UFSCar – Cálculo 2. Sexta lista de exercícios.
Profs João C.V. Sampaio e Yolanda k S Furuya

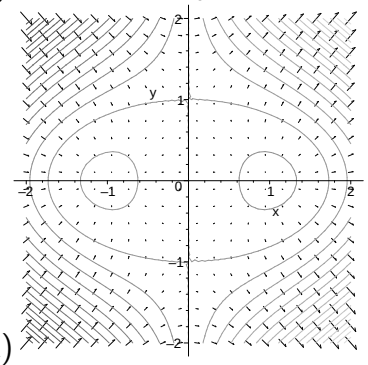
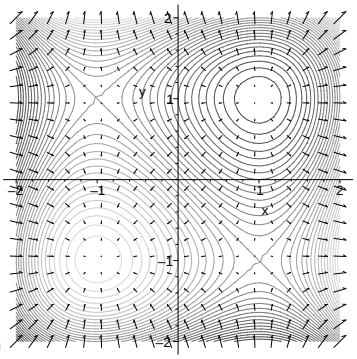
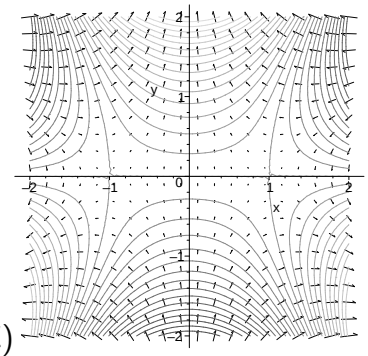
Máximos e mínimos

1. Para cada uma das funções dadas, determine seus pontos (i) de máximo locais; (ii) de mínimo locais; (iii) de sela.

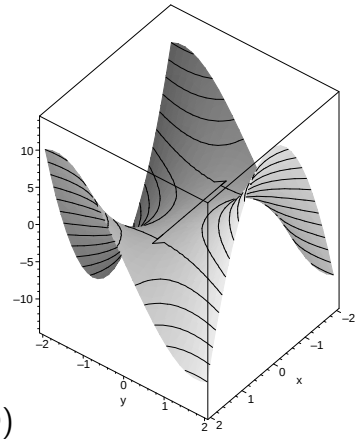
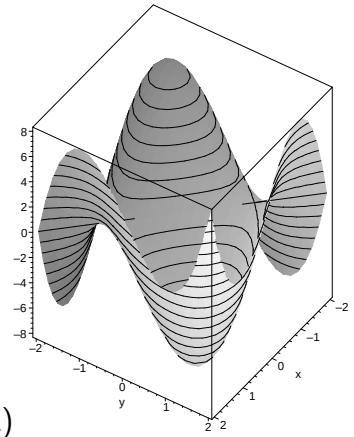
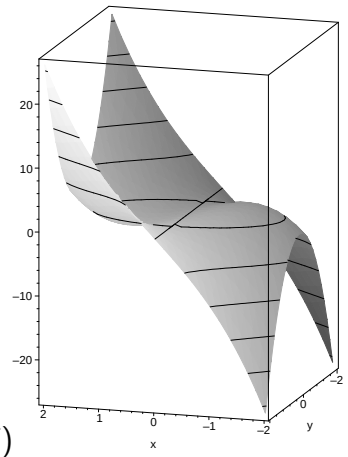
   (a) $z = (x-1)^2 + 2y^2$ (b) $z = (x-1)^2 - 2y^2$
   (c) $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$ (d) $z = x^3y^2(6-x-y)$ $(x>0,\, y>0)$
   (e) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ (f) $z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
   (g) $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ $(x>0,\, y>0)$ (h) $z = xye^{xy}$
   (i) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ (j) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ $(x,y,z>0)$

   Respostas. (a) (ii) $(1,0)$; (b) (iii) $(1,0)$; (c) (ii) $(1,0)$; (d) (i) $(3,2)$; (e) (ii) $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, (iii) $(0,0)$; (f) (i) todos os pontos da circunferência $x^2+y^2=1$, (ii) $(0,0)$; (g) (i) $(1,-1)$; (h) (ii) todos os pontos da hipérbole $xy=-1$; (i) (ii) $(-2/3,-1/3,1)$; (j) (ii) $(1/2,1,1)$.

