

Aula 20

Aplicações selecionadas da integral definida

20.1 Área de uma região plana

Suponhamos que f e g são duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$, sendo $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Para $x \in [a, b]$, consideramos, apoiada à esquerda no ponto x , uma fatia retangular vertical, de base Δx , e altura $h(x) = f(x) - g(x)$, como na figura 20.1. A área dessa fatia será dada por $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$.

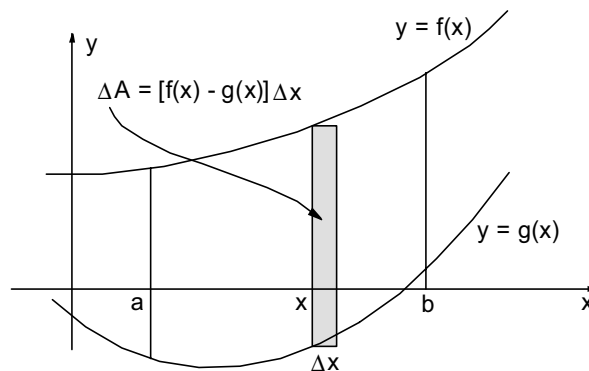


Figura 20.1.

Se subdividirmos o intervalo $[a, b]$ em vários sub-intervalos de comprimento Δx , e sobre cada um deles construirmos uma área ΔA , como acima, teremos a área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, dada aproximadamente por

$$\sum \Delta A = \sum [f(x) - g(x)]\Delta x$$

onde, pelo bem da simplicidade, estamos omitindo índices do somatório.

A área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, será dada pelo limite de tais somas integrais, quando $\Delta x \rightarrow 0$, ou seja, será dada por

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum [f(x) - g(x)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Sendo $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$, é costume simbolizar $dA = [f(x) - g(x)]dx$. Temos então $A = \int_a^b dA$.

É costume dizer que $dA = [f(x) - g(x)]dx$ é um *elemento infinitesimal de área*, de altura $f(x) - g(x)$, sobre um *elemento infinitesimal de comprimento* dx . O símbolo de integração, \int , provém da forma de um arcaico S, e tem o significado de “soma (veja isto: *soma*) de um número infinito de quantidades infinitesimais”. Assim, se $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x) dx$ corresponde, grosso modo, a uma soma de elementos infinitesimais de área, de alturas $f(x)$, e base dx , com x “variando” de a até b .

Exemplo 20.1 Calcular a área delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

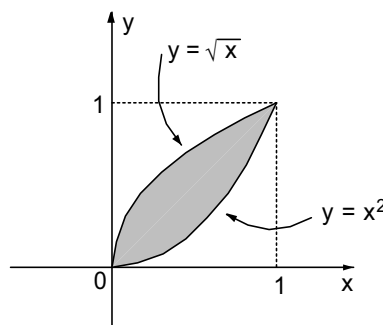


Figura 20.2.

Solução. As curvas dadas se interceptam em $x_0 = 0$ e em $x_1 = 1$ (soluções de $x^2 = \sqrt{x}$). Para $0 \leq x \leq 1$, temos $\sqrt{x} \geq x^2$. Veja figura 20.2.

Assim sendo, a área entre as duas curvas é dada por

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx = \int_0^1 [x^{1/2} - x^2] dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

20.2 Média ou valor médio de uma função

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Em $[a, b]$ tomemos os $n + 1$ pontos igualmente espaçados

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

isto é, tais que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{b - a}{n}$$

A média aritmética dos $n + 1$ valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, é dada por

$$\mu_n = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n + 1}$$

Definiremos a média da função f , no intervalo $[a, b]$, como sendo

$$\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$$

Mostraremos que

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

De fato, sendo $\Delta x = \frac{b - a}{n}$, temos

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n + 1} \\ &= \frac{f(x_0)}{n + 1} + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x}{n + 1} \right) \\ &= \frac{f(x_0)}{n + 1} + \frac{n}{b - a} \left(\frac{f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x}{n + 1} \right) \\ &= \frac{f(x_0)}{n + 1} + \frac{1}{b - a} \cdot \frac{n}{n + 1} (f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x) \end{aligned}$$

Logo, como os pontos $x_0 (= a), x_1, \dots, x_{n-1}, x_n (= b)$ subdividem o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos, todos de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0)}{n + 1} + \frac{1}{b - a} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \right) \\ &= 0 + \frac{1}{b - a} \cdot 1 \cdot \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Exemplo 20.2 Determine o valor médio de $f(x) = x^2$, no intervalo $a \leq x \leq b$.

