

Aula 16

Integração por partes

Há essencialmente dois métodos empregados no cálculo de integrais indefinidas (primitivas) de funções elementares. Um deles é a integração por substituição, explorada na aula 15, que retomaremos adiante, em novos casos. O outro método é chamado de *integração por partes*, que exploraremos nesta aula.

Suponhamos que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são duas funções deriváveis em um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, para cada x em I , temos

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Assim sendo,

$$\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx = u(x)v(x) + C$$

ou seja,

$$\int v(x)u'(x) dx + \int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) + C$$

Podemos escrever ainda

$$\boxed{\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx} \quad (16.1)$$

aqui considerando que a constante genérica C já está implícita na última integral.

Sendo $u = u(x)$ e $v = v(x)$, temos

$du = u'(x) dx$ e $dv = v'(x) dx$, e passamos a fórmula 16.1 à forma abreviada

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du} \quad (16.2)$$

As fórmulas 16.1 e 16.2 são chamadas fórmulas de integração por partes.

Exemplo 16.1 Calcular $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solução. Tomaremos $u = x$, e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$.

Teremos $du = 1 \, dx = dx$, e $v = \int \operatorname{sen} x \, dx$.

Para os propósitos da integração por partes, basta tomar $v = -\cos x$, menosprezando a constante arbitrária da integral $v = \int \operatorname{sen} x \, dx$, pois uma tal escolha da função v é suficiente para validar a fórmula 16.2.

Temos então

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x \, dx &= \int u \cdot dv \\ &= u \cdot v - \int v \cdot du \\ &= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

Exemplo 16.2 Calcular $\int x \ln x \, dx$.

Solução. Tomamos $u = \ln x$, e $dv = x \, dx$.

Teremos $du = \frac{1}{x} \, dx$, e $v = \int x \, dx$. Tomamos $v = \frac{x^2}{2}$.

Temos então

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \int u \cdot dv \\ &= u \cdot v - \int v \cdot du \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

Exemplo 16.3 Calcular $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$.

Solução. Faremos $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, e $dv = dx$.

E então $du = \frac{1}{1+x^2} \, dx$, $v = x$. Daí,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du \\ &= x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx\end{aligned}$$

Para calcular a integral $J = \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$, procedemos a uma mudança de variável:

Fazendo $w = 1 + x^2$, temos $dw = 2x \, dx$, e então $x \, dx = \frac{1}{2} dw$. Daí,

$$J = \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{w} dw = \ln |w| + C = \ln(1+x^2) + C.$$

Portanto, $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \ln(1+x^2) + C$.

16.1 Um estratégia para integrar por partes

Poderíamos dizer que o propósito da integração por partes é transferir o cálculo de uma integral $\int u \cdot dv$ para o cálculo de uma integral $\int v \cdot du$ (a qual espera-se que saibamos calcular), pela fórmula de integração por partes, $\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

Ao integrar por partes, uma integral da forma $\int f(x)g(x) \, dx$, devemos sempre escolher, dentre as duas funções da expressão $f(x)g(x) \, dx$, uma delas como sendo o fator u e a outra como parte de uma diferencial dv .

Em outras palavras, podemos fazer $u = f(x)$ e $dv = g(x) \, dx$, ou $u = g(x)$ e $dv = f(x) \, dx$ (ou ainda $u = f(x)g(x)$ e $dv = 1 \, dx$!). Mas esta escolha não pode ser feita de modo aleatório. Temos que ser espertos em nossa escolha para que, ao passarmos da integral $\int u \, dv$ para a integral $\int v \, du$, passemos a uma integral tecnicamente mais simples de ser calculada.

Uma sugestão que funciona bem na grande maioria das vezes é escolher as funções u e v segundo o critério que descreveremos abaixo. Ele foi publicado como uma pequena nota em uma edição antiga da revista *American Mathematical Monthly*.

Considere o seguinte esquema de funções elementares:

L	I	A	T	E
Logarítmicas	Inversas de trigonométricas	Algébricas	Trigonométricas	Exponenciais

No esquema acima, as letras do anagrama LIATE são iniciais de diferentes tipos de funções.

