UFSCar – Cálculo 2. Quinta lista de exercícios.
Prof. João C.V. Sampaio e Yolanda K. S. Furuya

Regra da cadeia, diferenciais e aplicações

1. Calcule

   (a) $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}(0,1,\pi/6)$, se $w = x^4 + \frac{y}{\operatorname{sen} y} + 2x^3 y\cos z$. *Resposta.* 24

   (b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(1,3,1)$, se $u = \frac{x^2+y^2}{xz}$. *Resposta.* -6

   (c) $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial v^2 \partial u^8}(0,1,2)$, se $f(u,v,w) = e^u \ln(1+vw)$. *Resposta.* $-1/9$

2. Em aplicações do cálculo diferencial (termodinâmica por exemplo) usa-se a notação $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$, que significa $\frac{\partial z}{\partial x}$ quando z se exprime como função das variáveis x e y. Atente para o fato de que, em geral, f_y significa $\frac{\partial f}{\partial y}$, mas $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ tem este outro significado que acabamos de descrever.

   Por exemplo, se $z = x^2 - y^2$, então, exprimindo x e y em coodenadas polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, podemos escrever z de outras formas, tendo então as derivadas parciais que indicamos:

   $$\begin{aligned} z &= r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta, & \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta &= 2r(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ z &= 2x^2 - (x^2+y^2) = 2x^2 - r^2, & \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_x &= -2r \\ z &= x^2 + y^2 - 2y^2 = r^2 - 2y^2, & \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_y &= +2r \end{aligned}$$

   Com base nos conceitos e exemplos acima, sendo $z = x^2 + 2y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, calcule as derivadas parciais pedidas, escrevendo previamente z como função das duas variáveis indicadas na derivação.

   (a) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ (b) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r$ (c) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\theta$ (d) $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$
   (e) $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_r$ (f) $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\theta$ (g) $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_x$ (h) $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_y$

   Respostas.
   (a) $z = x^2 + 2y^2$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 2x$ (b) $z = 2r^2 - x^2$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r = -2x$
   (c) $z = x^2(2\sec^2\theta - 1)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\theta = 2x(2\sec^2\theta - 1)$ (d) $z = x^2 + 2y^2$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 4y$
   (e) $z = r^2 + y^2$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_r = 2y$ (f) $z = y^2(1 + \operatorname{cosec}^2\theta)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\theta = 2y(1+\operatorname{cosec}^2\theta)$
   (g) $z = x^2(2\sec^2\theta - 1)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_x = 4x^2\operatorname{tg}\theta\sec^2\theta$ (h) $z = y^2(1+\operatorname{cosec}^2\theta)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_y = -4y^2\operatorname{cosec}^2\theta\operatorname{cotg}\theta$

3. Escreva uma expressão para $\frac{du}{dx}$, se $u = f(x, y, z)$, com $y = \varphi(x)$, e $z = \psi(x, y)$.
   Resposta. $\frac{du}{dx} = f_x(x, y, z) + f_y(x, y, z) \cdot \varphi'(x) + f_z(x, y, z) \cdot (\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y) \cdot \varphi'(x))$, sendo, nesta expressão $y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x, \varphi(x))$.

4. Mostre que se $w = f(u, v)$ é diferenciável, e se $u = x+at$, $v = y+bt$, então $w_t = aw_x+bw_y$.

5. Sendo $z = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$, calcule $\frac{dz}{dx}$, por derivação em cadeia, tomando $z = u^v$ e então $u = \operatorname{sen} x$, $v = \cos x$. *Resposta.* $\frac{dz}{dx} = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x))$.

6. Mostre que se $z = xy + x \cdot f(\frac{y}{x})$, ($f$ derivável) então $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

7. A função diferenciável $z = f(x, y)$ é homogênea de grau n se $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Mostre que uma tal função satisfaz a equação $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$. *Sugestão.* Derive ambos os membros em relação a t e depois faça $t = 1$.

8. Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

   Mostre que, fazendo-se $s = y + 2x$, $t = y + 3x$, a equação torna-se $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} =$. Determine então a forma de uma solução geral $z = \varphi(x, y)$, supondo φ diferenciável com derivadas parciais de ordem 2 contínuas. *Resposta.* $z = f(y + 2x) + g(y + 3x)$

9. Como no problema anterior, determine a solução geral da equação

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 10\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

   fazendo a mudança de variáveis $u = 5x - 2y$, $v = 2x + y$.