Solução. O valor médio de f em $[a, b]$, é dado por

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{b - a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b - a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{1}{b - a} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) \\ &= \frac{(b - a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b - a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \end{aligned}$$

20.3 Volume de um sólido

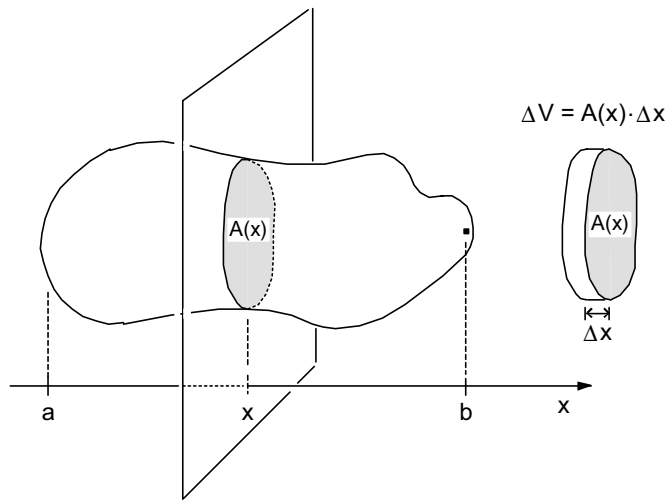


Figura 20.3.

Na figura 20.3, para cada x , $a \leq x \leq b$, um plano perpendicular a um eixo x corta um sólido (uma batata?) determinando no sólido uma secção transversal de área $A(x)$. De $x = a$ até $x = b$, são determinadas as áreas de todas as secções transversais desse sólido, sendo $b - a$ o seu “comprimento”. Qual é o seu volume?

Suponhamos que o intervalo $[a, b]$ é subdividido em n sub-intervalos, todos de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$.

Se x é um ponto dessa subdivisão, determina-se um volume de uma fatia “cilíndrica”, de “base” com área $A(x)$ e “altura” Δx ,

$$\Delta V = A(x) \cdot \Delta x$$

Uma aproximação do volume do sólido é dado pelo somatório desses vários volumes cilíndricos,

$$V \cong \sum \Delta V = \sum_x A(x) \cdot \Delta x$$

sendo o somatório aqui escrito sem os habituais índices i , para simplificar a notação. Quanto mais finas as fatias “cilíndricas”, mais próximo o somatório estará do volume do sólido, sendo seu volume igual a

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum A(x) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

Os cientistas de áreas aplicadas costumam dizer que $dV = A(x) \cdot dx$ é um *elemento infinitesimal de volume*, construído sobre um ponto x , de um “cilindro” de área da base $A(x)$ e altura (espessura) “infinitesimal” dx . Ao “somar” os infinitos elementos de volume, temos $\int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$ igual ao volume do sólido.

Exemplo 20.3 Qual é o volume de um tronco de pirâmide, de altura h , cuja base é um quadrado de lado a e cujo topo é um quadrado de lado b ?

Solução. Posicionemos um eixo x perpendicular às duas bases. Cada ponto (altura) x , demarcada nesse eixo, corresponde, no tronco de pirâmide, a uma secção transversal quadrada, de tal modo que $x = 0$ corresponde à base quadrada de lado a , e $x = h$ corresponde ao topo quadrado de lado b . Veja figura 20.4.

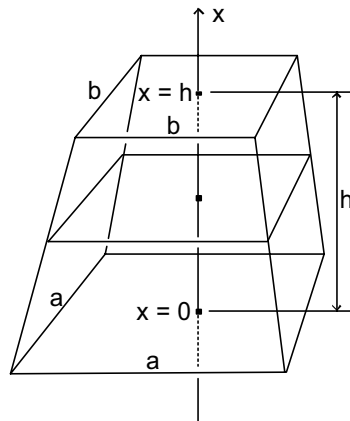


Figura 20.4.

Procurando uma função afim, $f(x) = mx + n$, tal que $f(0) = a$ e $f(h) = b$, encontramos $f(x) = a + \frac{b-a}{h}x$.

