/2$ ou se $x < -\sqrt{2}/2$. Portanto f é crescente em $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$, e decrescente em cada um dos intervalos $[\sqrt{2}/2, +\infty[$ e $]-\infty, -\sqrt{2}/2]$.

$x_1 = -\sqrt{2}/2$ é um ponto de mínimo local de f, e $x_2 = \sqrt{2}/2$ é um ponto de máximo local de f. Temos $f(-\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}e^{-1/2}$ e $f(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}e^{-1/2}$. Para o esboço do gráfico, usaremos $\sqrt{2}e^{-1/2} \approx 1,4 \cdot 0,6 = 0,84$

$f''(x) = -12xe^{-x^2} + 8x^3e^{-x^2} = 4e^{-x^2}(2x^3 - 3x) = 4e^{-x^2}x(2x^2 - 3)$.

$f''(x) = 0$ se e somente se $x = \pm\sqrt{6}/2$ ou $x = 0$.

A variação de sinais de f'', com a correspondente análise das concavidades do gráfico de f, é dada no diagrama abaixo.



São pontos de inflexão do gráfico os pontos $P_1 = (-\sqrt{6}/2, -\sqrt{6}e^{-3/2})$, $P_2 = (0,0)$ e $P_3 = (\sqrt{6}/2, \sqrt{6}e^{-3/2})$. Temos, $\sqrt{6}/2 \approx 1,3$, $f(-\sqrt{6}/2) = -\sqrt{6}e^{-3/2} \approx -2,5 \cdot 2,2 \approx -0,6$, $f(0) = 0$ e $f(\sqrt{6}/2) = \sqrt{6}e^{-3/2} \approx 0,6$.

Pesquisando a existência de assíntotas do gráfico temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2xe^{-x^2} = \pm\infty \cdot e^{-\infty} = \pm\infty \cdot 0.$$

Para evitarmos a indeterminação, fazemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2xe^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right).$$

Aplicando regras de L'Hopital, temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2xe^{x^2}} = \frac{2}{\pm\infty} = 0.$$

Assim, a reta $y = 0$ (eixo x) é assíntota horizontal do gráfico de f.

Com base nos elementos estudados, o gráfico de f é esboçado na figura 13.1.

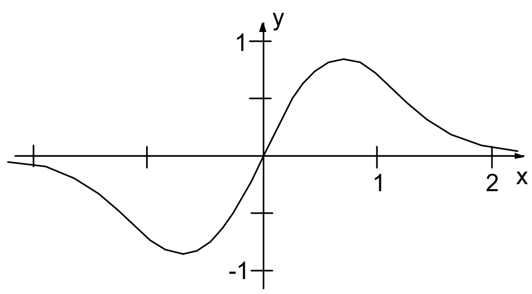


Figura 13.1.

Exemplo 13.9 *Esboçar o gráfico de* $f(x) = x^x$, $x > 0$.

Solução. Do exemplo 13.5, temos $\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$. Esta é uma informação relevante para esboçarmos o gráfico de f nas proximidades de 0.

No exemplo 10.1, da aula 9, obtivemos $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$.

Assim, $f'(x) = 0$ se e somente se $\ln x = -1$, isto é, $x = e^{-1} = 1/e$. Como $\ln x = \log_e x$ tem base $e > 1$, a função ln é crescente, e portanto $f'(x) > 0$ quando $\ln x > -1$, logo para $x > e^{-1} = 1/e$, e $f'(x) < 0$ para $x < 1/e$.

Daí, a função x^x é decrescente no intervalo $]0, 1/e]$ e crescente no intervalo $[1/e, +\infty[$, sendo $1/e$ um ponto de mínimo local (e absoluto) de f. Temos ainda $f(1/e) = (1/e)^{1/e} \approx 0,7$.

Finalmente, $f''(x) = x^x \cdot [(1/x) + (1 + \ln x)^2]$, e assim $f''(x) > 0$ para todo $x > 0$, e então o gráfico de f tem concavidade sempre voltada para cima.

Obviamente $\lim_{x \to +\infty} x^x = +\infty$. O gráfico de f é esboçado na figura 13.2.

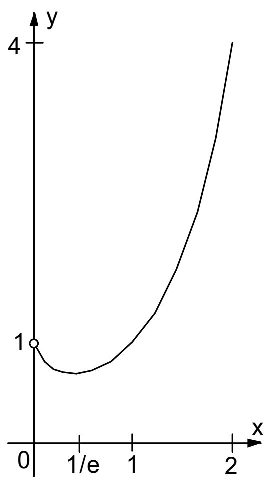


Figura 13.2.