2. (a) Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y$, deixando bem evidentes os critérios utilizados.
   (b) Quais dos mapas de contorno com campo gradiente abaixo representam a função?

(A)  (B)  (C) 

   Indique os pontos críticos encontrados sobre o desenho correspondente.
   (c) na região $R = [-2,2] \times [-2,2]$ exibida na figura, qual o ponto de mínimo global? E o de máximo global?
   (d) Qual gráfico corresponderia à sua função?

(D)  (E)  (F) 

3. Dentre todos os paralelepípedos retangulares de volume V dado, determine aquele cuja superfície externa total seja a menor possível. *Resposta.* Cubo de arestas $\sqrt[3]{V}$.

4. Que dimensões deverá ter uma caixa retangular, aberta por cima, de volume V dado, para que sua superfície externa total seja a menor possível? *Resposta.* Dimensões da base: $\sqrt[3]{2V}$ e $\sqrt[3]{2V}$; altura $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

5. Determine o paralelepípedo retangular, de área externa total S, que tenha o menor volume possível. *Resposta.* Cubo de arestas $\sqrt{S/6}$.

6. Representar o número real positivo a na forma de um produto de quatro fatores positivos, cuja soma (dos fatores) seja a menor possível. *Resposta.* $a = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$.

7. Determine a menor distância entre as curvas $y = x^2$ e $x - y - 2 = 0$. *Resposta.* $7\sqrt{2}/8$.

Máximos e mínimos, via multiplicadores de Lagrange

1. Determine os extremos condicionados das funções dadas, sujeitas às restrições indicadas.

   (a) $z = x^2 + y^2$, onde $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.
   Resposta. $z_{\text{min}} = \frac{36}{13}$, no ponto $(\frac{18}{13}, \frac{12}{13})$.

   (b) $z = x^2 + 24xy + 8y^2$, sendo $x^2 + y^2 = 25$.
   Resposta. $z_{\text{max}} = 425$ em $(3, 4)$ e em $(-3.-4)$, $z_{\text{min}} = -200$ em $(4, -3)$ e em $(-4, 3)$.

   (c) $w = x + y$, sendo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
   Resposta. $w_{\text{max}} = 1/\sqrt{2}$ em $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $w_{\text{min}} = -1/\sqrt{2}$ em $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$.

   (d) $u = xyz$, onde $x + y + z = 5$ e $xy + yz + zx = 8$.
   Resposta. $u_{\text{max}} = \frac{112}{27}$, nos pontos $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, $(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$, $(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.
   $u_{\text{min}} = 4$, nos pontos $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$ e $(1, 2, 2)$.

2. Resolver os seguintes problemas, com o emprego do método dos multiplicadores de Lagrange.

   (a) Dentre todos os paralelepípedos retangulares de volume V dado, determine aquele cuja superfície externa total seja a menor possível.
   Resposta. Cubo de arestas $\sqrt[3]{V}$.

   (b) Que dimensões deverá ter uma caixa retangular, aberta por cima, de volume V dado, para que sua superfície externa total seja a menor possível?
   Resposta. Dimensões da base: $\sqrt[3]{2V}$ e $\sqrt[3]{2V}$; altura $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

   (c) Determine o paralelepípedo retangular, de área externa total S, que tenha o menor volume possível. *Resposta.* Cubo de arestas $\sqrt{S/6}$.

   (d) Representar o número real positivo a na forma de um produto de quatro fatores positivos, cuja soma (dos fatores) seja a menor possível. *Resposta.* $a = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$.

   (e) Determinar o ponto da curva $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ mais próximo da origem $(0, 0, 0)$ (a curva é interseção de duas superfícies).
   Sugestão. Procure o valor mínimo da função $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeita às restrições impostas pelas equações da curva.
   Resposta. $(0, \pm 1, 0)$ e $(\pm 1, 0, 0)$.