A área da secção transversal, na altura x , é dada por

$$A(x) = \left(a + \frac{b-a}{h}x \right)^2$$

O volume do tronco de pirâmide é então

$$V = \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \left(a + \frac{b-a}{h}x \right)^2 dx$$

Fazendo $u = a + \frac{b-a}{h}x$, temos $du = \frac{b-a}{h} dx$. Além disso, $u = a$ para $x = 0$, e $u = b$ para $x = h$, e então

$$V = \int_0^h A(x) dx = \frac{h}{b-a} \int_a^b u^2 du = \frac{h}{b-a} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_a^b = \frac{h}{3(b-a)}(b^3 - a^3) = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Note que o volume do tronco de pirâmide é $1/3$ do produto de sua altura pelo valor médio das áreas das secções transversais (veja exemplo 20.2). Conforme um antigo papiro, esta fórmula já era conhecida pela antiga civilização egípcia do século 18 a.C.

20.3.1 Volume de um sólido de revolução

Quando rotacionamos uma região do plano xy em torno do eixo x ou do eixo y , realizando uma volta completa, o lugar geométrico descrito pelos pontos da região é o que chamamos um *sólido de revolução*.

Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se, em torno do eixo x , uma região plana delimitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Para cada $x \in [a, b]$, um plano perpendicular ao eixo x , cortando este no ponto x , determina no sólido de revolução uma secção transversal. Esta secção transversal é obtida pela revolução completa, em torno do eixo x , do segmento vertical $A_x B_x$, sendo $A_x = (x, g(x))$ e $B_x = (x, f(x))$. Veja figura 20.5

A área dessa secção transversal será nada mais que a área de uma região plana compreendida entre dois círculos concêntricos de centro $(x, 0)$, sendo um menor, de raio $g(x)$, e outro maior, de raio $f(x)$. Como a área de um círculo de raio r é πr^2 , temos que a área $A(x)$, da secção transversal do sólido de revolução, é dada por

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2$$

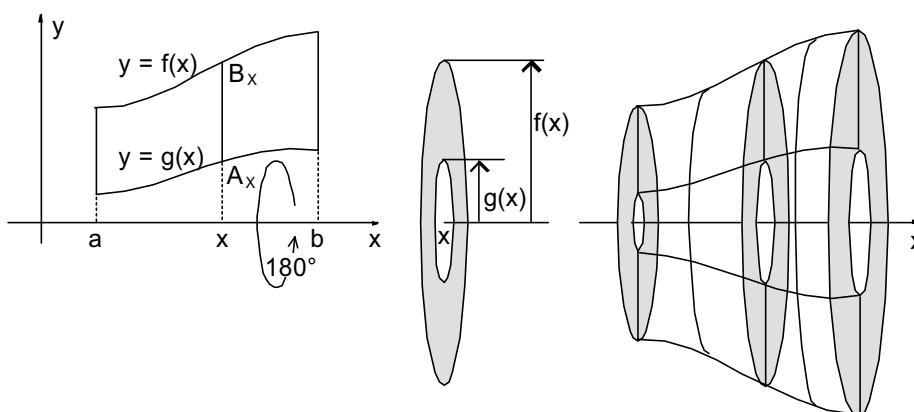


Figura 20.5.

Portanto, o volume do sólido de revolução será

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b (\pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2) dx$$

Se a região plana for delimitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo x , e pelas retas $x = a$ e $x = b$, teremos $g(x) = 0$, e então

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

Exemplo 20.4 Calcule o volume de uma esfera de raio a .

A esfera de raio a pode ser interpretada como o sólido obtido pela revolução da região semi-circular $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, em torno do eixo x . Uma tal região é delimitada pelas curvas $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, e $y = 0$, com $-a \leq x \leq a$. Assim, aqui, $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$, sendo então

$$dV = A(x) dx = \pi[f(x)]^2 dx = \pi(a^2 - x^2) dx$$

o elemento de volume a integrar.

Portanto,

$$V = \int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2) dx = \pi \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - \pi \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a^3$$

20.4 Comprimento de uma curva

Consideremos agora a curva $y = f(x)$, gráfico de uma função contínua f , para $a \leq x \leq b$.