Uma estratégia que funciona bem é: ao realizar uma integração por partes, escolher, dentre as duas funções que aparecem sob o sinal de integral,

- como função u : a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda no anagrama;
- como formando a diferencial dv : a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à direita no anagrama.

Sumarizando, u deve caracterizar-se pela letra mais próxima de L, e dv pela letra mais próxima de E.

Esta estratégia já foi adotada nos exemplos desenvolvidos anteriormente!

1. Na integral $\int x \operatorname{sen} x \, dx$, exemplo 16.1, fizemos $u = x$ (Algébrica) e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ (Trigonométrica). No anagrama LIATE, A precede T.
2. Na integral $\int x \ln x \, dx$, exemplo 16.2, fizemos $u = \ln x$ (Logarítmica) e $dv = x \, dx$ (Algébrica). No anagrama LIATE, L precede precede A.
3. Na integral $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$, exemplo 16.3, fizemos $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ (Inversa de trigonométrica), e $dv = 1 \, dx$ (Algébrica). No anagrama LIATE, I precede A.

Passaremos agora a um exemplo interessante e imprescindível.

Exemplo 16.4 Calcular $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solução. Seguindo a sugestão dada acima, faremos

$u = \operatorname{sen} x$ (trigonométrica), $dv = e^x \, dx$ (exponencial). T vem antes de E no anagrama LIATE.

Temos então $du = (\operatorname{sen} x)' \, dx = \cos x \, dx$, e tomamos $v = e^x$. Daí,

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen} x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx \end{aligned}$$

Parece que voltamos ao ponto de partida, não é mesmo? Passamos da integral $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ à integral $\int e^x \cos x \, dx$, equivalente à primeira em nível de dificuldade.

Continuaremos, no entanto, a seguir a receita do anagrama.

Na integral $J = \int e^x \cos x \, dx$ faremos

$u = \cos x$, $dv = e^x \, dx$. (Estas funções u e v são definidas em um novo contexto. Referem-se à esta segunda integral.)

Teremos $du = (\cos x)' dx = -\operatorname{sen} x dx$, e $v = e^x$, e então

$$\begin{aligned} J &= \int e^x \cos x dx = \int u dv = uv - \int v du \\ &= e^x \cos x - \int (-\operatorname{sen} x)e^x dx \\ &= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x dx \end{aligned}$$

O resultado final é interessante. Chamando $I = \int e^x \operatorname{sen} x dx$,

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - J \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x dx \right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I$$

ou seja,

$$2I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + C$$

e então obtemos

$$I = \frac{1}{2}(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x) + C$$

Exemplo 16.5 Calcular $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

Aqui podemos integrar por partes, mas o anagrama LIATE não nos é de serventia, já que a integral envolve apenas expressões algébricas.

Faremos $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$.

Então $du = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, e tomamos $v = x$. Daí,

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

Agora fazemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \int \frac{-(a^2 - x^2) + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= -I + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= -I + a^2 \cdot \arcsen \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \cdot \arcsen \frac{x}{a} + C$$

de onde então

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} + C$$

Um modo mais apropriado de abordar integrais com expressões da forma $x^2 \pm a^2$, ou $a^2 - x^2$, será retomado adiante, quando fizermos um estudo de *substituições trigonométricas*.

16.2 Problemas

1. Repetindo procedimento análogo ao usado no exemplo 16.5, mostre que

$$\int \sqrt{x^2 + \lambda} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \lambda} + \frac{\lambda}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + \lambda}| + C$$

2. Calcule as seguintes integrais.

- (a) $\int x e^x dx$. *Resposta.* $e^x(x - 1) + C$.
 (b) $\int \ln x dx$. *Resposta.* $x(\ln x - 1) + C$.
 (c) $\int x^n \ln x dx$ ($n \neq -1$). *Resposta.* $\frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x - \frac{1}{n+1}) + C$.
 (d) $\int \ln(1 + x^2) dx$. *Resposta.* $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arcsen x + C$.
 (e) $\int x \arcsen x dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}[(x^2 + 1) \arcsen x - x] + C$.
 (f) $\int \arcsen x dx$. *Resposta.* $x \arcsen x + \sqrt{1 - x^2} + C$.
 (g) $\int \sqrt{1 - x^2} dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2} \arcsen x + \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + C$.