Além disso,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{x-1} = +\infty$$

e portanto o gráfico de f não tem assíntotas.

13.3 Problemas

1. Calcule os seguintes limites, aplicando regras de L'Hopital se necessário.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ (b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$ (d) $\lim_{x\to +\infty} x^n e^{-x}$ (n inteiro positivo)

(e) $\lim_{x\to -\infty} x^n e^{-x}$ (n inteiro positivo) (f) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} 2x)}{\ln(\operatorname{sen} 3x)}$ (h) $\lim_{x\to 0}(x^2)^x$

(i) $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{1/x}$ (j) $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$

(k) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$ (l) $\lim_{x\to +\infty} x^\lambda e^{-x}$ (λ real positivo)

Respostas. (a) $-1/3$. (b) 0. (c) $1/2$. (d) 0. (e) $+\infty$ se n é par, $-\infty$ se n é ímpar. (f) 0. (g) 1. (h) 1. (i) e^3. (j) e. (k) 1. (l) 0.

2. Calcule as equações das retas assíntotas do gráfico de cada uma das seguintes funções.

(a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ (b) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (c) $y = 2x \cdot e^{-1/x}$

(d) $y = x^2 e^{-x}$ (e) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

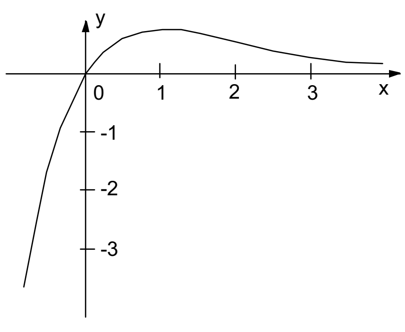
Respostas. (a) $y = 0$, e $x = 0$. (b) $y = e$. (c) $x = 0$, e $y = 2x - 1$. (d) $y = 0$. (e) $y = 0$.

3. Esboce os gráficos das seguintes funções.

(a) $y = 2xe^{-x}$ (b) $y = e^{-x^2}$ (c) $y = 2x^2e^{-x^2}$ (d) $y = \dfrac{2\ln(2x)}{x}$.

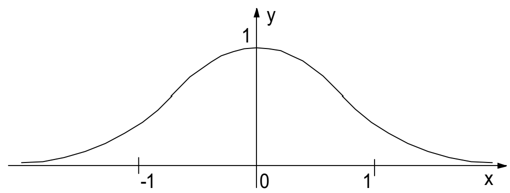
Respostas. (Daremos as derivadas como suporte às soluções.)
(a) $y' = 2(1-x)e^{-x}$, $y'' = 2(x-2)e^{-x}$, (b) $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = (4x^2-2)e^{-x^2}$
(c) $y' = 4xe^{-x^2}(1-x^2)$, $y'' = 4e^{-x^2}(1-5x^2+2x^4)$
(os zeros de y'' são $\pm\frac{1}{2}\sqrt{5\pm\sqrt{17}}$, sendo aproximadamente $\pm 0,5$ e $\pm 1,5$).
(d) $y' = 2[1-\ln(2x)]/x^2$, $y'' = 2[-3+2\ln(2x)]/x^3$.

(a)



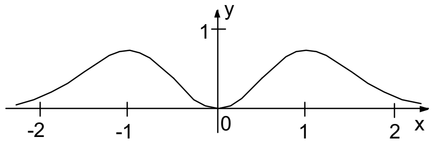
Dados numéricos. $2e^{-1} \approx 0{,}7$
$4e^{-2} \approx 0{,}5$.

(b)



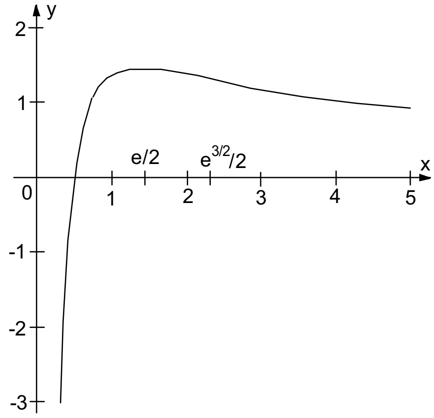
Dados numéricos. $e^{-1/2} \approx 0{,}6$.

(c)



Dados numéricos. $f(0{,}5) \approx 0{,}4$
$f(1{,}5) \approx 0{,}5$

(d)



Dados numéricos. $e/2 \approx 1{,}4$
$e^{3/2}/2 \approx 2{,}2$.