Para calcular o comprimento dessa curva, primeiramente particionamos o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, através de pontos

$$a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

Em seguida consideramos, no gráfico, os $n + 1$ pontos correspondentes,

$$A_0 = (x_0, f(x_0)), A_1 = (x_1, f(x_1)), \dots, A_{n-1} = (x_{n-1}, f(x_{n-1})), A_n = (x_n, f(x_n))$$

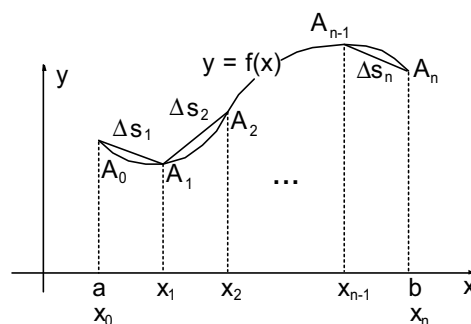


Figura 20.6.

Sendo $\Delta s_i = \text{dist}(A_{i-1}, A_i)$, para $i = 1, \dots, n$, temos que uma aproximação do comprimento da curva é dada pela soma $\sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \text{dist}(A_{i-1}, A_i)$.

Agora,

$$\begin{aligned} \text{dist}(A_{i-1}, A_i) &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Assumindo que f é diferenciável no intervalo $[a, b]$, pelo teorema do valor médio, teorema 15.1, aula 12,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)$$

para algum c_i compreendido entre x_{i-1} e x_i . Assim,

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x$$

Esta é uma soma integral de $\varphi(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, no intervalo $[a, b]$, correspondente à subdivisão $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, com uma “escolha” de pontos intermediários c_1, c_2, \dots, c_n . Veja definição à aula 17.

Supondo $f'(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$, temos então que o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, é dado por

$$s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

A idéia intuitiva que dá a integral para o comprimento de arco é ilustrada na figura 20.7. Para um elemento infinitesimal de comprimento dx , corresponde uma variação infinitesimal em y , dy . O elemento infinitesimal de comprimento de arco, ds , correspondente à variação dx , é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

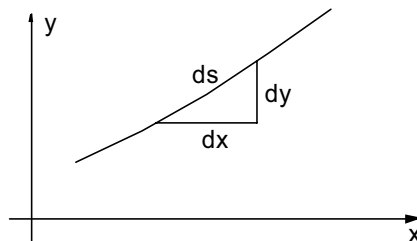


Figura 20.7.

20.5 Área de uma superfície de revolução

Consideremos a curva $y = f(x)$, gráfico de uma função f contínua, a qual assumiremos que tem derivada f' também contínua, para $a \leq x \leq b$.

Rotacionando-se essa curva em torno do eixo x , obtemos uma superfície de revolução. Para o cálculo de sua área, primeiramente particionamos o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, através de pontos $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$.

Tomando-se dois pontos dessa subdivisão, x_{i-1} e x_i , consideramos os pontos correspondentes no gráfico de f , $A_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $A_i = (x_i, f(x_i))$. Este procedimento geométrico está ilustrado na figura 20.6.

Rotacionando-se o segmento $\overline{A_{i-1}A_i}$ em torno do eixo x , obtemos um tronco de cone, de geratriz lateral $\Delta s_i = \overline{A_{i-1}A_i}$, sendo $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ os raios de sua base e de seu topo. Veja figura 20.8

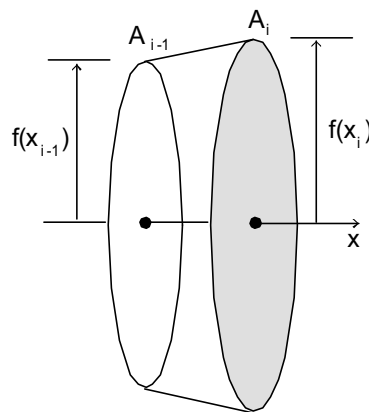


Figura 20.8.

A área da superfície lateral de um tronco de cone, de geratriz lateral ℓ e raios r e R no topo e na base, é dada por $\pi(r + R)\ell$. Assim, rotacionando o segmento $\overline{A_{i-1}A_i}$, em torno do eixo x , como acima, a superfície resultante terá área

$$\Delta S_i = \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \Delta s_i$$

e a área da superfície de revolução, da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x , será dada por

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta S_i$$

Agora, como argumentado na seção anterior (confira),

$$\Delta s_i = \overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x$$

para algum c_i entre x_{i-1} e x_i . Assim sendo,

$$\begin{aligned}\Delta S_i &= \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \Delta s_i \\ &= \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}S &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta S_i \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \Delta s_i \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x\end{aligned}$$