10. Suponha que $w = f(x, y)$ é solução geral de $w_{xx} - w_{yy} = 1$. Faça $x = u + v$, $y = u - v$, e mostre que a equação se torna $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 1$. Resolva então a equação dada.
    Resposta. $w = \frac{x^2-y^2}{4} + f(x + y) + g(x - y)$.

11. Se $z = f(x, y)$, e $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostre que

    (a)

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

    e então que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

    (b) $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = (\frac{\partial z}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^2$.

12. Escreva a *equação de Laplace* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, em termos de coordenadas polares r e θ, sendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. *Resposta.* $\dfrac{\partial^2 r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$.

13. Se $x = e^s \cos t$, $y = e^s \,\mathrm{sen}\, t$, mostre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$.

14. Determine as diferenciais das seguintes funções.

    (a) $z = yx^y$. *Resposta.* $dz = y^2 x^{y-1}\,dx + x^y(1 + y\ln x)\,dy$.

    (b) $z = \ln(x^2 + y^2)$. *Resposta.* $dz = \dfrac{2}{x^2+y^2}(x\,dx + y\,dy)$.

    (c) $f(x,y) = \ln \mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$. *Resposta.* $df = -\dfrac{2y}{\mathrm{sen}(2y/x)}dx + \dfrac{2}{x\,\mathrm{sen}(2y/x)}dy$.

    (d) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *Resposta.* $du = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$.

    (e) $u = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{xy}{z^2}$. *Resposta.* $du = \dfrac{z^2}{x^2y^2+z^4}(y\,dx + x\,dy - \frac{2xy}{z}\,dz)$.

    (f) $u = \cos^2 x + \mathrm{sen}^2\, y$. *Resposta.* $du = \mathrm{sen}\,2x\,dx - \mathrm{sen}\,2y\,dy$.

15. Usando a diferencial de $f(x) = \frac{1}{x^3}$, mostre que se n é bastante grande, tem-se $\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3} \cong -\frac{3}{n^4}$. Estime então, sem usar calculadora, uma boa aproximação para $(10^6+1)^{-3}$. *Resposta.* $10^{-18} - 3\cdot 10^{-24} \cong 9{,}99997\cdot 10^{-19}$.

16. Usando diferenciais, mostre que, sendo $A = \pi r^2$, tem-se $\Delta A = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 \cong 2\pi r \Delta r$. Interprete geometricamente esse resultado.

17. A área de um retângulo de lados x e y é dada por $A = xy$. Se os lados x e y sofrem variações Δx e Δy, respectivamente, interprete geometricamente a quantidade de área desprezada quando utilizamos a aproximação $\Delta A \cong dA$.

18. Seja R a resistência total de um circuito de três resistores $R_1 = 25$ ohms, $R_2 = 15$ ohms, $R_3 = 10$ ohms, ou seja, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Se R_1 e R_2 são alterados para $25{,}1$ ohms e $14{,}8$ ohms, respectivamente, determine o valor para o qual R_3 deve ser alterado de modo a manter R inalterado. *Resposta.* R_3 deve passar a ser $10{,}073$ ohms.

19. Em condições ideais, a aceleração da gravidade pode ser calculada a partir do comprimento ℓ e do período T de um pêndulo, pela fórmula $g = \dfrac{4\pi^2\ell}{T^2}$. Encontre o erro máximo relativo no cálculo de g, $|\Delta g/g$, se o erros relativos nos cálculos de ℓ e T são da ordem de 5% e 2%, respectivamente. *Resposta.* 9%.

20. Até qual percentual um erro relativo de 1% em a e em b pode afetar a^2b^3. *Resposta.* 5%.

21. Calcule os valores numéricos indicados usando uma diferencial (compare com valores obtidos em uma boa calculadora).

    (a) $\sqrt[3]{(2{,}05)^2 + (1{,}98)^2}$. *Resposta.* $2{,}01$.

    (b) $\ln(1 + 10^{-18})$. *Resposta.* 10^{-18}.

    (c) $\sqrt{5 + 10^{28}}$. *Resposta.* $10^{14} + 2{,}5\cdot 10^{-14}$.

Derivadas direcionais, gradiente, e aplicações

1. Calcule a derivada direcional de z em P_0, na direção $\vec{u}$, em cada um dos casos abaixo.

   (a) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $P_0 = (1,1)$, $\vec{u} = (\cos\pi/4, \operatorname{sen}\pi/4)$. *Resposta.* $\sqrt{2}/2$.

   (b) $z = x^2 - xy - 2y^2$, $P_0 = (1,2)$, $\vec{u} = (\cos 60°, \operatorname{sen} 60°)$. *Resposta.* $-9\sqrt{3}/2$.

2. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$, sendo

   (a) $f(x,y) = x\cos^2 y$, $P_0 = (2, \pi/4)$, $\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j}$. *Resposta.* $1/(2\sqrt{26})$.

   (b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, $P_0 = (4,-4)$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. *Resposta.* $-1/(8\sqrt{13})$.

3. A partir do ponto $(1,1)$, em que direção a função $\phi = x^2 - y^2 + 2xy$ decresce mais rapidamente? *Resposta.* Na direção do vetor $-\vec{i}$.

4. Calcule a derivada de $w = ze^x \cos y$, no ponto $P = (1, 0, \pi/2)$, na direção do vetor $\vec{i} + 2\vec{j}$. *Resposta.* $\pi e/(2\sqrt{5})$.

5. Determine um vetor normal à superfície $z = x^2 + y^2$, no ponto $(3, 4, 25)$. Determine equações do plano tangente e da reta normal à superfície nesse ponto.

   Resposta. $\vec{n} = 6\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$; $6x + 8y - z = 25$; $\frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-25}{-1}$.

6. Idem, agora considerando a superfície $x^2y + y^2z + z^2x + 1 = 0$, e ponto $A = (1, 2, -1)$ dessa superfície.

   Resposta. $\vec{n} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $5x - 3y + 2z + 3 = 0$; $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z=1}{2}$

7. Sendo $\phi = x^2 - y^2$, esboce (em um único sistema de coordenadas cartesianas no plano) as curvas $\phi = 4$, $\phi = 0$, $\phi = -1$, $\phi = -4$.

   Se ϕ é o *potencial eletrostático* no ponto (x,y), as curvas $\phi =$ *constante* são as *curvas equipotenciais* e o *campo elétrico* é o *campo vetorial* $\vec{E} = -\nabla\phi$. Se ϕ é a temperatura em (x,y), as curvas $\phi =$ *constante* são as *isotermas* e $\nabla\phi$ é o *gradiente de temperatura*. O calor flui na direção $-\nabla\phi$.

   Encontre e esboce os vetores $-\nabla\phi$ nos pontos $(x,y) = (\pm1, \pm1)$, $(0, \pm2)$, $(\pm2, 0)$ (esboce os vetores geometricamente, demarcando suas extremidades iniciais nesses pontos). Então, lembrando que $\nabla\phi$ é normal às curvas $\phi =$ *constante*, esboce várias curvas ao longo das quais o calor fluirá, assumindo que $\phi =$ *temperatura em* (x,y).

8. Seja $\phi = x^2 - y^2$ e considere os conceitos definidos no problema anterior.

   (a) Se ϕ é o potencial eletrostático em (x,y), ache a grandeza e a direção do campo elétrico em $(1,2)$. *Resposta.* $2\sqrt{5}$, $-2\vec{i} + \vec{j}$.

   (b) Se ϕ é a temperatura em (x,y), em que direção a temperatura decresce mais rapidamente a partir do ponto $(-3,2)$? *Resposta.* $3\vec{i} + 2\vec{j}$.

   (c) Se ϕ é a temperatura em (x,y), encontre a taxa de variação da temperatura, em relação ao deslocamento, no ponto $(1,2)$, na direção $3\vec{i} - \vec{j}$. *Resposta.* $\sqrt{10}$ (essa é a derivada direcional de ϕ, no ponto $(1,2)$, na direção $3\vec{i} - \vec{j}$).

9. A altura de uma colina (ou montanha) tem equação $z = 100(32 - x^2 - 4y^2)$ (metros) em relação a plano horizontal de referência Oxy (uma colina com equação! Isso existe?) Se você está no ponto $(x, y, z) = (3, 2, 310)$, que direção do plano Oxy você deve evitar para descer a colina com risco mínimo de cair rolando abaixo? *Resposta.* $3\vec{i} + 4\vec{j}$.

10. Justifique a seguinte afirmação. Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em P_0, então existem constantes m e n tais que para cada vetor unitário $\vec{u} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\operatorname{sen}\alpha)\vec{j}$, tem-se $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = m\cos\alpha + n\operatorname{sen}\alpha$.

11. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

    Mostre que, para cada vetor unitário $\vec{u} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\operatorname{sen}\alpha)\vec{j}$, existe a derivada direcional de f na direção $\vec{u}$, no ponto $(0, 0)$ (lembre-se de que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\vec{u})-f(0,0)}{t}$). Usando o fato estabelecido no exercício anterior, deduza que f não é diferenciável em $(0, 0)$.