Sugestão. Imite os procedimentos usados no exemplo 16.5.

- (h) $\int x \arcsen x \, dx$. *Resposta.* $\frac{1}{4}[(2x^2 - 1) \arcsen x + x\sqrt{1-x^2}] + C$.
- (i) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$. *Resposta.* $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$.
- (j) $\int \arctg \sqrt{x} \, dx$. *Resposta.* $(x+1) \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.
Sugestão. Ao deparar-se com $\int \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$, faça $z = \sqrt{x}$.
- (k) $\int \frac{\arcsen \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$. *Resposta.* $2\sqrt{x} \arcsen \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$.
- (l) $\int \arcsen \sqrt{\frac{x}{x+1}} \, dx$. *Resposta.* $x \arcsen \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arctg \sqrt{x} + C$.
Sugestão. Não se deixe intimidar. Comece fazendo $u = \arcsen \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $dv = dx$.
- (m) $\int x \cos^2 x \, dx$. *Resposta.* $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C$.
Sugestão. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.
- (n) $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x \, dx$.
Resposta. $(x^2 + 7x - 5) \frac{\sen 2x}{2} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sen 2x}{4} + C$.
- (o) $\int e^{ax} \cos bx \, dx$. *Resposta.* $\frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} (b \sen bx + a \cos bx) + C$.
- (p) $\int e^{ax} \sen bx \, dx$. *Resposta.* $\frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} (a \sen bx - b \cos bx) + C$.
- (q) $\int \frac{x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$. *Resposta.* $x - \sqrt{1-x^2} \arcsen x + C$.
- (r) $\int \frac{\arcsen x}{x^2} \, dx$.
Resposta. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right| - \frac{1}{x} \arcsen x + C = \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \frac{1}{x} \arcsen x + C$.
Sugestão. Faça $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$, quando necessário, e então $z = \sqrt{1-x^2}$.
- (s) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$. *Resposta.* $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$.
- (t) $\int \frac{x \arcsen x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \, dx$. *Resposta.* $\frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$.

3. Ao calcular a integral $\int \frac{1}{x} dx$, Joãozinho procedeu da seguinte maneira.

Fazendo $u = \frac{1}{x}$, e $dv = dx$, podemos tomar $v = x$, e teremos $du = -\frac{1}{x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du \\ &= \frac{1}{x} \cdot x - \int x \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

Sendo $J = \int \frac{1}{x} dx$, temos então $J = 1 + J$, logo $0 = 1$.

Onde está o erro no argumento de Joãozinho?

4. Mostre que $\int \frac{x^2}{(x^2 + \lambda)^2} dx = \frac{-x}{2(x^2 + \lambda)} + \int \frac{dx}{x^2 + \lambda}$.

Sugestão. Faça $\int \frac{x^2}{(x^2 + \lambda)^2} dx = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{x}{(x^2 + \lambda)^2}}_{dv} dx$.

5. Usando o resultado do problema 4, calcule (considere $a > 0$)

$$(a) \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx. \quad (b) \int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^2} dx.$$

Respostas. (a) $\frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$ (b) $\frac{x}{2(a^2-x^2)} - \frac{1}{4a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

6. Mostre que

$$\int \frac{dx}{(x^2 + \lambda)^2} = \frac{x}{2\lambda(x^2 + \lambda)} + \frac{1}{2\lambda} \int \frac{dx}{x^2 + \lambda}$$

Sugestão. $\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2} = \int \frac{(x^2+\lambda)-x^2}{(x^2+\lambda)^2} dx.$

7. Usando a redução mostrada no problema 6, calcule as integrais (considere $a > 0$).

$$(a) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}. \quad (b) \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^2}.$$

Respostas. (a) $\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$ (b) $\frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

8. Calcule $\int \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{(x^2+1)^2} dx.$ *Resposta.* $\frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} + C.$