E pode ser mostrado que este último limite é igual a

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum 2\pi f(c_i) \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Assim, a área da superfície de revolução resultante é dada por

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

20.6 Centro de gravidade de uma figura plana

Se temos, em um plano ou no espaço n pontos P_1, P_2, \dots, P_n , tendo massas m_1, m_2, \dots, m_n , respectivamente, o centro de massa \bar{P} , do sistema de n pontos, é dado por

$$\bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i P_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

ou seja, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, sendo

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Consideremos uma região plana, delimitada pelos gráficos das funções contínuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Olhando essa região como uma placa plana, de espessura desprezível, suponhamos que ela possui densidade superficial (massa por unidade de área) δ constante.

Particionando-se o intervalo $[a, b]$, em intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, através dos pontos $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$, aproximamos essa região por uma reunião de retângulos, como na figura 20.9, sendo cada retângulo de altura $f(x) - g(x)$ e base Δx , sendo aqui x o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

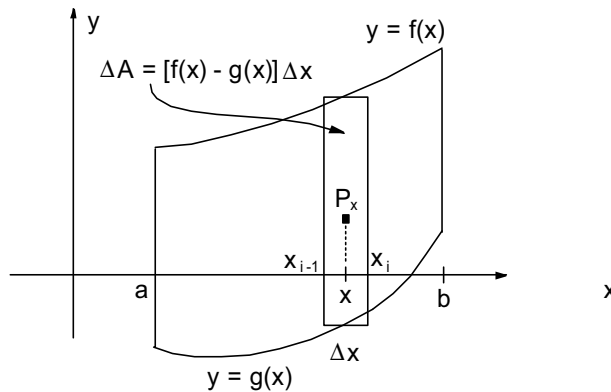


Figura 20.9.

Esse retângulo elementar tem área $\Delta A = (f(x) - g(x))\Delta x$, seu centro de massa é o ponto $P_x = \left(x, \frac{f(x)+g(x)}{2}\right)$, sendo sua massa dada por

$$\Delta m = \delta \cdot \Delta A = \delta(f(x) - g(x))\Delta x$$

O centro de massa da reunião de todos esses retângulos elementares coincide com o centro de massa dos pontos P_x , atribuindo-se a cada ponto a massa Δm do seu retângulo.

Assim, uma aproximação do centro de massa da região plana considerada, o centro de massa dos vários retângulos elementares, é dada por

$$\hat{P} = \frac{\sum \Delta m \cdot P_x}{\sum \Delta m} = \frac{\sum \delta \cdot \Delta A \cdot P_x}{\sum \delta \cdot \Delta A} = \frac{\sum \Delta A \cdot P_x}{\sum \Delta A}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \Delta A \cdot P_x &= \Delta A \cdot \left(x, \frac{f(x) + g(x)}{2}\right) \\ &= (f(x) - g(x))\Delta x \cdot \left(x, \frac{f(x) + g(x)}{2}\right) \\ &= \left(x(f(x) - g(x))\Delta x, (f(x) - g(x)) \cdot \frac{f(x) + g(x)}{2}\Delta x\right) \\ &= \left(x(f(x) - g(x))\Delta x, \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) \cdot \Delta x\right) \end{aligned}$$

Finalmente, o centro de massa \bar{P} da região plana considerada, será dado por

$$\bar{P} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \hat{P} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta A \cdot P_x}{\sum \Delta A}$$

Portanto, passando ao limite, nas duas coordenadas de \hat{P} , chegamos a $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, sendo

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx} \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}$$

20.7 Problemas

Áreas de regiões planas

1. Calcule a área delimitada pelas curvas $y^2 = 9x$ e $y = 3x$. *Resposta.* $1/2$.
2. Calcule a área delimitada pelas curvas $xy = a^2$, $x = a$, $y = 2a$ ($a > 0$) e o eixo x . *Resposta.* $a^2 \ln 2$.
3. Calcule a área delimitada pela curva $y = x^3$, pela reta $y = 8$ e pelo eixo y . *Resposta.* 12 .
4. Calcule a área total delimitada pelas curvas $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$. *Resposta.* $3/2$.
5. Calcule a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Resposta.* πab .
Sugestão. A área é delimitada pelos gráficos de funções $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, com $-a \leq x \leq a$. Faça a substituição $x = a \operatorname{sen} t$. Na integral resultante, use a fórmula de redução de potências $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$.
6. Calcule a área delimitada pela curva fechada (hipociclóide) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. *Resposta.* $\frac{3}{8}\pi a^2$.
Sugestão. A área é delimitada pelos gráficos de funções $y = \pm \sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}$, com $-a \leq x \leq a$. Faça a substituição $x = a \operatorname{sen}^3 \theta$, com $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Na integral resultante, use as fórmulas de redução de potências $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$, $\operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$.

Valor médio de uma função contínua

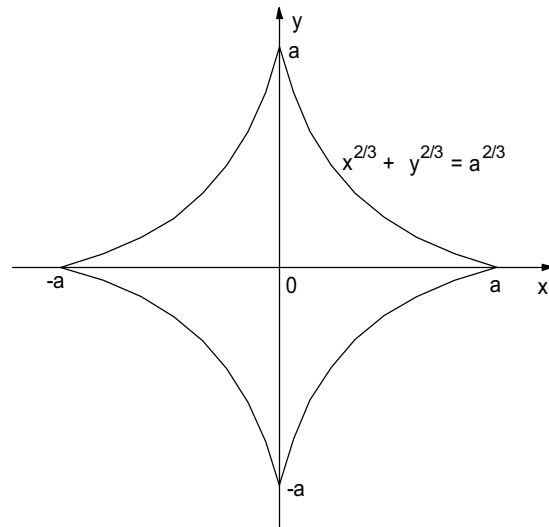
Determinar o valor médio da função dada, no intervalo especificado.

1. $f(x) = x^2$, $a \leq x \leq b$. *Resposta.* $\bar{f} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $a \leq x \leq b$ ($0 \leq a < b$). *Resposta.* $\frac{2(a+b+\sqrt{ab})}{3(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$.
3. $f(x) = \cos^2 x$, $0 \leq x \leq \pi/2$. *Resposta.* $1/2$.

Volumes de sólidos

Em cada problema, calcule o volume do sólido obtido por revolução, conforme descrito.

1. A elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gira em torno do eixo x . *Resposta.* $\frac{1}{3}\pi ab^2$.
2. O segmento de reta da origem $(0, 0)$ ao ponto (a, b) gira ao redor do eixo x , obtendo-se assim um cone. *Resposta.* $\frac{1}{3}\pi a^2 b$.
3. A região plana delimitada pela hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ gira ao redor do eixo x .
Resposta. $32\pi a^3/105$.



4. O arco de senóide $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, gira em torno do eixo x . *Resposta.* $\pi^2/2$.
5. A região delimitada pela parábola $y^2 = 4x$, pela reta $x = 4$ e pelo eixo x , gira em torno do eixo x . *Resposta.* 32π .

Comprimentos de curvas

Calcule os comprimentos das curvas descritas abaixo.

1. Hipociclóide (veja figura) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. *Resposta.* $6a$.
2. $y = \frac{1}{\sqrt{a}}x^{3/2}$, de $x = 0$ a $x = 5a$. *Resposta.* $335a/27$.
3. $y = \ln x$, de $x = \sqrt{3}$ a $x = \sqrt{8}$. *Resposta.* $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.
4. $y = 1 - \ln(\cos x)$, de $x = 0$ a $x = \pi/4$. *Resposta.* $\ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$.

Áreas de superfícies de revolução

Em cada problema, calcule a área da superfície obtida por revolução da curva dada em torno do eixo especificado.

1. $y^2 = 4ax$, $0 \leq x \leq 3a$, rotacionada em torno do eixo x . *Resposta.* $\frac{56}{3}\pi a^2$.

2. $y = 2x$, $0 \leq x \leq 2$,

(a) rotacionada em torno do eixo x (b) rotacionada em torno do eixo y .

Respostas. (a) $8\pi\sqrt{5}$ (b) $4\pi\sqrt{5}$.

3. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, rotacionada em torno do eixo x .

Resposta. $4\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$.

Centro de massa (ou de gravidade) de uma região plana

Determine as coordenadas do centro de gravidade da região plana especificada.

1. Região no primeiro quadrante, delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).
Resposta. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi})$.

2. Área delimitada pela curva $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ e o eixo x . *Resposta.* $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 8/5)$.

3. Área delimitada pela parábola $y^2 = ax$ e pela reta $x = a$. *Resposta.* $(\bar{x}, \bar{y}) = (3a/5, 0)$.